

Vida Científica

EFEMÉRIDES

EN EL CENTENARIO DEL MODELO ATÓMICO DE NIELS BOHR

INTRODUCCIÓN

Hace ahora un siglo que NIELS HENRIK DAVID BOHR (1885-1962) enviaba a la prestigiosa revista *Philosophical Magazine* un artículo titulado *On the Constitution of Atoms and Molecules* [1] que es un hito en la Historia de la Ciencia. La revista lo recibió en julio de 1913 e inició con él su volumen número 26 en el mes de septiembre de dicho año.

El comienzo del artículo es extraordinariamente claro, como si se hubiese escrito cincuenta años después, cuando ya las teorías atómicas estaban bien asentadas. Por esta razón lo transcribimos aquí casi literalmente:

“Con objeto de explicar los resultados de los experimentos de dispersión de los rayos α por la materia, el Profesor Rutherford ha propuesto una teoría para la estructura de los átomos. Según ella, el átomo consiste en un núcleo cargado positivamente rodeado por un sistema de electrones unidos al átomo por la fuerza atractiva de aquél; la carga negativa total del conjunto de electrones es igual a la carga positiva del núcleo. Además, se supone que en el núcleo reside la mayor parte de la masa del átomo y que sus dimensiones lineales son muy pequeñas comparadas con las de éste último.”

En el año 1912, cuando Bohr trabajaba sobre este tema, ya se suponía que el átomo de hidrógeno estaba constituido por un protón y por un electrón. Esta composición concordaba con el hecho de que en los experimentos de JOSEPH JOHN THOMSON (1856-1940) sobre los rayos de electricidad positiva se había observado siempre que el átomo de hidrógeno tenía una sola carga elemental positiva, mientras que los demás elementos estudiados podían tener varias cargas positivas (la partícula α por ejemplo, tenía dos). Experimentos tan distintos como la desviación de estas últimas partículas y la disper-

sión de los rayos X conducían también a esta conclusión: El núcleo del átomo de hidrógeno tenía una sola carga positiva.

Por otro lado, la existencia de un núcleo atómico de dimensiones mucho menores que las del átomo se hizo necesaria para explicar la dispersión de partículas α con ángulos muy grandes [2, 3]. Éste fue el modelo que adoptó Bohr y para justificarlo lo utilizó en la interpretación de las líneas de emisión del espectro del hidrógeno y de otros átomos.

EL MODELO PLANETARIO DEL ÁTOMO

La adopción del modelo planetario para el átomo, que ya había sido sugerida en 1900 por el físico francés JEAN BAPTISTE PERRIN (1870-1942), se enfrentaba a un problema grave de estabilidad debido a la radiación electromagnética que se produce cuando una carga está acelerada. Esta inestabilidad no existía en el modelo propuesto en 1904 por Thomson [4], en el que los electrones se encontraban en el interior de una esfera cargada positivamente cuyas dimensiones lineales eran las del propio átomo. En este modelo podían moverse los electrones con las leyes de la Electrodinámica Clásica, radiando energía por efecto de su aceleración pero en configuraciones estables para el sistema.¹ No ocurría lo mismo en el caso del modelo planetario, en el que los electrones terminarían por precipitarse sobre el núcleo por el efecto de la pérdida energética por radiación (ver Apéndice).

La inestabilidad del sistema era una objeción muy severa para el modelo planetario. Como ésta provenía de la pérdida de energía radiante por el hecho de estar acelerado el electrón, Bohr propuso la existencia de órbitas estacionarias en las que no hubiese radiación de energía electromagnética. Así, en la página 3 del artículo citado propone lo siguiente:

“Let us at first assume that there is no energy radiation.”

¹Hay que señalar que en dicho artículo no se incluye el estudio del átomo de hidrógeno, sino de átomos con dos o más electrones.

Con esta suposición, el campo coulombiano del sistema aislado protón-electrón es similar al gravitatorio del sistema solar y se le puede aplicar la primera ley de Kepler simplificada, que se puede enunciar diciendo que la órbita n -ésima del electrón en el estado estacionario n es una circunferencia en cuyo centro se encuentra el núcleo en reposo. Si el radio de la órbita es a_n y su frecuencia (inversa del periodo) es ν_n , la tercera ley de Kepler se puede expresar de la siguiente manera:

$$a_n^3 \nu_n^2 = \text{constante}$$

Esta constante se puede calcular aplicando la segunda ley de Newton al caso del movimiento circular uniforme del electrón en torno al protón que provoca la fuerza de atracción de éste:

$$m a_n (2\pi \nu_n)^2 = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2} \Rightarrow$$

$$a_n^3 \nu_n^2 = \frac{1}{16\pi^3 \epsilon_0} \frac{e^2}{m} = 6,414253 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$$

Por otra parte, la energía total E_n del átomo cuando el electrón se encuentra en dicha órbita es la suma de sus energías cinética, E_c , y potencial, E_p . Al estar el sistema aislado, la energía cinética es igual a la mitad de la energía potencial cambiada de signo (teorema del virial), por lo que la energía total resulta ser:

$$E_n = -\frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{a_n^2}$$

Ésta es la energía mínima que tenemos que proporcionar al átomo para que el electrón, que se encuentra en la órbita de radio a_n girando con una frecuencia ν_n , se disocie del mismo. Combinando esta última expresión con la tercera ley de Kepler podemos relacionar las frecuencias ν_n de las órbitas, sus radios a_n y sus energías E_n .

Al llegar a este punto, Bohr propone una hipótesis que justifica más adelante mediante el principio de correspondencia. Se trata de introducir en el cálculo la teoría de la radiación de Planck cuantificando la energía E_n del átomo cuando se encuentra en una órbita estacionaria.

Para ello supone que cuando un electrón, que está inicialmente muy alejado del protón y cuya velocidad es prácticamente nula respecto a él, es atrapado en una órbita de radio a_n y de frecuencia ν_n , durante el proceso de enlace se han emitido n fotones de energía $h\nu_n/2$, cuya

suma es la energía E_n de la formación del átomo en dicha órbita:

$$E_n = -n h \frac{\nu_n}{2}$$

La energía E_n , el radio a_n y la frecuencia ν_n se expresan de la siguiente manera en función del número natural n :

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}; a_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2;$$

$$\nu_n = \frac{m e^4}{4 \epsilon_0^2 h^3} \frac{1}{n^3} \quad (1)$$

La energía E_n es la energía de enlace para una órbita dada y sus valores extremos corresponden a $n = 1$, que es el estado del sistema en que el electrón está más ligado al protón (estado fundamental), y a $n \rightarrow \infty$, en que el electrón se desliga del protón ($E_\infty = 0$). El valor de la energía del estado fundamental corresponde a la energía que hay que proporcionar al átomo de hidrógeno para ionizarlo. Esta energía ya se había determinado experimentalmente en la época en que Bohr escribió su artículo. El valor era de 13,6 eV. Con los datos de que se disponía para la carga e , para la relación e/m y para la constante h de Planck, Bohr proporcionó los valores indicados en la primera fila de la Tabla 1 para E_1 , a_1 y ν_1 , que se comparan con los datos actuales más refinados (filas 2 y 3).

Tabla 1: Comparación entre los valores actuales y los obtenidos por Bohr hace un siglo

Datos	E_1 (eV)	a_1 (nm)	ν_1 (10^{15} Hz)
Bohr (1913)	13,0	0,055	6,2
Hoy (experimentales)	13,598 44	-	-
Hoy (teóricos)	13,605 697 1	0,052 917 7	6,579 683 2

² La cuantificación de los radios de las órbitas que hace Bohr se puede obtener utilizando el principio de cuantificación generalizado que Planck había enunciado unos años antes y que decía [5]: "En un movimiento periódico, el producto de la cantidad de movimiento por la distancia recorrida en un ciclo ha de ser un múltiplo de la constante h ". Como el electrón ejecuta un movimiento circular uniforme en torno al protón en la órbita de radio a_n , se ha de cumplir lo siguiente:

$$\oint m v_n ds_n = 2\pi m v_n a_n = 2\pi L_n$$

donde m es la masa del electrón, v_n su velocidad, ds_n el elemento de arco de la órbita y L_n su momento angular. Esto permite cuantificar el momento angular L_n :

$$L_n = n \frac{h}{2\pi} = n \hbar$$

y, por ende, los radios a_n de las órbitas, las frecuencias ν_n de rotación y las energías E_n .

Como puede verse, la discrepancia en E_1 es inferior al 5%, el radio a_1 del átomo en su estado fundamental es del orden de magnitud que cabía esperar de las teorías atómicas precedentes y la frecuencia ν_1 se encuentra en las proximidades del espectro visible, como también cabía esperar. Esto animó a Bohr a tratar de interpretar otros datos experimentales del átomo de hidrógeno: las longitudes de onda de las líneas de emisión, de las que en la época se conocían unas cuantas con bastante buena precisión.

EL PODER DE LAS LÍNEAS ESPECTRALES

Desde que ISAAC NEWTON (1642-1727) descompuso la luz blanca en colores, obteniendo así su espectro, hasta que ROBERT WILHELM BUNSEN (1811-1899) y GUSTAV ROBERT KIRCHHOFF (1824-1887) sentaron las bases de la espectroscopia al interpretar las líneas negras que JOSEPH VON FRAUNHOFER (1787-1826) había descubierto en el espectro solar, se produjo un lento, pero importante, desarrollo de la Física y de la Química, que culminó en la primera mitad del siglo XX con el establecimiento de las teorías sobre la interacción radiación-materia. A este avance contribuyeron muchos investigadores de estas dos ramas del saber que han hecho que hoy tengamos una descripción de la estructura de la materia en la escala atómica muy elaborada.

En la época en que Bohr hizo su trabajo sobre el átomo, la espectroscopia óptica proporcionaba datos sobre las longitudes de onda de las líneas espectrales con una incertidumbre inferior a diez partes por millón con relación a los valores admitidos actualmente. En la segunda columna de la Tabla 2 se indican los datos que manejaba Bohr cuando publicó su artículo. Como puede verse, la incertidumbre es del orden de 0,004% si se compara con los datos actuales indicados en la tercera columna.

Tabla 2: Serie de Balmer del átomo de hidrógeno

Línea	λ (nm)		Error (%)
	1913	2013	
-	-	383,538 4	-
-	-	388,904 9	-
-	397,025	397,007 2	0,004
δ	410,185	410,174 0	0,003
γ	434,066	434,047 0	0,004
β	486,149	486,133 0	0,003
α	656,304	656,279 9	0,004

Según la hipótesis de Bohr, cuando un átomo se encuentra en una órbita de energía $E_{n'}$, con $n' > 1$, puede cambiar de órbita de manera espontánea y pasar a otra de energía menor E_n , con $n' > n \geq 1$, emitiendo una radiación homogénea (un fotón) cuya frecuencia ν verifica la siguiente relación:

$$h\nu = E_{n'} - E_n$$

Utilizando ahora la expresión de las energías y de las frecuencias de las órbitas proporcionadas en (1), se obtiene:

$$\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^3} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = \frac{\nu_n}{2} - \frac{\nu_{n'}}{2}$$

Es decir, las frecuencias de emisión de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno verifican el *principio de combinación de Rydberg-Ritz* enunciado por WALTER RITZ (1878-1909) en 1908:

Para un átomo dado, es posible encontrar una sucesión discontinua de frecuencias, llamadas términos espectrales, de manera que la frecuencia de cualquier raya espectral de dicho átomo se obtiene como la diferencia entre dos de estos términos.

Las frecuencias ν de las radiaciones ópticas son muy elevadas y no se pueden determinar directamente ni aun en la época actual. Por eso se acude a la relación que hay entre ellas y las longitudes de onda:

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

donde c es la velocidad de propagación de la onda en el medio. En el caso de las ondas luminosas esta velocidad había sido ya medida en el aire con gran precisión por ALBERT ABRAHAM MICHELSON (1852-1931) en 1906. El valor que manejaba Bohr tenía una discrepancia con el actualmente admitido³ del 0,03%. Utilizando esta relación se obtiene la fórmula propuesta por JOHANNES ROBERT RYDBERG (1854-1919), que generalizaba la obtenida unos años antes por el matemático suizo JOHANN JAKOB BALMER (1825-1898) para interpretar las longitudes de onda de la serie del átomo de hidrógeno en el espectro visible, que lleva su nombre:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right); n = 1, 2, 3, \dots; n' = n + 1, n + 2, n + 3, \dots \quad (2)$$

³En la actualidad el valor de la velocidad de la luz en el vacío es $c = 2,997\,924\,50 \text{ m s}^{-1}$, exento de error por convenio.

donde R es la denominada *constante de Rydberg*, cuya expresión es:

$$R = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \quad (3)$$

La comprobación numérica que hizo Bohr de su modelo planetario consistió en averiguar en qué medida se cumplía la fórmula de Rydberg para el caso de la serie de Balmer. Es decir, utilizó el valor de $n = 2$ y asignó a las demás líneas de la serie el valor de n' correspondiente, empezando por $n' = 3$. Pasando la R al primer miembro en (2) y la λ al segundo se obtiene lo siguiente para $n = 2$:

$$\frac{1}{R} = \lambda \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n'^2} \right); n = 2; n' = 3, 4, 5, \dots \quad (4)$$

Tabla 3: La fórmula de Rydberg aplicada a la serie de Balmer

n'	λ (nm)	$1/R$ (nm)
7	397,025	91,153 7
6	410,185	91,152 2
5	434,066	91,153 9
4	486,149	91,149 9
3	656,304	91,150 0

En la tercera columna de la Tabla 3 se puede comprobar que la inversa de R es prácticamente constante, lo que proporciona el siguiente valor para la constante de Rydberg:

$$R = 1,09707 \times 10^7 \text{ m}^{-1} (\pm 0,002\%)$$

Con los valores de e , m , ϵ_0 , h y c de que Bohr disponía en la época, la constante de Rydberg calculada a partir de su modelo era:

$$R = 1,04 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

La discrepancia entre los valores teórico y experimental de R era mucho mayor que las incertidumbres de la medida: del 5% frente al 0,002%. La razón de esto estriba en que las medidas espectroscópicas que proporcionaban las longitudes de onda eran ya de una gran precisión, mientras que no pasaba lo mismo con los valores de e , m , y h . Utilizando los valores de que se dispone en la actualidad, la discrepancia entre la teoría y los experimentos de entonces es solamente del 0,05%. Es decir, los datos proporcionados por la espectroscopia óptica constituían un magnífico test para los modelos atómicos.

Si la ordenación de los niveles que proporcionaba el modelo de Bohr era correcta, se deberían encontrar otras series de líneas del átomo de hidrógeno para valores dis-

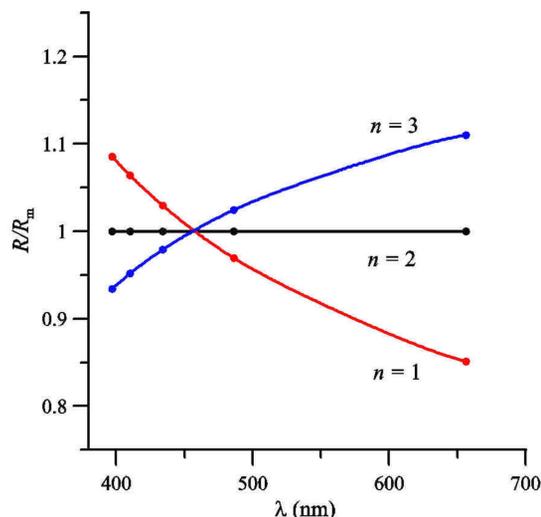


Figura 1: Variación de R/R_m en la serie de Balmer para distintos valores de n .

tintos de n . En particular, deberían existir sendas series de líneas para $n = 1$ y $n = 3$. La primera se encontraría en la zona ultravioleta del espectro y la segunda en la zona infrarroja.

Por otra parte, podríamos preguntarnos si las longitudes de onda de la serie de Balmer de la Tabla 3 no corresponden a una de estas series. Sin embargo, si aplicamos la ecuación (4) para $n = 1, 2$ y 3 y determinamos con ella el valor de R a partir de cada una de las longitudes de onda, obtenemos lo que se muestra en la Figura 1. En ella se representa el cociente R/R_m , donde R_m es el valor medio de los valores de R obtenidos para cada longitud de onda de la Tabla 3 para los tres valores de n indicados en la gráfica. Como puede verse, en el caso de $n = 2$ el cociente R/R_m vale la unidad, mientras que en los otros dos casos se separa de este valor. Se puede admitir, por lo tanto, que la serie de Balmer corresponde a las transiciones de las órbitas estacionarias $n' = 3, 4, 5, 6$ y 7 sobre la de $n = 2$.

Conocida la constante de Rydberg y aceptado el modelo planetario se pueden calcular las demás series de las líneas espectrales del átomo de hidrógeno. Lo primero que se puede hacer es delimitar el alcance de cada serie. A la línea de longitud de onda mayor en cada una se le denomina α , a la siguiente β , y así, sucesivamente. Las longitudes de onda de cada serie están comprendidas entre la de su línea α y la longitud de onda λ_{lim} que se obtiene al hacer tender a infinito el número n' :

$$\lambda_{\text{lim}} = \frac{n^2}{R}$$

En la Tabla 4 se muestran los valores de las longitudes de onda λ_α y λ_{lim} para $n = 1, 2$ y 3 . Se puede constatar que las zonas del espectro correspondientes a estas tres series no se solapan: la λ_{lim} de la serie de Balmer ($n = 2$) es mayor que la λ_α de la serie correspondiente a $n = 1$, que se encuentra toda ella en el dominio UV, mientras que su λ_α es inferior a la λ_{lim} de la serie correspondiente a $n = 3$, que se encuentra toda ella en el dominio IR.

Tabla 4: Zonas del espectro correspondientes a las tres primeras series del hidrógeno

n	λ_α (nm)	λ_{lim} (nm)
1	121,57	91,18
2	656,29	364,61
3	1875,12	820,37

Utilizando su principio de combinación, ya Ritz había señalado que debería existir una serie del hidrógeno en el dominio IR y que correspondería a $n = 3$. En 1908, FRIEDRICH PASCHEN (1865-1947) observó las dos primeras líneas de esta serie. Por otra parte, THEODORE LYMAN (1874-1954) había comenzado sus trabajos de espectroscopía en el dominio UV, que presentaban muchas dificultades experimentales porque era necesario trabajar con todo el dispositivo espectroscópico encerrado en una cámara de vacío. Aun así, en el año 1914 pudo anunciar la existencia de la tres primeras líneas de la serie $n = 1$, que hoy lleva su nombre.

En la Tabla 5 se muestra una comparación entre la teoría y el experimento para estas tres series. En la primera columna se indica el nombre de su descubridor; en la segunda, el nombre de la línea espectral; en la tercera, la longitud de onda calculada por el modelo de Bohr utilizando la constante de Rydberg de la época; en la cuarta, los valores experimentales admitidos actualmente; y en la quinta, la discrepancia teoría-experimento que, como puede verse, es siempre inferior a una parte en diez mil.

Con los resultados experimentales admitidos en la actualidad (columna cuarta de la Tabla 5) se puede calcular la constante de Rydberg para el vacío (serie de Lyman) y para el aire (series de Balmer y Paschen). Los resultados se indican en la Tabla 6. Esta pequeña diferencia es debida a que la luz viaja más deprisa en el vacío que en el aire. Por esta razón, la longitud de onda ha de ser menor en el aire que en el vacío, lo que hace que la constante de Rydberg, que es inversamente proporcional a ella, tenga que ser mayor en el primer medio que en el segundo.

Tabla 5: Líneas de emisión del átomo de hidrógeno

	Línea	λ_B (nm)	λ_E (nm)	(%)
LYMAN	-	92,63	92,624 9	0,006
	-	93,08	93,075 1	0,005
	-	93,78	93,781 4	0,002
	δ	94,98	94,974 2	0,006
	γ	97,26	97,251 7	0,009
	β	102,58	102,572 8	0,007
	α	121,57	121,567 01	0,002
BALMER	-	383,55	383,539 7	0,003
	-	388,91	388,902 5	0,002
	-	397,02	397,007 5	0,003
	δ	410,18	410,173 4	0,002
	γ	434,06	434,047 2	0,003
	β	486,14	486,135	0,001
	α	656,29	656,279	0,002
PASCHEN	-	954,61	954,62	0,001
	δ	1004,95	1004,98	0,001
	γ	1093,82	1093,817	0,000 3
	β	1281,82	1281,807 2	0,001
	α	1875,12	1875,13	0,000 5

Tabla 6: Constante de Rydberg para el aire y el vacío

Medio	R (10^7 m^{-1})
Vacío	1,096 785
Aire	1,097 090

El cociente entre los valores de dichas constantes es el índice de refracción n_{air} del aire respecto al vacío:

$$n_{\text{air}} = \frac{R_{\text{air}}}{R_{\text{vac}}} = 1,00028$$

a comparar con el índice n_{air} medido por otros medios, que es: $n_{\text{air}} = 1,00029$. Esta coincidencia es interesante si se analiza a la luz del modelo de Bohr. En efecto: la fórmula (3) proporciona la constante de Rydberg en el modelo planetario. En ella intervienen tres constantes del mundo microscópico, la masa m del electrón, su carga e y la constante h de Planck, y dos constantes del mundo macroscópico, la permitividad eléctrica ϵ_0 del vacío y la velocidad de la luz en el medio en que se propaga la emisión procedente del átomo. El átomo está aislado y la constante ϵ_0 que interviene en la fuerza de atracción entre el protón y el electrón es la permitividad eléctrica del vacío. Es como si el protón y el electrón estuvieran interactuando en el vacío. Éste es el significado que tiene el decir que el áto-

mo está aislado. Los niveles energéticos estacionarios propuestos por Bohr corresponden al vacío y, por consiguiente, la frecuencia ν de la emisión también. Sin embargo, cuando la luz producida por la emisión atómica se propaga en el medio, su velocidad de propagación se ve afectada por éste y la longitud de onda que percibe el detector es la que corresponde al medio en que éste se encuentra. Por esta razón, el cociente entre las constantes de Rydberg en dos medios distintos es igual a la inversa del cociente de las velocidades de propagación de la luz en dichos medios.⁴

BOHR EN AYUDA DE LA ESPECTROSCOPIA

Hasta aquí, lo que había hecho la espectroscopia era ayudar a hacer plausible el modelo de Bohr. Este modelo trataba de fundamentar el principio de combinación de Ritz. Trataba de encontrarle un porqué. Ahora bien, una vez admitido el principio, teniendo en cuenta la gran precisión de las medidas espectroscópicas, los espectroscopistas se ocuparían de clasificar las series y de identificar con ellas a los átomos. La espectroscopia se convertía así en una poderosa herramienta para el análisis químico.

Así las cosas, existía una serie de líneas espectrales observadas por los astrónomos y atribuidas al hidrógeno que encajaban mal en el principio de combinación.

Las primeras en estudiar estas líneas fueron las *mujeres computadoras* del Harvard College Observatory WILLIAMINA PATON STEVENS FLEMING (1857-1911), ANTONIA MAURY (1866-1952), ANNIE JUMP CANNON (1863-1941), HENRIETTA SWAN LEAVITT (1868-1921)... que fueron contratadas a menos de medio dólar la hora por EDUARD CHARLES PICKERING (1846-1919) para analizar los espectros estelares que éste último había heredado del astrónomo aficionado HENRY DRAPER (1837-1882) y los que él mismo pudo obtener en el observatorio. El meticuloso trabajo de estas mujeres pioneras ha dado origen a la actual clasificación espectral de las estrellas.

Las líneas clasificadas por estas mujeres (que Bohr llama las líneas de Pickering [6]) fueron obtenidas más tarde por ALFRED FOWLER (1868-1940) en un laboratorio terrestre y medidas con mucha precisión. Fowler hacía pasar una descarga eléctrica muy intensa a través de una mezcla de hidrógeno y helio. Las líneas que obtuvo fue-

ron analizadas por Bohr con la siguiente versión de la fórmula de Rydberg:

$$\frac{1}{R_F} = \lambda \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{n'^2} \right); n = 3; n' = 4, 5, 6, \dots$$

En la Tabla 7 se indican en la primera columna las líneas obtenidas por Fowler y en la segunda los números n' con los que se calculan los valores $1/R_F$ de la tercera columna.

Tabla 7: La fórmula de Rydberg aplicada a las líneas observadas por Fowler

λ (nm)	n'	$1/R_F$ (nm)
468,598	4	22,779 1
320,330	5	22,779 0
273,334	6	22,777 8
251,131	7	22,778 3
238,547	8	22,777 9
230,620	9	22,777 3
225,288	10	22,779 1

Como puede verse, esta nueva serie de líneas responde bien a la Fórmula de Rydberg, pero la constante R_F que se obtiene del análisis es cuatro veces mayor que la R obtenida para el hidrógeno con la serie de Balmer:

$$R_F = 4,39013 \times 10^7 \Rightarrow R = 1,09707 \times 10^7 \text{ m}^{-1} \Rightarrow \frac{R_F}{R} = 4,00169$$

Esto parecía indicar que se trataba de una serie de líneas de otro elemento. Bohr, con su modelo planetario obtuvo inmediatamente la solución: la serie correspondía al helio ionizado una sola vez. Este ión tiene un solo electrón girando el torno al núcleo, pero la fuerza con que es atraído por él es dos veces mayor ($Z = 2$) que la correspondiente al caso del hidrógeno. La expresión de la energía que aparece en (1) se transforma en:

$$E_n = \frac{mZ^2 e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

y la fórmula de Rydberg se transforma en la siguiente:

$$\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right); n = 1, 2, 3, \dots; n' = (n+1), (n+2), (n+3), \dots$$

Con esta nueva fórmula, la serie observada por Fowler y por los astrónomos correspondería a la que podríamos llamar la serie de Paschen ($n = 3$) del ion de He ionizado una sola vez.

⁴Se deja al cuidado del lector averiguar qué ocurriría si en la fórmula de Rydberg no se tomase como permitividad la del vacío en todos los casos.

Bohr hizo todavía un análisis más sutil, que ponía en evidencia la bondad de la fórmula de la energía de los niveles obtenida mediante su modelo. En la fórmula proporcionada para R en (3), las constantes e , h , ϵ_0 , y c no cambian cuando se pasa del hidrógeno al helio ionizado; pero la masa m que interviene en la energía cinética sí lo hace. En primera aproximación se ha supuesto que la masa nuclear M (masa del protón en este caso) es infinitamente mayor que la masa m del electrón, por lo que el núcleo del átomo permanece fijo mientras el electrón gira en torno a él. Esto no es así, y el hecho de que no sea infinita la masa del protón se traduce en que hay que utilizar la denominada masa reducida μ del electrón en el estudio del movimiento de éste. Esta masa viene definida de la siguiente manera:

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

Así, las constantes R del hidrógeno y del helio cumplen la siguiente relación⁵:

$$\frac{R_{He}}{R_H} = \rho = \frac{\mu_{He}}{\mu_H} = 1,000409$$

Por lo tanto, conocida la constante R_H a partir de la serie de Balmer, se puede determinar la constante R_{He} :

$$R_{He} = \rho R_H = 1,09752 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

que coincide en una parte en cien mil con la obtenida por Fowler a partir de la serie de Paschen del He ionizado (ver Tabla 7):

$$R_{He} (\text{Fowler}) = \frac{R_F}{4} = 1,09753 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA

Cuando Niels Bohr estableció su modelo del átomo de hidrógeno, su idea fundamental era hacer intervenir los fotones de Planck en la formación de las órbitas electrónicas. Su hipótesis consistía en admitir que cuando el electrón es atrapado en una órbita de radio a_n y de frecuencia de rotación ν_n , en su camino desde el infinito hasta dicha órbita se emiten n fotones de frecuencia $\nu_n/2$ y el electrón queda ligado al protón con una energía de enlace que es, justamente, la suma de las energías $h\nu_n/2$ de estos n fotones. Utilizando las expresiones (1) de estas magnitudes podemos reescribirlas como sigue:

$$a_n = a_0 n^2; \nu_n = \frac{B}{n^3}; E_n = -n h \frac{\nu_n}{2} \quad (5)$$

⁵En el cálculo, hemos utilizado los valores actualmente admitidos de las masas del protón y del neutrón.

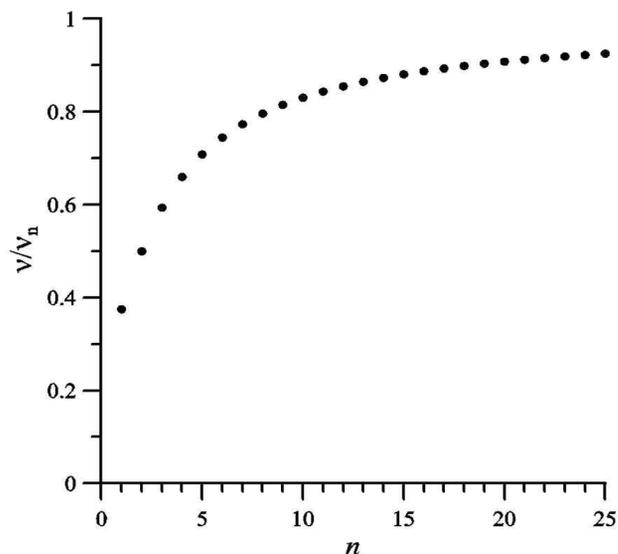


Figura 2: Variación de v/v_n en función de n .

donde:

$$a_0 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} = 5,291774 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$B = \frac{m e^4}{4 \epsilon_0^2 h^3} = 6,579683 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

Desde el punto de vista clásico, el electrón en dicha órbita sería un oscilador que emitiría una onda electromagnética de frecuencia ν_n y se haría inestable. Bohr adopta una hipótesis que contradice la electrodinámica clásica asumiendo que la órbita es estacionaria y el electrón no emite radiación electromagnética cuando está girando en torno al protón a la frecuencia ν_n . Lo único que pasa es que, o bien por excitación exterior o bien de manera espontánea, cambia de órbita estacionaria absorbiendo o emitiendo fotones, pero la frecuencia ν de éstos es diferente a las frecuencias de las órbitas involucradas. Para fijar ideas, supongamos que el electrón pasa de la órbita de radio a_{n+1} a la de radio a_n emitiendo un fotón de frecuencia ν . Como se deduce de las expresiones (5), esta frecuencia está relacionada con ν_n de la siguiente manera:

$$\frac{\nu}{\nu_n} = \frac{n^2 + 1/2}{n^2 + 2n + 1}$$

Cuando los valores de n son pequeños, la frecuencia ν de la radiación emitida es mucho más pequeña que la frecuencia de rotación ν_n del electrón en la órbita, pero cuando n crece, dichas frecuencias se van aproximando (ver Figura 2).

Es decir, cuando en la formación de la órbita interviene un número muy elevado de fotones, la frecuencia ν de

la radiación emitida al pasar de una órbita a la contigua coincide prácticamente con la frecuencia ν_n de la rotación del electrón. Los radios de las órbitas tienden a igualarse, de manera que en el límite macroscópico en el que el radio de la órbita es mucho mayor que el radio a_0 del átomo de hidrógeno (estado fundamental) podemos considerarlo como un oscilador clásico, que emite o absorbe a la frecuencia de oscilación ν .

En resumen: Para Bohr, el átomo no emite ni absorbe radiación cuando se encuentra en las órbitas n y $n+1$, solamente emite si transita de la una a la otra. Para la electrodinámica clásica, el átomo siempre está emitiendo o absorbiendo energía en las órbitas n y $n+1$, lo que hace que pueda transferir su movimiento de una órbita a la otra de manera continua. Cuando los radios de las órbitas son pequeños (del orden de unos pocos nanómetros), la teoría de Bohr proporciona buenos resultados y la electrodinámica clásica fracasa, pero cuando los radios son de tamaño macroscópico (decenas o centenas de nanómetros) las dos teorías proporcionan resultados coincidentes. Aunque sean distintas y no se pueda obtener la una como una aproximación de la otra, en el mundo macroscópico tienen que proporcionar los mismos resultados. Este principio de correspondencia lo enunció Niels Bohr en el año 1918 como se indica a continuación, pero ya lo utilizaba de forma implícita en el artículo de 1913:

Los resultados de la teoría de la radiación cuántica deben coincidir con los de la clásica en el límite en que los números cuánticos involucrados son muy altos (y las frecuencias son muy bajas).

Este principio sirvió como guía para los estudios de la radiación durante algunos años.

COMENTARIOS FINALES

A pesar del inmediato éxito del modelo de Bohr sobre el átomo de hidrógeno, fue superado muy pronto por la nueva teoría de la Mecánica Cuántica que LOUIS VICTOR DE BROGLIE (1892-1987), ERWIN SCHRÖDINGER (1887-1961), WERNER KARL HEISENBERG (1901-1976), MAX BORN (1882-1970), PAUL DIRAC (1902-1984) y JOHN VON NEUMANN (1903-1957) establecieron en la década de los años veinte del siglo pasado. La nueva teoría permitía resolver las contradicciones internas de la de Bohr y justificar las hipótesis que le permitieron interpretar con tanto éxito los espectros atómicos.



Figura 3: Fotografía de Niels Bohr proyectada en el Aula Magna de la Facultad de Ciencias Físicas de la Universidad Complutense de Madrid el día 19 de noviembre de 1962.

Una de los fracasos del modelo de Bohr para el átomo de hidrógeno es que éste tendría que tener un momento angular orbital $L_1 = \hbar$ en el estado fundamental, mientras que para la Mecánica Cuántica actual su valor debe ser nulo y nunca se ha observado experimentalmente.⁶

Otra cuestión importante en relación con la actual Mecánica Cuántica es que el modelo de Bohr viola el Principio de Incertidumbre de Heisenberg ya que se conocen simultáneamente la posición y el momento del electrón en las órbitas estacionarias.

Por otra parte, el modelo es insuficiente para calcular las intensidades relativas de las líneas de emisión o absorción.

Aun así, el modelo de Bohr sigue siendo empleado en la enseñanza secundaria y en algunos cursos de la universitaria por su carácter intuitivo y por la sencillez de su tratamiento matemático. No obstante, se debe hacer hincapié en sus profundas diferencias con la Mecánica

⁶ No se produce interacción espín-órbita en los estados s .

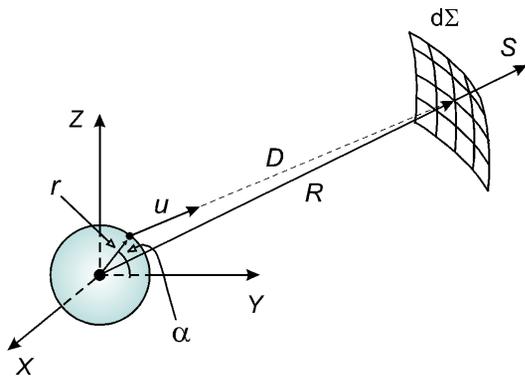


Figura 1A: Sistema de coordenadas para el cálculo de $E(x, y, z)$.

Cuántica, aunque el hecho de que la fórmula para los niveles E_n del átomo de hidrógeno coincidiera tan exactamente con la que proporciona la ecuación de Schrödinger y permitiera una interpretación tan ajustada de las líneas espectrales de los átomos, ha debido influir grandemente en el triunfo tan rápido y la difusión tan amplia de las ideas cuánticas. De manera que debemos estar muy agradecidos a Niels Bohr por su modelo.

El autor aún recuerda aquel 19 de noviembre de 1962 cuando encontró una enorme fotografía de Bohr proyectada sobre una pantalla al llegar a la clase de Física en el Aula Magna de la Universidad Complutense de Madrid. Acababa de morir el día anterior y nuestra universidad rendía un humilde homenaje al Premio Nobel.

APÉNDICE

CAÍDA DEL ELECTRÓN SOBRE EL PROTÓN EN LA TEORÍA CLÁSICA

Por el interés que tiene la cuestión relativa a la estabilidad del átomo de hidrógeno en el modelo planetario, vamos a exponerla brevemente en un ejemplo sencillo [7].

Supongamos que tenemos un átomo de hidrógeno en el que el protón y el electrón se atraen con la fuerza de Coulomb. Supongamos, además, que se trata de un sistema aislado y que el protón tiene una masa muy superior a la del electrón, que está orbitando en torno a él (ver Figura 1A).

Al tratarse de una carga acelerada se genera un campo electromagnético cuya componente eléctrica en el punto de vector de posición $\mathbf{R} = (x, y, z)$ se puede calcular

a partir de la fórmula proporcionada por RICHARD PHILLIPS FEYNMAN (1918-1988) [8]:

$$E(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{u}(t')$$

donde $t' = t - R/c$, siendo c la velocidad de la luz, e el valor absoluto de la carga del electrón, ϵ_0 la permitividad eléctrica del vacío y $\mathbf{u}(t')$ el vector unitario en la dirección que une al electrón con el punto en cuestión.

Dicho vector cumple la siguiente condición:

$$D\mathbf{u} = \mathbf{R} - \mathbf{r} = R\mathbf{u}_R - r\mathbf{u}_r$$

donde los vectores unitarios \mathbf{u}_R y \mathbf{u}_r tienen las siguientes expresiones:

$$\mathbf{u}_R = (\sin\theta \cos\varphi, \sin\theta \sin\varphi, \cos\theta)$$

$$\mathbf{u}_r = (0, \cos\alpha, \sin\alpha)$$

y D es la distancia que va desde el electrón al punto (x, y, z) donde se calcula el campo, que para $R \gg r$ puede aproximarse de la siguiente manera:

$$D \cong R - r(\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_r)$$

El vector \mathbf{u}_r y la distancia D varían con el ángulo α y éste lo hace muy rápidamente con el tiempo.⁷ Por lo tanto, también son muy rápidas las variaciones temporales del vector \mathbf{u} , responsable de la creación del campo electromagnético por el cual el sistema electrón-protón perdería energía por radiación. Esta pérdida entraña una disminución del módulo r del vector de posición del electrón, pero vamos a suponer que esta disminución es muy pequeña de una órbita a la siguiente, por lo que podemos admitir que la contribución esencial a la variación con el tiempo del vector \mathbf{u} proviene de la rapidísima variación de la dirección del vector \mathbf{r} , representada por el vector unitario \mathbf{u}_r , pero no de la variación de su módulo r . En definitiva, para calcular el campo electromagnético en un punto (x, y, z) situado a una distancia R muy grande del protón, vamos a suponer que la velocidad angular $\omega = d\alpha/dt$ es muy elevada pero que su variación de una órbita a la siguiente es muy pequeña y que también lo es la variación de r . Con estas simplificaciones se calcula fácilmente la segunda derivada de \mathbf{u} con respecto al tiempo y se obtiene el siguiente campo radiante $E(x, y, z)$:

$$E(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r\omega^2}{c^2 R} [(\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_r)\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_r]$$

Este campo está contenido en el plano tangente de la esfera de radio R centrada en el protón, así como lo está

⁷El ángulo α aumenta una vuelta completa en un intervalo de tiempo del orden de 10^{-15} segundos.

también el campo magnético que genera. Por consiguiente, el vector de Poynting S es paralelo a R , de manera que el flujo de energía radiante que atraviesa el elemento de superficie $d\Sigma$ por unidad de tiempo en un instante t es:

$$d\Phi = S d\Sigma = \epsilon_0 c E^2 d\Sigma = \epsilon_0 c E^2 R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

Haciendo la integración en dicho instante para toda la esfera se obtiene la potencia que está perdiendo el sistema electrón-protón por radiación electromagnética:

$$\Phi = \frac{e^2 r^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^2}$$

Por lo tanto, la pérdida de energía radiante $d\mathcal{E}_R$ que se produce en un elemento dt de tiempo es:

$$d\mathcal{E}_R = \Phi dt = \frac{e^2 r^2 \omega^4}{6\pi \epsilon_0 c^2} dt$$

Esta pérdida conlleva una disminución dr de la distancia electrón-protón que hace que cambien las energías potencial \mathcal{E}_p y cinética \mathcal{E}_c . Continuando con la aproximación de órbitas casi cerradas, podemos admitir que se verifica el teorema del virial y que la variación con la distancia r de la energía cinética es igual a la mitad de la variación de la energía potencial pero cambiada de signo:

$$d\mathcal{E}_p \cong -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr ; d\mathcal{E}_c \cong \frac{1}{8\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} dr$$

Es decir, la energía potencial se haría cada vez más negativa al disminuir r y el electrón se precipitaría sobre el protón. Considerando el sistema aislado, la suma de las

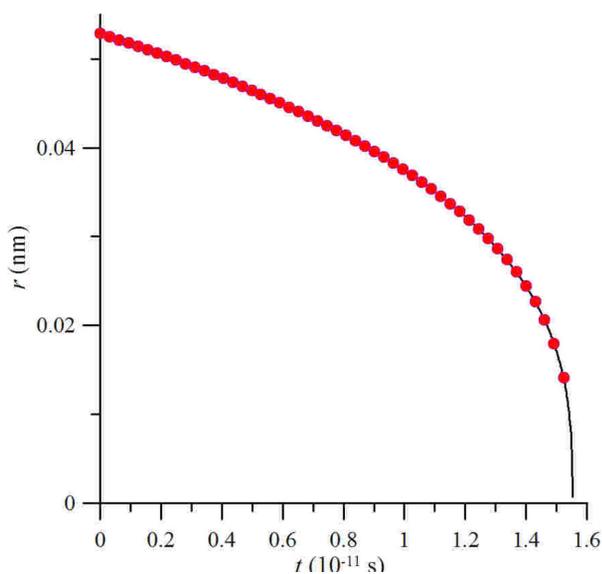


Figura 2A: Tiempo de caída del electrón sobre el protón para r_0 igual al radio de Bohr.

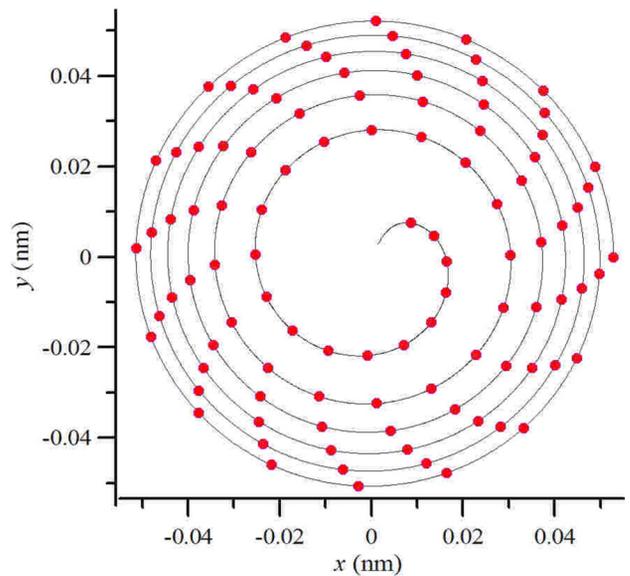


Figura 3A: Caída del electrón sobre el protón para r_0 igual al radio de Bohr.

variaciones de las energías potencial y cinética ha de ser igual y contraria a la pérdida de energía por radiación, lo que nos permite relacionar r y t mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$dr = -\frac{4}{3} \frac{r^4 \omega^4}{c^3} dt$$

Continuando con la aproximación de movimiento casi circular uniforme, podemos relacionar r y ω mediante la aceleración centrípeta a que está sometido el electrón por la fuerza coulombiana:

$$r \omega^2 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e r^2}$$

Obteniendo la ecuación diferencial definitiva entre las variables r y t :

$$r^2 dr = -\frac{4}{3} R_e^2 c dt$$

donde:

$$R_e = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 m_e c^2} = 2,817941 \times 10^{-15} \text{ m}$$

es el denominado radio clásico del electrón. Integrando la ecuación diferencial se obtiene $r(t)$:

$$r(t) = \sqrt{r_0^3 - R_e^2 c t}$$

donde r_0 es la distancia del electrón al protón en el instante inicial. Conocido $r(t)$ se puede calcular $\omega(t)$ y, por lo tanto, $\alpha(t)$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{r_0}{R_e} \right)^{3/2} - \left(\frac{r}{R_e} \right)^{3/2} \right]$$

En la Figura 2A se indica la variación de $r(t)$ con el tiempo y en la Figura 3A se muestra cómo sería la trayectoria del electrón cayendo hacia el núcleo, ambas para una distancia inicial de 0,0529 nm (radio de Bohr). Como puede verse, el electrón caería sobre el núcleo en un intervalo de tiempo del orden de una centésima de nanosegundo. Sin embargo, la experiencia dice que en el estado fundamental el átomo permanece indefinidamente mientras no se le comunique energía para excitarlo, y en un estado excitado permanece del orden del nanosegundo antes de desexcitarse espontáneamente. Por otra parte, la energía que habría radiado durante la caída del electrón desde 0,0529 nm hasta 0.01 nm sería muy grande (350 eV), cosa que no se observa experimentalmente.

La inestabilidad que prevé la teoría clásica debida a la radiación del electrón acelerado en su órbita no se produce, por lo que Bohr hizo muy bien al proponer las órbitas estacionarias sin emisión de energía radiante.

BIBLIOGRAFÍA

1. N. Bohr, Philos. Mag. 26, 1 (1913).
2. E. Rutherford, Phil. Mag. XXI, 669 (1911).

3. A. Willart Torres, 100cias@uned, 6, 107-111 (2003).
4. J.J. Thomson, Phil. Mag. VII, 237 (1904).
5. C. Carreras, A.F. Rañada, J. García Sanz, M. Yuste: Física Básica 2, Serie El libro de Bolsillo, Alianza Editorial, SA (Madrid, 1997).
6. Niels Bohr: Les Spectres et la Structure de L'Atome (Trois conférences), traducción de A. Corvisy, Librairie Scientifique J. Hermmann (París, 1923).
7. C. Carreras y M. Yuste, Óptica Pura y Aplicada, Vol. 21, 167 (1988).
8. R.P. Feynman, R.B. Leighton y M. Sands: The Feynman lectures on Physics (Física), Vol. I, 28-3, Fondo Educativo Interamericano, SA (Bogotá, 1971).

Manuel Yuste Llandres
Dpto. de Física de los Materiales