
MATEMÁTICAS EN ACCIÓN

Sección a cargo de

Rosa María Ros

El Tránsito de Venus del 8 de junio de 2004

por

Rosa María Ros

1 INTRODUCCIÓN

El próximo 8 de junio tendrá lugar un raro acontecimiento astronómico: el paso de Venus por delante del disco solar, esto es, el tránsito de Venus. Éste evento tuvo gran relevancia en el siglo XVIII porque sirvió a la comunidad internacional para determinar la distancia de la Tierra al Sol. En esta ocasión se da la circunstancia de que diversas instituciones internacionales, con fondos de la Unión Europea, promueven repetir esta medición con la colaboración de los estudiantes europeos interesados en el tema. Para ello bastará realizar la observación del tránsito y, tras ello, enviar los tiempos de entrada y salida de Venus respecto del disco solar a la página web del evento.

<p>¡CUIDADO!: No hay que mirar nunca al Sol directamente ni a través de cualquier instrumento óptico (telescopios, prismáticos, lentes, etc.). La única forma segura de observar el Sol es por proyección de su imagen sobre una pantalla.</p>

En este artículo se ofrecen algunos contenidos para motivar y preparar la observación con alumnos. El objetivo esencial es ofrecer unas propuestas útiles que sirvan al profesor para animar a sus alumnos a observar el tránsito, explicando “qué” es un tránsito y cada “cuánto” tiene lugar y mostrando además “por qué” y “cómo” el tránsito de Venus permite determinar la distancia Tierra-Sol.

Se ha intentado, aún a riesgo de perder precisión, simplificar el desarrollo matemático para que la propuesta sea realmente utilizable en nuestros centros

de secundaria (aunque en ciertos casos es más para alumnos de bachillerato que de ESO). La simplificación del planteamiento (asumiendo las hipótesis simplificadoras necesarias) permite que sea inteligible para el alumnado, el cual puede seguirlo usando meramente los contenidos adquiridos en la escuela. De esta forma el problema científico de la determinación de la distancia Tierra-Sol aparece como un desafío para los alumnos de bachillerato con una solución alcanzable para sus conocimientos.

Las hipótesis adoptadas han sido sólo dos: suponer que las órbitas de Venus y la Tierra son circunferencias centradas en el Sol y que las posiciones de Venus, el centro del Sol y los observadores terrestres son coplanarias. Con estos puntos de partida el desarrollo matemático sólo precisa de la definiciones de seno, tangente y considerar que la suma de los ángulos de un triángulo es de 180 grados. En el caso de que se quiera conseguir mejores resultados es necesario aplicar también el Teorema de Pitágoras. Si se desea dar un ejemplo de cómo basta conocer los tiempos de los contactos de entrada y salida de Venus para determinar la distancia Tierra-Sol hay que hacer una hipótesis más: suponer que el movimiento de Venus sobre la superficie solar se realiza a velocidad constante.

En el caso que no se consideraran las hipótesis mencionadas habría que introducir conceptos relativos a cónicas que no se dan en bachillerato, además de matrices de rotación y contenidos de trigonometría que también desconocen. Así pues, partiremos de esas hipótesis y utilizaremos las observaciones conseguidas en 1769 para observadores muy alejados pero sobre el mismo meridiano.

Para aquellos alumnos más jóvenes se proponen algunas experiencias, desarrollables en el patio de la escuela, que les acerquen a comprender el proceso del cálculo de la distancia Tierra-Sol, y que incluso, pueden mezclarse con el juego, introduciendo así la ciencia como algo no aburrido. En este caso no se alcanzan resultados cuantificables y las experiencias se mueven sólo a nivel cualitativo.



Figura 1: *Venus aparece como un puntito oscuro sobre el disco solar*

2 ¿QUÉ ES UN TRÁNSITO DE VENUS?

Un tránsito de Venus tiene lugar cuando un observador desde la Tierra ve cruzar Venus siguiendo una línea recta sobre la faz del disco solar. Es algo así como un pequeño eclipse de Sol, pequeño porque el diámetro de Venus aparece como un minúsculo puntito sobre el disco del Sol (figura 1).

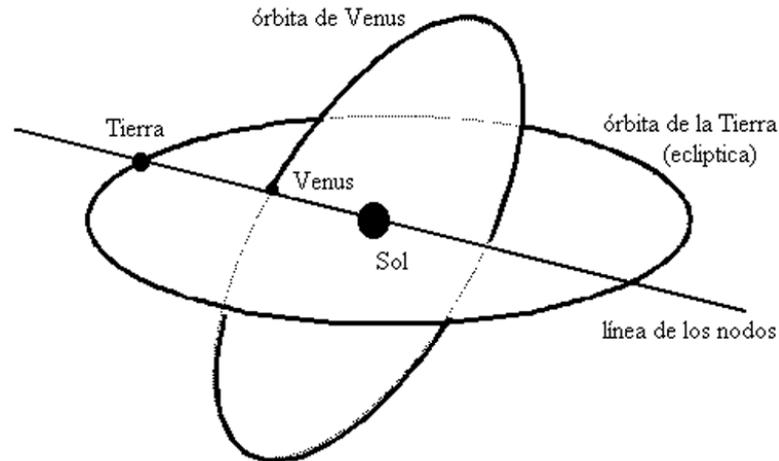


Figura 2: Las órbitas de Venus y la Tierra (la eclíptica) no son coplanarias. El ángulo entre las dos órbitas es mucho mayor en el dibujo para que sea más apreciable.

Los tránsitos de Venus ocurren cuando Venus está en una conjunción inferior con respecto al Sol, es decir cuando Venus está situado entre el Sol y la Tierra. Si el plano de la órbita de Venus en torno al Sol coincidiera exactamente con el plano de la órbita terrestre, esto es el plano de la eclíptica, habría un tránsito de Venus en cada conjunción inferior (figura 2).

Sin embargo esto no ocurre porque el plano de la órbita de Venus forma un ángulo de 3.4° con el plano de la eclíptica. La latitud respecto a la eclíptica de Venus debe ser necesariamente menor que la mitad del diámetro aparente del Sol, esto es menos de 16 minutos de arco, para que el observador pueda ser capaz de ver a Venus cruzando por delante del disco solar. Así pues Venus debe estar muy próximo al nodo de su órbita, es decir al punto de intersección de su órbita con la eclíptica (figura 2). Como consecuencia de todas estas condiciones un tránsito ocurre aproximadamente cada 120 años y en un par de ocasiones separadas por 8 años.

7 diciembre 1631	4 diciembre 1639
6 junio 1761	3 junio 1769
9 diciembre 1874	6 diciembre 1882
8 junio 2004	6 junio 2012

Tabla 1: Fechas de los tránsitos de Venus desde el siglo XVII



Figura 3: *William Crabtree mirando el tránsito del 4 de diciembre de 1639 en Manchester. Según el mismo confesó, fue tal su emoción al presenciar el acontecimiento que no tomó ningún tipo de dato de observación. Pintura de Eyre Crowe, Wlater Art Gallery, Liverpool.*

Hay que destacar los tránsitos de 1761 y 1769 porque marcaron un hito dentro de la cooperación científica europea con el fin de determinar por primera vez con precisión (la propia de la época) la distancia de la Tierra al Sol: la unidad astronómica de distancia.

3 LA CAMPAÑA DE OBSERVACIÓN DE 1769

Jeremiah Harrocks fue la primera persona que vio y tomó datos de observación de un tránsito de Venus el 4 de diciembre de 1639 (figura 3). Harrocks consideró la posibilidad de usar el tránsito para calcular la distancia de la Tierra al Sol, pero fue Edmund Halley quien lanzó las campañas de observación de los tránsitos de Venus de los años 1761 y 1769. Fue un buen ejemplo de las primeras campañas de colaboración científica llevadas a cabo por los científicos europeos. Fueron apostados centenares de observadores en diferentes lugares con la intención de asegurar su éxito y, además, que algunas observaciones se pudieran hacer con buenas condiciones atmosféricas. Para reducir los errores se situaron en lugares cuyas latitudes fueran lo más distantes posible. En el siglo XVIII los viajes a lugares distantes representaban un riesgo cierto, ya que debían enfrentarse a muchos peligros a los que también se sumó en el caso del Océano Índico la guerra entre franceses e ingleses. Lo cierto es que muchos de los científicos murieron en el empeño o, por diferentes circunstancias, no pudieron obtener las preciadas observaciones.

Hay que mencionar que en 1761 se coordinaron más de 130 expediciones diferentes por todo el globo. En 1769, hubo observadores en Madras, en Santo Domingo, en California, en la Bahía de Hudson, en Tahití, en Laponia, en la península de Kola y en Siberia. En total hubo 151 observadores en 77

Observations de la durée du passage de Venus en 1769.

Noms des Lieux.	Observateurs.	ENTRÉE DE VENUS.		SORTIE DE VENUS.	
		Premier contact.	Second contact.	Premier contact.	Second contact.
	Messieurs.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.	H. M. S.
Wardhus, dans la Mer Glaciale Kala.	R. P. Hiell.	. . .	9 14 10,6	11 27 35,6	11 41 47,4
	R. P. Sainovier.	. . .	9 34 2,4	15 27 36,6	11 41 41
	Borgrewing.	9 16 10	9 34 32,4	23 17 22,0	25 45 32,4
Fort du Prince de Galles, dans la baie d'Hudson.	Rumowick.	. . .	9 42 2	11 35 22	
Cajanebourg. Ste. Anne en Californie.	Dymand.	0 37 0,4	1 35 33,1	7 0 42,1	7 19 10,1
	Wallis.	0 37 7,6	1 35 21,1	7 0 35,5	7 29 8,2
San-Joséph en Californie.	Pianman.	. . .	9 20 45 1/2		11 31 27
	Velasque.	11 35 43	0 14 10	5 33 34	6 55 39
Île du Roi Georges, ou de Vais, dans la Mer du Sud.	Chappe.	11 35 17	0 17 16,9	5 14 10,3	6 13 19,2
	Doz.	11 33 24	0 17 31	5 31 47,1	6 11 41
	Medina.	11 39 14	0 17 30	5 34 42,3	6 22 46
	Green.	9 25 40	9 43 51 1/2	11 14 3	11 31 14
	Cook.	9 25 43	9 44 15	11 14 13	11 32 2
	Solander.		9 44 2 1/2		11 32 25

Figura 4: *Tiempos de observación del Tránsito de Venus en 1769*

localizaciones diferentes. Diversos percances dramáticos se sucedieron y los resultados no siempre respondieron a la expectación despertada. Los astrónomos españoles participaron en varias campañas. Según las referencias del Observatorio de Paris están documentadas seis expediciones españolas. En la tabla que recoge los datos de observacion de 1769 (figura 4) publicada por “A Hystory of Astronomy” de A. Pannekoek figuran los tiempos de observación obtenidos por Velasques en Santa Ana, en California al oeste de la costa de Méjico, y los conseguidos, también en California, por Vicente de Doz y Salvador de Medina en la misión española de San José del Cabo, que hoy todavía existe.

En la última sección de este trabajo se utilizaran algunos de los valores que figuran en la tabla de la figura 4. En particular se consideraran las observaciones obtenidas en Vardö (Laponia) y Papeete (Tahití) por ser dos de los lugares mas alejados de los que se dispone de datos. Ambas expediciones fueron organizadas por científicos ingleses. La primera de ellas estaba formada por el astrónomo danés C. Horrebow y el joven botánico Borgrewing, que se dirigieron a Vardö, un pequeño islote en el norte de la península escandinava. El otro equipo fue a los Mares de Sur a observar el tránsito en Tahití; unas islas descubiertas unos años antes. Estas observaciones fueron realizadas por

Chales Green y un lugarteniente llamado James Cook, desconocido por aquel entonces. La expedición sufrió numerosas víctimas durante el viaje.

4 ¿QUÉ HAY QUE SABER DE ASTRONOMÍA?

El paralaje es utilizado para medir distancias. Al observar el paso de Venus delante del disco solar se pueden obtener los paralajes de Venus y del Sol y calcular la distancia de la Tierra al Sol. Para ello basta observar el tránsito desde dos lugares suficientemente alejados de la superficie terrestre y tomando los tiempos de tránsito de ambos se deducen los mencionados paralajes y finalmente la distancia Tierra-Sol.

Para entender este método de medir distancias es necesario en primer lugar introducir el concepto de paralaje y hacer notar que dicho ángulo disminuye al aumentar la distancia. Es bueno también llevar a cabo alguna experiencia que permita entender mejor esa relación.

Como no es usual disponer, en un centro de enseñanza, de un teodolito para medir ángulos, se propone construir un sencillo cuadrante (figura 5) que permita medirlos.

4.1 EL CONCEPTO DE PARALAJE

4.1.1 CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRANTE

Materiales necesarios: un semicírculo graduado (realmente con 90° es suficiente, pero éstos no se comercializan), una paja de tomar refrescos, cinta adhesiva, 20 cm de hilo (de pescar o que sea resistente) y un plomo de pescar.

Proceso a seguir: Primero se pega la paja al semicírculo (por la parte recta del mismo) con la cinta adhesiva (figura 5). Se introduce un extremo del hilo por el agujero origen de los ángulos (hay semicírculos que ya llevan hecho este agujero, si no lo tiene se puede perforar). Finalmente sujetamos el plomo al otro extremo del hilo.

Nota: para dar más solidez al conjunto se puede fijar con cinta adhesiva una regla de 20 cm a la paja y el semicírculo.

Es posible construir el cuadrante siguiendo este esquema en madera, tal como se puede ver en la fotografía 6.

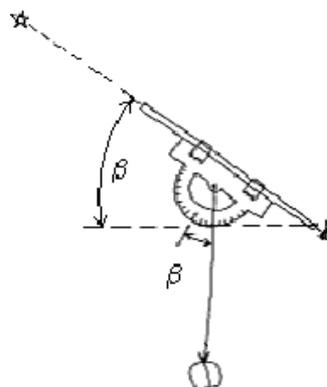


Figura 5: Cuadrante fácilmente construible



Figura 6: *Cuadrante de madera*

4.1.2 EXPERIENCIA 1

Podemos comprobar que la distancia a que se encuentra un objeto y el ángulo bajo el que lo observamos están relacionados.

Comenzaremos fijando un palo (2 ó 2.5 m de largo) perpendicularmente al suelo del patio. En lugar del palo también podemos dibujar una línea en la pared del patio. Pintamos dos puntos A y B sobre el palo o la línea, de acuerdo con la figura 7. Para simplificar el contenido matemático es bueno pintar el punto B a una distancia del suelo que coincida aproximadamente con la altura de los alumnos que van a realizar la experiencia. A continuación dibujamos el punto A a un metro o metro y medio por encima del punto B . La distancia AB es conocida por los alumnos. Los alumnos deben observar con el cuadrante el ángulo β desde un punto C convenientemente alejado. Éstos comprueban fácilmente que a medida que la distancia r aumenta, el ángulo β va disminuyendo. Resumiendo el ángulo, el paralaje, es menor cuanto más alejado está el objeto de nosotros. Precisamente éste es uno de los problemas que aparecen al considerar distancias en el sistema solar; que los ángulos que hay que medir son muy pequeños.

Si los estudiantes conocen la definición de tangente, la apreciación anterior se puede cuantificar. La distancia AB sobre el palo es bien conocida y el ángulo β lo han medido usando el cuadrante, entonces por definición,

$$r = \frac{AB}{\tan \beta} \quad (1)$$

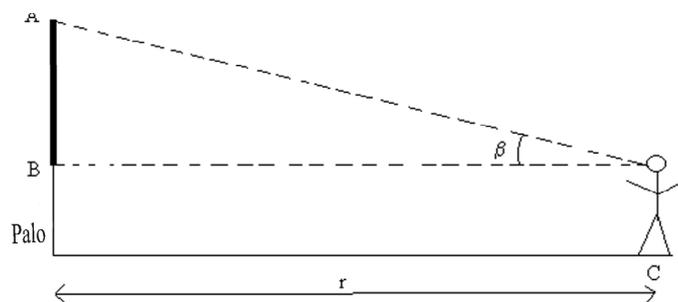


Figura 7: Si aumenta la distancia r el ángulo β disminuye

En el caso que los ángulos sean muy pequeños, se puede sustituir la tangente por el mismo ángulo expresado en radianes y la expresión que aparece es muy similar a la definición de paralaje horizontal.

4.1.3 DEFINICIÓN DE PARALAJE HORIZONTAL

Por definición, el paralaje del Sol es el ángulo β que se muestra en la figura 8. Aplicando la definición de tangente, $\tan \beta = R/r$, pero como el ángulo es muy pequeño, la tangente puede ser aproximada por el propio ángulo en radianes.

$$r = \frac{R}{\beta} \quad (2)$$

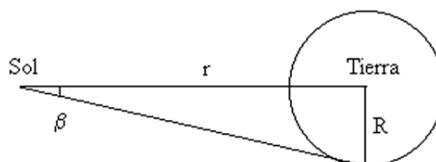


Figura 8: β es el paralaje solar. Ángulo bajo el cual se ve R desde el Sol

donde R es el radio terrestre y r es la distancia Tierra-Sol que se puede calcular usando esta definición.

Para introducir el concepto de paralaje es conveniente realizar la experiencia 1. En esta actividad el estudiante, el observador, está situado en el vértice del ángulo β . Si comparamos la experiencia con la definición, el estudiante debería estar situado en el Sol. Por supuesto, las observaciones que se realizan del tránsito de Venus no se dan en estas circunstancias. Los observadores estarán situados en diferentes puntos de la superficie terrestre y estarán mirando desde la Tierra el Sol. La situación de cada uno de los observadores será más análoga a la de cada uno de los “ojos” en la experiencia 2 que se propone a continuación.



Figura 9: *Al aumentar la distancia a que se encuentra el dedo, éste se ve en distinto lugar respecto al fondo distante*

4.2 OBSERVACIONES DEL PARALAJE

4.2.1 EXPERIENCIA 2

Se puede comprobar que el paralaje decrece con la distancia considerando el fondo de referencia.

Cuando al extender el brazo ante uno mismo miras tu índice sólo con el ojo izquierdo, y después sólo con el ojo derecho, tu dedo se ve en distinto lugar respecto al fondo distante. Éste fenómeno es el paralaje, es el mismo que crea el relieve en nuestro cerebro cuando usa las diferentes imágenes procedentes de ambos ojos.

Se acerca el dedo hacia la nariz y miramos hacia un objeto cercano, alternativamente con sólo un ojo o el otro, y se observan las dos posiciones respecto al fondo. Seguidamente alejamos el dedo de la nariz, extendiendo el brazo al máximo, y miramos de nuevo, primero con un sólo ojo, y después con el otro. En este último caso, el ángulo de variación de las dos posiciones del dedo es menor. En consecuencia se observa que se verifica que: “al aumentar la distancia a que se encuentra el dedo, el ángulo de paralaje decrece”. Se ha tomado como referencia se esta observación los objetos de la habitación (figura 9).

4.2.2 OBSERVACIONES DESDE LA TIERRA

Consideremos dos observadores situados en lugares A y B del mismo meridiano terrestre (para simplificar la geometría del problema), pero con distintas latitudes. Venus se ve como un punto (o pequeño disco) sobre el disco solar

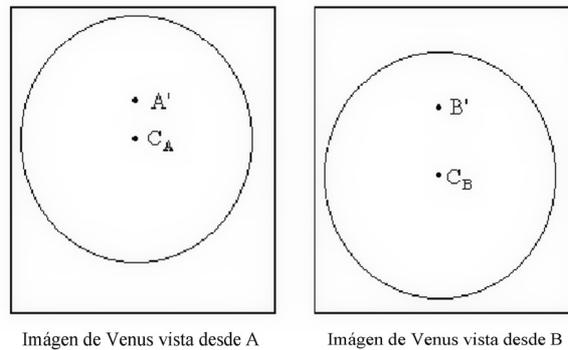


Figura 10: Las dos observaciones realizadas por separado desde A y B

(figura 1) en dos posiciones diferentes A' y B' , debido a que la visual desde A y B hacia Venus no son idénticas.

Si comparamos las dos observaciones conjuntamente (figura 10) es posible medir el desplazamiento, el paralaje. Al superponer ambas imágenes (figura 11) la distancia $A'B'$ corresponde a la distancia entre las dos posiciones de Venus observadas simultáneamente desde A y B .

Si se observa el movimiento de Venus durante el tránsito completo, se puede dibujar la línea de sus posiciones durante toda la observación (figura 13). Si observamos desde los puntos A y B se obtienen dos líneas paralelas (figura 12), una para cada lugar. La distancia entre ambas líneas es el desplazamiento del paralaje $\Delta\beta$, y que en cada instante corresponde a la distancia $A'B'$.

4.3 ¿POR QUÉ EL TRÁNSITO DE VENUS SIRVE PARA DETERMINAR LA DISTANCIA TIERRA-SOL?

La observación del tiempo que invierte Venus para cruzar el disco solar, permite deducir el paralaje del Sol, como la distancia entre los dos lugares de observación, AB , es conocida, se puede deducir la distancia r_e de la Tierra al Sol usando la definición de paralaje (2)

$$r_e = \frac{AB}{\beta_s} \quad (3)$$

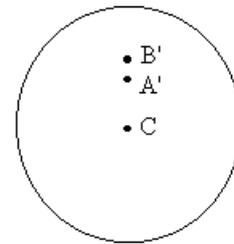


Figura 11: Las dos observaciones superpuestas

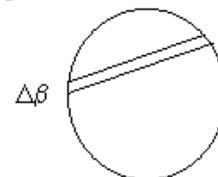


Figura 12: $\Delta\beta$, distancia entre las dos trayectorias observadas de Venus desde A y B respectivamente

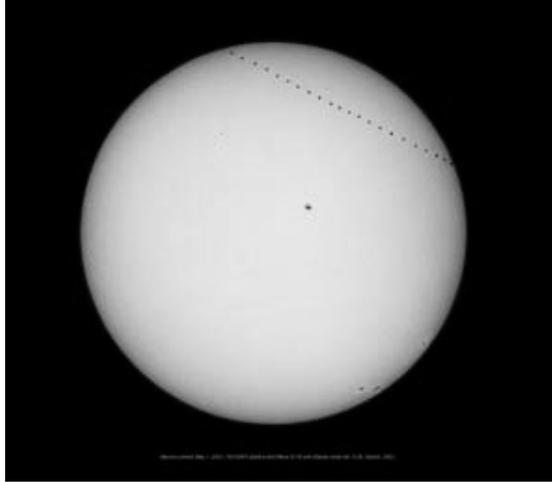


Figura 13: Observaciones del transito de Mercurio del 2003

5 EL PROBLEMA GEOMÉTRICO

Consideremos el plano definido por los tres puntos: O el centro de la Tierra, C el centro del Sol y V el centro de Venus. Consideramos los observadores en este mismo plano sobre un meridiano común: el de los puntos A y B de acuerdo con las hipótesis iniciales formuladas (figura 14).

Los triángulos APV y BPC tienen iguales los ángulos externos en P , en consecuencia como la suma de los ángulos de un triángulo debe ser 180° , se cumple,

$$\beta_v + \beta_1 = \beta_s + \beta_2 \quad (4)$$

Se introduce el ángulo $\Delta\beta$ que mide la distancia entre las diferentes posiciones de la trayectoria de Venus sobre el diámetro solar (en cada instante equivale a $A'B'$).

$$\beta_v - \beta_s = \beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta \quad (5)$$

Se reordena la última ecuación (5),

$$\Delta\beta = \beta_s \left(\frac{\beta_v}{\beta_s} - 1 \right) \quad (6)$$

Según (3), el paralaje de Venus es $\beta_v = AB/(r_e - r_v)$ y el paralaje solar es $\beta_s = AB/r_e$, por lo tanto el cociente $\beta_v/\beta_s = r_e/(r_e - r_v)$ substituido en la

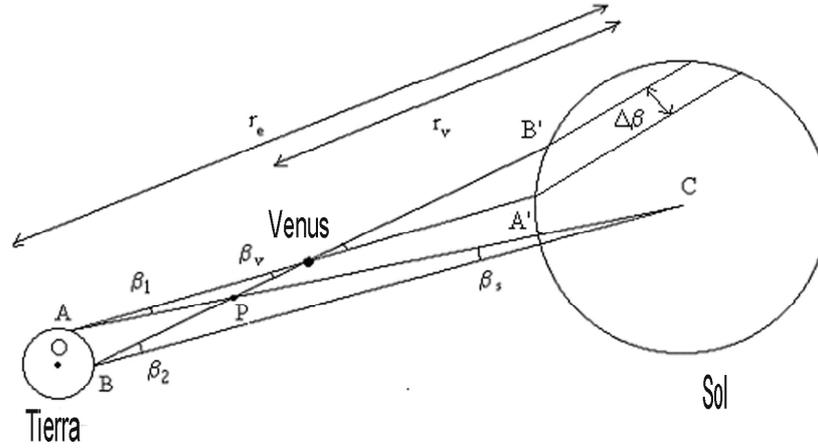


Figura 14: Posición relativa de Venus, el Sol y los observadores terrestres, donde β_s y β_v son los paralajes del Sol y Venus respectivamente. El ángulo entre A' y B' es $\beta_2 - \beta_1 = \Delta\beta$

ecuación anterior (6) da lugar a,

$$\Delta\beta = \beta_s \left(\frac{r_e}{r_e - r_v} - 1 \right) = \beta_s \frac{r_v}{r_e - r_v} \quad (7)$$

En particular el paralaje solar β_s queda de la forma,

$$\beta_s = \Delta\beta \left(\frac{r_e}{r_v} - 1 \right) \quad (8)$$

donde $\Delta\beta$ es la distancia entre las dos líneas de la trayectoria de Venus vista desde las distintos puntos de observación.

Para calcular la razón r_v/r_e se puede considerar la tercera ley de Kepler. Así el cubo del mencionado cociente debe ser proporcional al cuadrado del cociente de los periodos de revolución. Como el periodo de revolución de Venus y de la Tierra son conocidos, 224.7 y 365.25 días respectivamente,

$$(r_e/r_v)^3 = (365.25/224.7)^2 \quad (9)$$

por lo tanto,

$$r_e/r_v = 1.38248 \quad (10)$$

Este valor es substituido en la fórmula (8). El paralaje solar verifica,

$$\beta_s = 0.38248 \Delta\beta \quad (11)$$

Finalmente usando (3), la distancia de la Tierra al Sol r_e es,

$$r_e = \frac{AB}{\beta_s} \tag{12}$$

En consecuencia basta hallar la distancia AB a partir de la localización de los observadores y medir $\Delta\beta$ a partir de las observaciones del tránsito.

6 DATOS DE OBSERVACIÓN NECESARIOS

6.1 DISTANCIA ENTRE LOS PUNTOS A Y B

En las hipótesis consideradas en que los dos lugares de observación están sobre el mismo meridiano, la distancia AB se puede deducir a partir de las latitudes de los dos lugares de observación (figura 15). En el diagrama, φ_1 y φ_2 son las latitudes de los puntos A y B , y R es el radio de la Tierra. En el triángulo rectángulo que divide el triángulo isósceles RAB se deduce,

$$\sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) = \frac{AB/2}{R} \tag{13}$$

En consecuencia la distancia AB verifica,

$$AB = 2R \sin\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \tag{14}$$

Si los dos lugares de observación están situados en el mismo hemisferio, el ángulo a considerar es $(\varphi_1 - \varphi_2)/2$. Es evidente que si A y B no están sobre el mismo meridiano el problema se complica mucho mas, por este motivo en su momento cuando se llevo a cabo la primera determinación de la distancia Tierra-Sol, se seleccionaron lugares de observación con igual longitud para poder efectuar los cálculos de la forma más simplificada posible.

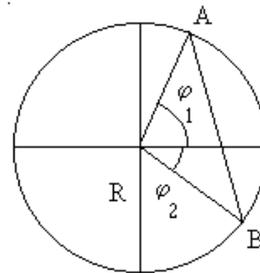


Figura 15: La distancia entre A y B calculada a partir de sus latitudes

6.2 DISTANCIA $\Delta\beta$ ENTRE LAS DOS TRAYECTORIAS OBSERVADAS

Para calcular $\Delta\beta$ es necesario disponer de los datos de observación desde sendos lugares A y B del mismo meridiano. En este caso usaremos el dibujo realizado en el siglo XVIII de la trayectoria de Venus desde las diferentes localizaciones, todas sobre el mismo meridiano, cuando la sombra del planeta cruzó el disco solar. A continuación ofrecemos tres métodos diferentes para determinar $\Delta\beta$.

6.2.1 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DIRECTA

Medimos D , el diámetro del Sol y la distancia entre las dos trayectorias de Venus $\Delta\beta$ (figura 12) y que consideramos equivale a $A'B'$ sobre la figura 16. El diámetro angular del Sol es de $30'$ (minutos de arco). Por una simple proporción, la distancia entre las observaciones de Venus en diámetros solares es,

$$\frac{\Delta\beta}{30} = \frac{A'B'}{D} \quad (15)$$

donde hay que expresar el diámetro angular del Sol en radianes,

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{360} \frac{A'B'}{D} \quad (16)$$

6.2.2 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DE LAS CUERDAS

La distancia $\Delta\beta$ entre las dos trayectorias, o bien $A'B'$, es difícil de medir porque las dos líneas están siempre muy próximas entre sí en comparación con el diámetro del Sol. Por ese motivo se va a reemplazar tomar la medida de $A'B'$ (figura 16) por la medida de las cuerdas A_1A_2 y B_1B_2 . Usando el teorema de Pitágoras, se deduce

$$B'S = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - B_1B_2^2} \quad (17)$$

$$A'S = \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - A_1A_2^2} \quad (18)$$

Para calcular $A'B'$ basta obtener la diferencia $B'S - A'S$

$$A'B' = \frac{1}{2} \left(\sqrt{D^2 - B_1B_2^2} - \sqrt{D^2 - A_1A_2^2} \right) \quad (19)$$

Dividiendo por el diámetro D ,

$$\frac{A'B'}{D} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - (B_1B_2/D)^2} - \sqrt{1 - (A_1A_2/D)^2} \right) \quad (20)$$

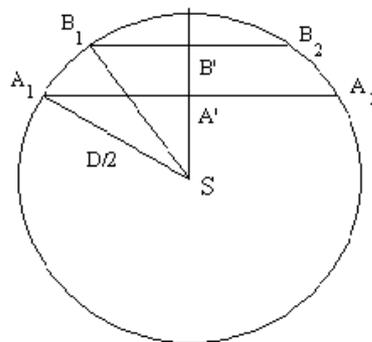


Figura 16: $\Delta\beta$, distancia entre las dos trayectorias observadas de Venus equivale a $A'B'$

6.2.3 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DE LOS TIEMPOS DE TRÁNSITO

Es muy difícil tomar medidas sobre un dibujo. Suponemos que el movimiento aparente tiene lugar a velocidad constante y que es la misma para todos los observadores. Esto es que la velocidad depende sólo del movimiento relativo de Venus y la Tierra en torno al Sol y de la rotación de la Tierra sobre su eje. En estas condiciones, podemos reemplazar las medidas de distancias por la medida de la longitud del tiempo del tránsito.

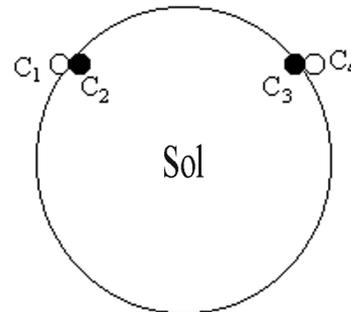
Si t_A y t_B son las duraciones de los tránsitos A_1A_2 y B_1B_2 , e introducimos t_o como la hipotética duración del tránsito a lo largo de un diámetro del disco solar, se puede establecer una proporción,

$$\frac{A_1A_2}{t_A} = \frac{B_1B_2}{t_B} = \frac{D}{t_o} \tag{21}$$

Entonces introduciendo además la relación en tiempos t'/t_o correspondiente a $A'B'/D$ en la fórmula (20) queda,

$$\frac{t'}{t_o} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - (t_B/t_o)^2} - \sqrt{1 - (t_A/t_o)^2} \right) \tag{22}$$

Hay que ser cuidadoso al usar los tiempos de observación (figura 17). Cabe destacar que hay tiempos externos (C_1 y C_4) e internos (C_2 y C_3) de observación del contacto de Venus con el borde solar. Sólo los contactos internos están bien determinados, por este motivo se consideraran sólo éstos.



7 RESULTADOS CONSEGUIDOS USANDO LAS OBSERVACIONES DE 1769

Los datos que a continuación se utilizan corresponden a los resultados de la expedición de 1769. El dibujo y la tabla que resumen estas observaciones fueron publicados en "A History of Astronomy" de A. Pannekoek. En particular se van a considerar los valores obtenidos en Vardö (línea 3) y Papeete (línea 1) para hacer los cálculos. Midiendo $\Delta\beta$ ó, A_1A_2 , B_1B_2 y D de la figura 18 o, usando los tiempos de la tabla de la figura 4.

Figura 17: Los tiempos mas precisos son los contactos interiores C_2 y C_3 . Por ese motivo serán los considerados en los cálculos

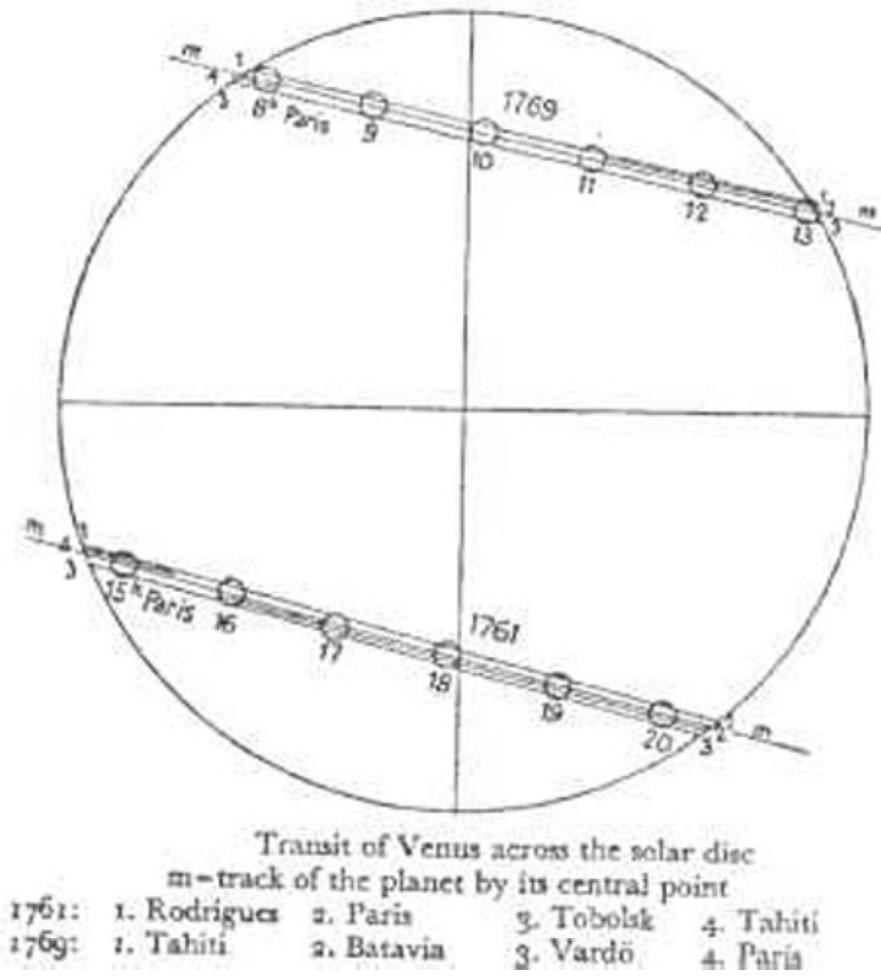
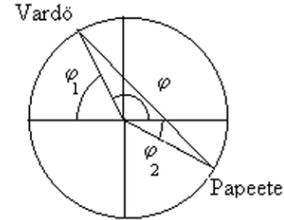


Figura 18: Trayectorias de Venus observadas en 1761 y 1769 desde diversos lugares de observación

7.1 DISTANCIA ENTRE LOS OBSERVADORES SITUADOS EN A Y B

Vardö (Laponia) y Papeete (Tahití) están sobre el mismo meridiano (figura 19) y sus latitudes respectivas son $70^{\circ}21'N$ y $17^{\circ}32'S$. Hay que mencionar que cuando se realizó la observación del tránsito en Vardö se observaba el sol de medianoche. De acuerdo con la posición de ambas ciudades el ángulo entre ambas a considerar φ es,



$$\varphi = (90 - \varphi_1) + 90 + \varphi_2 = 127^{\circ}11' \quad (23)$$

Figura 19: Vardö y Papeete sobre el mismo meridiano

y usando el radio terrestre $R = 6300 \text{ km}$, se calcula

$$AB = 2R \sin(\varphi/2) = 11425 \text{ km} \quad (24)$$

7.2 DISTANCIA $\Delta\beta$ ENTRE LAS DOS TRAYECTORIAS OBSERVADAS DE VENUS

7.2.1 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DIRECTA

Midiendo directamente la distancia entre las líneas 1 y 3, se obtiene $A'B' = 1.5 \text{ mm}$ siendo el diámetro solar $D = 70 \text{ mm}$. Por lo tanto, usando (16)

$$\Delta\beta = 0.00019 \text{ radians} \quad (25)$$

7.2.2 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DE LAS CUERDAS

Midiendo A_1A_2 , B_1B_2 y D sobre la figura 18, se obtiene $A_1A_2 = 52 \text{ mm}$ (línea 1), $B_1B_2 = 49 \text{ mm}$ (línea 3) y $D = 70 \text{ mm}$, entonces usando (20)

$$\frac{A'B'}{D} = \frac{\sqrt{1 - (49/70)^2} - \sqrt{1 - (52/70)^2}}{2} = 0.02235 \quad (26)$$

de donde $\Delta\beta$ viene dado por (16)

$$\Delta\beta = \frac{31\pi}{360} 0.02235 = 0.00020 \text{ radians} \quad (27)$$

7.2.3 CÁLCULO DE $\Delta\beta$ POR MEDIDA DE LOS TIEMPOS DE TRÁNSITO

Los tiempos de contacto de Venus que usaremos para determinar las duraciones del tránsito t_A y t_B corresponden a los contactos interiores C_2 y C_3 (figura 17) para Vardö y Tahití.

Para Vardö (Laponia), la localización A con los datos de observación obtenidos por Borgrewing (figura 4), se deduce,

$$t_A = 15h \ 27m \ 28.6s - 9h \ 34m \ 32.6s = 21176s \quad (28)$$

Para Papeete (Tahití), localización B con observaciones realizadas por Cook, se deduce,

$$t_B = 15h \ 14m \ 11s - 9h \ 44m \ 15s = 19796s \quad (29)$$

Substituyendo estos valores en la relación (21) junto las medidas realizadas sobre la figura 18, se puede deducir t_o . De hecho se pueden considerar dos posibilidades, según se utilicen las observaciones de Borgrewing o de Cook. Dado que las primeras parecen más precisas, se usan éstas, así pues,

$$\frac{49}{19796} = \frac{70}{t_o} \quad (30)$$

obteniéndose $t_o=28506$ s, valor que introducido en (22)

$$\frac{t'}{t_o} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{1 - (19796/28506)^2} - \sqrt{1 - (21176/28506)^2} \right) = 0.02505 \quad (31)$$

entonces $\Delta\beta$ viene dado por,

$$\Delta\beta = \frac{\pi}{360} 0.02505 = 0.00027 \text{ radianes} \quad (32)$$

7.3 CÁLCULO DE LA DISTANCIA r_e TIERRA-SOL (UNIDAD ASTRONÓMICA DE DISTANCIA)

Usando las fórmulas deducidas para la distancia $re = AB/\beta_s$ y para el paralaje solar (8 y 11) se deduce,

$$r_e = \frac{AB}{0.38248 \ \Delta\beta} \quad (33)$$

Introduciendo $\Delta\beta$ los datos obtenidos en 1769 y que la distancia $AB = 11425$ km se obtienen los tres valores diferentes de r_e que figuran en la tabla siguiente,

método de medida	$\Delta\beta$	r_e en $10^6 km$
directa	0.00019	157
por cuerdas	0.00020	149
por tiempos	0.00027	144

Tabla 2: Resultados obtenidos de la distancia Tierra-Sol, unidad astronómica de distancia, según los tres métodos descritos.

Se puede observar que los resultados obtenidos son razonables si se tienen en cuenta los métodos empleados. La distancia Tierra-Sol se toma actualmente como $149.6 \cdot 10^6 km$, definición de unidad astronómica de distancia. Hay que mencionar que el segundo resultado obtenido en la tabla 2, usando el método de las cuerdas, introduce menos errores de medición que el método inicial porque se consigue más precisión midiendo las cuerdas, que si se mide $\Delta\beta$ de forma directa. El método final, en que se han considerado los tiempos, tiene interés porque permite establecer una más clara analogía con los métodos actualmente utilizados, pero introduce más errores al tener que hacer una hipótesis suplementaria el suponer la velocidad del movimiento de Venus constante sobre la superficie solar durante todo el tránsito.

8 OBSERVACIONES QUE SE PUEDEN REALIZAR EN 2004 Y CONCLUSIONES

El ejercicio de cálculo propuesto en este artículo se podría repetir de nuevo utilizando los tiempos de observación del tránsito que tendrá lugar el próximo mes de Junio. Está claro que hay que contar con la colaboración de un observador situado sobre nuestro mismo meridiano, para que el desarrollo matemático sea más sencillo, y cuya latitud difiera mucho de la nuestra, para reducir al máximo los errores. Es evidente que no es fácil para una escuela encontrar otra situada sobre el mismo meridiano y suficientemente alejada para realizar las observaciones. Por ese motivo queremos hacer desde estas páginas otro tipo de propuesta. El método de trabajo que aquí se ha desarrollado evidentemente no es el que actualmente es utilizado por los astrónomos profesionales. En este último los contenidos matemáticos que se utilizan son mucho más complejos y no se consideraran las simplificaciones antes efectuadas; de forma y aplicando técnicas adecuadas se reducen los márgenes de error.

Si se recurre a todas las ventajas que supone seguir lo que a continuación se sugiere no es necesario buscar un partener de un lugar muy alejado sobre el mismo meridiano, sino que atendiendo a estas facilidades se pueden conseguir buenos resultados con mucho menos esfuerzo del que realizaron los científicos de siglo XVIII.

La Unión Europea esta financiando un proyecto relativo al Tránsito de Venus. Los organizadores: *European Southern Observatory* (ESO), *European*

Association for Astronomy Education (EAAE), *Observatoire de Paris*, *Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides* (IMCCE) y *Academy of Science of the Czech Republic* proponen realizar la observación del Tránsito de Venus desde las escuelas de toda Europa. Los participantes deben introducir los tiempos de observación C_1, C_2, C_3 y C_4 (figura 17) en la página web del proyecto y el *Institut de Mécanique Céleste et de Calcul des Ephémérides* realizará los cálculos para conseguir obtener de nuevo la distancia Tierra-Sol, es decir la unidad astronómica de distancia. De esta forma se quiere hacer un homenaje a los pioneros del siglo XVII e involucrar en un proyecto común a escolares y profesores de 27 países europeos. Hay que destacar que sin las observaciones de los estudiantes el proyecto no se puede llevar a cabo; por lo tanto esto debe ser un acicate para motivar la participación. Así pues, atentos y el día 8 de junio a enviar vuestras observaciones a <http://www.vt-2004.org>.

A nivel nacional se organizará también un concurso relativo al tránsito de Venus integrado dentro de “Física + Matemáticas en Acción”, proyecto organizado por la Real Sociedad Matemática Española conjuntamente con la Real Sociedad Española de Física. El objetivo de “Pilla el Tránsito de Venus” es proponer la observación de este acontecimiento. Está dirigido a grupos de alumnos de secundaria (ESO o bachillerato) bajo la tutela de un profesor. Para participar hay que elaborar un informe explicando como se ha preparado, realizado y discutido los resultados de la observación, y remitirlo en `html` a la <http://ific.uv.es/fisicaenaccion>. Los mejores trabajos se colgaran en la web, y el equipo ganador obtendrá cuatro viajes (un profesor y tres alumnos) al Instituto Astrofísico de Canarias para visitar sus instalaciones. También está prevista la edición europea de este concurso con grandes premios.

REFERENCIAS

- [1] F. BERTHOMIEU, F. DAHRINGER, M. GERBALDI, R. GAITZCH, A. PICKWICK, R.M. ROS, *How to measure the Earth-Sun distance by studying the Transit of Venus*, Proceedings of 7th EAAE International Summer School, UNIFF, Universitat Politècnica de Catalunya. Barcelona.
- [2] A. PANNEKOEK, *A History of Astronomy*, Dover Publications Inc, New York.
- [3] <http://ific.uv.es/fisicaenaccion>
- [4] <http://www.rsme.es>
- [5] <http://www.vt-2004.org>

Rosa María Ros
Dpt. Matemática Aplicada IV
Edificio C-3. Campus Norte UPC
C/ Jordi Girona 1. E-08034 Barcelona
Correo electrónico: ros@mat.upc.es