

# TESIS DOCTORAL

Un modelo de competencias  
matemáticas en un entorno  
interactivo

**Guillermina Marcos Lorenzón**



UNIVERSIDAD DE LA RIOJA



# **TESIS DOCTORAL**

Un modelo de competencias  
matemáticas en un entorno  
interactivo

**Guillermina Marcos Lorenzón**

Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones  
2009

Esta tesis doctoral, dirigida por los doctores D. Jesús Murillo Ramón y D. Josep María Fortuny Aymemí, fue leída el 8 de julio de 2008, y obtuvo la calificación de Sobresaliente Cum Laude

© Guillermina Marcos Lorenzon

Edita: Universidad de La Rioja  
Servicio de Publicaciones

ISBN 978-84-691-9562-8

Tesis Doctoral

**Un modelo de análisis de  
competencias matemáticas en un  
entorno interactivo**

*Guillermina Marcos Lorenzón*  
Departamento de Matemáticas y Computación  
Universidad de La Rioja



Directores de la tesis:  
Dr. Jesús Murillo Ramón  
Dr. Josep M<sup>a</sup> Fortuny Aymemi

Junio del 2008



# Índice general

|   |           |
|---|-----------|
| <b>1. Introducción</b>                              | <b>11</b> |
| 1.1. Interés y estado . . . . .                     | 12        |
| 1.1.1. Entornos virtuales . . . . .                 | 14        |
| 1.1.2. El aprendizaje de la Geometría. . . . .      | 19        |
| 1.1.3. Competencia comunicativa . . . . .           | 21        |
| 1.2. Objetivos . . . . .                            | 24        |
| <b>2. Marco teórico</b>                             | <b>29</b> |
| 2.1. Entorno virtual . . . . .                      | 29        |
| 2.2. El aprendizaje como actividad social . . . . . | 32        |
| 2.3. Competencia comunicativa . . . . .             | 39        |
| 2.3.1. La noción de competencia . . . . .           | 39        |
| 2.3.2. Competencia comunicativa . . . . .           | 46        |
| 2.3.3. La competencia comunicativa: . . . . .       | 52        |
| <b>3. Metodología</b>                               | <b>55</b> |
| 3.1. Arquitectura . . . . .                         | 56        |
| 3.1.1. Instrumentos y criterios EVA . . . . .       | 58        |
| 3.1.2. Instrumentos y criterios AG . . . . .        | 59        |
| 3.1.3. Instrumentos y criterios CC . . . . .        | 69        |
| 3.1.4. Criterios . . . . .                          | 77        |

|   |            |
|---|------------|
| 3.2. El “Taller de Matemáticas” y sus etapas . . . . .              | 83         |
| 3.3. Las actividades propuestas . . . . .                           | 84         |
| 3.3.1. Criterios utilizados . . . . .                               | 89         |
| 3.3.2. Instrumentos . . . . .                                       | 94         |
| 3.3.3. Segundo instrumento de análisis de las actividades . . . . . | 97         |
| 3.3.4. Tercer instrumento . . . . .                                 | 103        |
| 3.4. La población a estudiar. Tres alumnos . . . . .                | 104        |
| 3.4.1. Descripción de los alumnos analizados . . . . .              | 105        |
| <b>4. Análisis e interpretación</b>                                 | <b>109</b> |
| 4.1. Aplicación de los instrumentos . . . . .                       | 109        |
| 4.2. Evolución AG . . . . .   | 110        |
| 4.2.1. Alumno 1 (Javier): . . . . .                                 | 110        |
| 4.2.2. Alumno 2 (Blas): . . . . .                                   | 123        |
| 4.2.3. Alumno 3 (Stefan): . . . . .                                 | 137        |
| 4.3. Evolución CC . . . . .   | 149        |
| 4.3.1. Alumno 1 (Javier): . . . . .                                 | 149        |
| 4.3.2. Alumno 2 (Blas): . . . . .                                   | 164        |
| 4.3.3. Alumno 3 (Stefan): . . . . .                                 | 180        |
| 4.4. Relación CC y AG . . . . .                                     | 193        |
| <b>5. Discusión y Conclusiones</b>                                  | <b>199</b> |
| 5.1. En relación a la CC . . . . .                                  | 199        |
| 5.2. En relación a AG . . . . .                                     | 204        |
| 5.3. Las TIC y los entornos . . . . .                               | 207        |
| 5.4. Análisis de los perfiles . . . . .                             | 210        |
| 5.4.1. Evolución CC . . . . .                                       | 210        |
| 5.4.2. Evolución AG . . . . .                                       | 210        |
| 5.4.3. Relaciones entre CC y AG . . . . .                           | 213        |



---

|   |            |
|---|------------|
| <b>6. Implicaciones</b>                   | <b>217</b> |
| 6.1. El Taller de Matemáticas . . . . .   | 217        |
| 6.2. Análisis de la motivación . . . . .  | 230        |
| <b>7. Problemas abiertos</b>              | <b>233</b> |
| <b>Anexos y bibliografía</b> . . . . .    | 237        |
| <b>8. Objetivos y diversidad</b>          | <b>239</b> |
| 8.1. Objetivos para los alumnos . . . . . | 239        |
| 8.2. Atención a la diversidad. . . . .    | 240        |
| <b>9. Actividades planteadas</b>          | <b>243</b> |
| 9.1. Secuencia completa. . . . .          | 243        |
| <b>10. Aplicación instrumentos</b>        | <b>261</b> |
| 10.1. Análisis de SA1 con 1º. . . . .     | 261        |
| 10.2. Análisis de SA1 con 2º. . . . .     | 277        |
| 10.3. Análisis de SA1 con 3º . . . . .    | 287        |
| 10.4. Análisis de SA2 con 1º . . . . .    | 291        |
| 10.5. Análisis de SA2 con 2º . . . . .    | 305        |
| 10.6. Análisis de SA2 con 3º . . . . .    | 313        |
| 10.7. Análisis de AFE con 1º. . . . .     | 316        |
| 10.8. Análisis de AFE con 2º. . . . .     | 319        |
| 10.9. Análisis de AFE con 3º. . . . .     | 322        |
| <b>11. Descripciones</b>                  | <b>323</b> |
| 11.1. Descripción del Instituto . . . . . | 323        |
| 11.2. Descripción del curso . . . . .     | 324        |
| <b>12. Enunciados</b>                     | <b>327</b> |
| 12.1. Enunciados . . . . .                | 327        |

---

|   |            |
|---|------------|
| <b>13. Itinerarios</b>                      | <b>333</b> |
| <b>14. Modelo encuesta</b>                  | <b>343</b> |
| 14.1. Modelo encuesta . . . . .             | 343        |
| 14.2. Análisis de la motivación . . . . .   | 345        |
| <b>15. Procesos de resolución completos</b> | <b>355</b> |
| 15.1. Alumno 1 . . . . .                    | 355        |
| 15.1.1. Actividad AEP1 . . . . .            | 356        |
| 15.1.2. Actividad AEP2 . . . . .            | 360        |
| 15.1.3. Actividad AEP3 . . . . .            | 364        |
| 15.1.4. Actividad ACE1 . . . . .            | 369        |
| 15.1.5. Actividad ACE2 . . . . .            | 370        |
| 15.1.6. Actividad ACE3 . . . . .            | 375        |
| 15.1.7. Actividad ACE4 . . . . .            | 379        |
| 15.1.8. Actividad ACE5 . . . . .            | 383        |
| 15.1.9. Actividad ACE6 . . . . .            | 388        |
| 15.2. Alumno 2 . . . . .                    | 392        |
| 15.2.1. Actividad AEP1 . . . . .            | 393        |
| 15.2.2. Actividad AEP2 . . . . .            | 399        |
| 15.2.3. Actividad AEP3 . . . . .            | 404        |
| 15.2.4. Actividad ACE1 . . . . .            | 410        |
| 15.2.5. Actividad ACE2 . . . . .            | 412        |
| 15.2.6. Actividad ACE3 . . . . .            | 418        |
| 15.2.7. Actividad ACE4 . . . . .            | 424        |
| 15.2.8. Actividad ACE5 . . . . .            | 429        |
| 15.2.9. Actividad ACE6 . . . . .            | 436        |
| 15.3. Alumno 3 . . . . .                    | 443        |
| 15.3.1. Actividad AEP1 . . . . .            | 444        |

---

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| 15.3.2. Actividad AEP2 . . . . . | 448        |
| 15.3.3. Actividad AEP3 . . . . . | 452        |
| 15.3.4. Actividad ACE1 . . . . . | 457        |
| 15.3.5. Actividad ACE2 . . . . . | 459        |
| 15.3.6. Actividad ACE3 . . . . . | 463        |
| 15.3.7. Actividad ACE4 . . . . . | 467        |
| 15.3.8. Actividad ACE5 . . . . . | 473        |
| 15.3.9. Actividad ACE6 . . . . . | 478        |
| <b>16. Glosario</b>              | <b>485</b> |
| <b>Bibliografía</b>              | <b>487</b> |



# Índice de cuadros

|   |     |
|---|-----|
| 3.1. Uso general del ordenador . . . . .                                | 58  |
| 3.2. Uso de Cabri . . . . .   | 58  |
| 3.3. Uso general de Internet . . . . .                                  | 58  |
| 3.4. Uso del correo electrónico . . . . .                               | 59  |
| 3.5. Uso del foro electrónico . . . . .                                 | 59  |
| 3.6. Pensar y razonar . . . . .   | 60  |
| 3.7. Argumentar . . . . .   | 60  |
| 3.8. Modelar . . . . .  | 61  |
| 3.9. Plantear y resolver problemas . . . . .                            | 61  |
| 3.10. Propuestas para las fases de resolución de problemas . . . . .    | 62  |
| 3.11. Componentes e indicadores de la resolución de problemas . . . . . | 62  |
| 3.12. Capacidades de las componentes . . . . .                          | 63  |
| 3.13. Indicadores para la complejidad de las tareas . . . . .           | 65  |
| 3.14. Instrumento de análisis de la complejidad de las tareas . . . . . | 68  |
| 3.15. componentes de la coherencia . . . . .                            | 75  |
| 3.16. componentes de la cortesía y adecuación . . . . .                 | 75  |
| 3.17. componentes de la ortografía y vocabulario . . . . .              | 75  |
| 3.18. componentes de la creatividad y solución de problemas . . . . .   | 75  |
| 3.19. Intervalos para los diferentes tipos de discurso . . . . .        | 83  |
| 3.20. Indicadores para la complejidad de las tareas . . . . .           | 104 |

|  |     |
|--|-----|
| 4.1. Valores correspondientes a Javier . . . . . | 194 |
| 4.2. Valores correspondientes a Blas . . . . .   | 194 |
| 4.3. Valores correspondientes a Stefan . . . . . | 194 |
| 14.1. Notas y asistencia a clase . . . . .       | 346 |

# Capítulo 1

## Introducción

La situación actual en la que nos encontramos inmersos, la sociedad del conocimiento, plantea nuevos retos en el sistema educativo en general y en particular en el de las matemáticas de la educación obligatoria, que implican nuevos métodos de trabajo y de enseñanza, de manera que se facilite por una parte una formación integral del estudiante que le capacite para desenvolverse de forma adecuada en la sociedad de la información y por otra desarrollar las competencias necesarias y determinadas por el currículo de matemáticas correspondiente. El impacto de las TIC es de tal magnitud que hasta ha replanteado, según muchos autores, el concepto de “*formación general*” e incluso el de “*persona alfabetizada*”.

Por otra parte, la Educación Matemática plantea nuevas necesidades para este siglo; poniendo el acento en el desarrollo de ciertas competencias por parte de los alumnos.

*“La calidad de un programa de formación viene dada por la relevancia de las competencias que se propone, mientras que su eficacia responde al modo en que éstas se logran”* ([242], p. 58)

*“El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE<sup>1</sup> pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las*

---

<sup>1</sup>OCDE/PISA [Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes auspiciado por la UNESCO y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE)]. El objetivo de la evaluación internacional que hace OCDE/PISA es establecer hasta qué punto los sistemas educativos de los países participantes (42 en 2003) están preparando a sus estudiantes de 15 años para jugar un papel constructivo como ciudadanos participes en la sociedad

*competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso”*([234], pp 20–21).

Aceptar estos retos supone un cambio conceptual en la organización de las enseñanzas obligatorias para adaptarse a los modelos de formación más centrados en el aprendizaje, es decir, en los estudiantes y en su trabajo, y que les permitan “aprender a aprender”.

### 1.1. Interés y estado de la cuestión.

En este nuevo escenario educativo que ha aparecido en la llamada Sociedad de la Información con la llegada de las TIC, se genera una forma de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos colaborativos en el proceso educativo utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso formativo individual a través de una construcción social del conocimiento.

Con el objetivo básico de potenciar este tipo de aprendizaje matemático en alumnos de ESO y de construir un modelo que permita analizar los beneficios producidos, se ha diseñado, aplicado y estudiado un entorno interactivo de aprendizaje, soportado por medios informáticos y por TIC, en el que el trabajo se organiza de modo colaborativo y las formas de interacción, comunicación y aprendizaje son diferentes respecto al modelo tradicional.

El entorno de aprendizaje diseñado se ha implementado en el marco de la materia optativa “*Taller de Matemáticas*” que, destinada a alumnos de ESO del Instituto Batalla de Clav o de Logroño, se imparte desde 1999 y hasta la actualidad. Dicho ámbito, se ha constituido desde entonces en un espacio para la innovación pedagógica y la investigación- acción en Didáctica de la Matemática, produciéndose una retroalimentación entre las innovaciones producidas y las investigaciones realizadas. Algunos de los resultados obtenidos en estas investigaciones, se han presentado en diversos ámbitos, entre los que podemos citar las presentaciones -con sus correspondientes publicaciones en actas- realizadas en el Congreso Cabri- World 2001 de Montreal y en el Simposio organizado por la SEIEM en Logroño (2002); publicaciones en la Revista Contextos Educativos de la U.R. (Vol.2, 1999; Vol. 6-7, 2003-2004); ponencia invitada en la SEIEM (Valladolid, 1999), etc. Asimismo, éste ámbito de innovación pedagógica ha sido abordado en el trabajo de investigación de Martín Olarte (2002), que analiza la demostración matemática en un entorno en el que el trabajo se organiza de manera colaborativa.



En particular, en este trabajo de investigación acción, el objetivo básico es potenciar y analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos en relación con el desarrollo de determinadas competencias matemáticas, en particular relacionadas con el aprendizaje de la Geometría y con el desarrollo de la competencia comunicativa matemática, cuando la clase de Geometría se organiza utilizando soportes informáticos y un modelo de trabajo colaborativo que generan formas de interacción, comunicación y aprendizaje diferentes.

El entorno de aprendizaje construido e implementado consiste en un modelo formado básicamente por un entorno interactivo, unas actividades con una estructura determinada y una forma de organización del trabajo de manera colaborativa.

Para esta investigación, se han diseñado y aplicado los instrumentos de análisis correspondientes para estudiar, por un lado, las actividades propuestas a lo largo del proceso de aprendizaje teniendo en cuenta diferentes criterios para las mismas y, por otro lado, la evolución de los aprendizajes de los alumnos en relación a las competencias matemáticas mencionadas más arriba, con el objeto de establecer los perfiles de aprendizaje a lo largo del proceso en relación a cada una de dichas competencias y estudiar la existencia o no de interrelaciones entre los mismos.

En cuanto al estudio de la actividades propuestas, nos interesa en particular determinar las condiciones estructurales mínimas en función de las diferentes etapas del proceso; teniendo en cuenta que en cada fase las modalidades comunicativas, los conocimientos tecnológicos y geométricos de los alumnos y los objetivos propuestos son diferentes. Cabe mencionar que, previamente, se ha realizado un análisis de los antecedentes de investigación relacionados con las temáticas a investigar con el objeto de describir el interés y el estado actual de la cuestión, se ha delimitado el marco teórico, se ha definido una metodología de trabajo y se han enunciado los objetivos correspondientes.

Esta investigación centra el interés en tres cuestiones básicas relacionadas con la educación secundaria actual, en particular con la educación matemática: la incorporación de las TIC, la importancia de los procesos de comunicación y el aprendizaje de la Geometría. En el modelo diseñado y estudiado, estos tres aspectos no se presentan aisladamente sino que han sido tenidos en cuenta de manera integrada e interrelacionada tanto para el diseño del entorno de aprendizaje como para el estudio del mismo. A continuación se presentan por separado, los aspectos más relevantes que dan

cuenta del interés de cada uno de estos aspectos así como del estado actual de cada cuestión.

### 1.1.1. Entornos virtuales de aprendizaje.

Es innegable que las TIC están produciendo una revolución en nuestra sociedad actual; cambiando la configuración del espacio y del tiempo, las relaciones económicas, políticas y culturales y, fundamentalmente, los hábitos, intereses, gustos y las formas de relacionarse de las personas<sup>2</sup>.

Con la posibilidad de transportar la información en forma de imágenes y en tiempo real a todos los rincones de la tierra, la tecnología ha comprimido el espacio y el tiempo de manera tal que se transforma y acelera el ritmo del cambio en el mundo que queremos conocer y en los medios que utilizamos para conocerlo; así, todos los procesos se aceleran, se dinamizan al ritmo de la instantaneidad.

Es cierto también, que este nuevo y acelerado ritmo, amenaza la estabilidad y consistencia de nuestro conocimiento al convertirlo en más provisional, frágil y parcial. Con el amplio acceso a la información, aumentan las posibilidades de desarrollo individual y de decisiones autónomas e informadas, pero crecen también la ansiedad, la incertidumbre y la aleatoriedad y la consecuente sensación de ruido que ésta produce dificultando a veces la integración: se corre el riesgo de caer en la desinformación producida por la sobre-información.

La revolución producida por las TIC sobre la sociedad, impacta en particular sobre los sistemas educativos; definiendo por ejemplo nuevas necesidades como la de formar ciudadanos con conocimiento sobre estas nuevas tecnologías, pero asimismo con capacidad de reflexión y crítica (usuarios autónomos). Estas nuevas necesidades, conllevan un replanteamiento del concepto de formación general e incluso el de persona alfabetizada.

*Hasta ahora, una persona alfabetizada era aquella que dominada los códigos de acceso a la cultura escrita o impresa (saber leer) y que a la vez poseía las habilidades para expresarse a través del lenguaje textual (saber escribir). Sin embargo, hoy en día, este conocimiento parece insuficiente ya que sólo permite acceder a una parte de la información: a aquella que está accesible*

---

<sup>2</sup>Esta Revolución Tecnológica es comparada por los especialistas con las Revoluciones producidas en su momento por la Agricultura y la Imprenta.

*a través de los libros. Una persona analfabeta tecnológicamente queda al margen de la red comunicativa que ofertan las nuevas tecnologías... En consecuencia, una persona culta y alfabetizada en relación al acceso a la información a través de las nuevas tecnologías requiere que la misma: domine el manejo técnico de cada tecnología (conocimiento práctico del hardware y del software que emplea cada medio), posea un conjunto de conocimientos y habilidades específicos que les permitan buscar, seleccionar, analizar, comprender y recrear la enorme cantidad de información a la que se accede a través de las nuevas tecnologías desarrolle un cúmulo de valores y actitudes hacia la tecnología de modo que no se caiga ni en un posicionamiento tecnofóbico (es decir, que se las rechace sistemáticamente por considerarlas maléficas) ni en una actitud de aceptación acrítica y sumisa de las mismas.* ([11])

Ante esta nueva definición de “*persona alfabetizada*”, es imprescindible realizar replanteamientos que permitan el desarrollo de este nuevo tipo de competencias por parte de los alumnos; tomando las decisiones adecuadas sobre los medios que debemos escoger en cada momento y las formas de trabajo con dichos medios; porque unos se revelan más idóneos que otros según la actividad que se pretende llevar a cabo. Los recursos informáticos han de estar plenamente integrados en la actividad y no debe perderse de vista la totalidad del proceso formativo.

*En el interés por reconocer nuevas propuestas para el aula, se presenta siempre el desafío por generar experiencias que atraigan a los estudiantes, les permitan desarrollar actividades creativas y autónomas a la par que generen valiosas experiencias de aprendizaje en torno al conocimiento de contenidos, temas, campos disciplinarios, perspectivas de análisis. Ambos aspectos: aquel que reconoce el valor del desarrollo personal y lo que respecta al contenido, se entrelazan en las distintas experiencias de aprendizaje y llevan a generar las propuestas que retoman lo mejor de las tradiciones y algunos de los principios de la didáctica de la escuela nueva, de décadas pasadas, respecto del valor del interés y la actividad para generar conocimientos. Relacionar, comparar, establecer nexos, partir de lo dado para recuperar lo sabido, sea de un conocimiento natural o experiencial y establecer puentes*

*con el nuevo conocimiento, se constituyen en el punto de partida de cualquier propuesta didáctica. Evidentemente, el desafío de crear una propuesta de enseñanza innovadora nos remite a revisar algunas falsas opciones que se construyen respecto a metodologías novedosas pero que entrañan múltiples dificultades a la hora de plasmarlas en actividades generadoras de nuevas formas de comprensión.* ([168], p. 48)

En este proceso didáctico, las TIC, deben ser:

- un “*medio más*” a disposición del docente y del alumno (al igual que la tiza, la pizarra, los libros de textos, que se utilizan diariamente en las clases) cuya utilidad, como la de cualquier herramienta, depende de los fines del usuario, y en este caso de los que le da el docente en esta compleja tarea de transposición didáctica<sup>3</sup>, y de las condiciones del contexto de aplicación.
- un “*contenido más*” a desarrollar, enfocado a la formación de alumnos competentes en su uso reflexivo, crítico y autónomo.

Un breve análisis del proceso de incorporación de las TIC a los espacios escolares, evidencia que esta inclusión ha sido progresiva y continua en las últimas décadas; y que a lo largo de los últimos años, han ido cambiando las concepciones relativas al aprendizaje, a la relación entre TIC y educación y a las interacciones entre los polos del proceso educativo.

Así, las TIC se han ido incorporado a las aulas de distintas maneras; entre las que podemos citar la enseñanza asistida por ordenador (basada en una concepción conductista del aprendizaje), la enseñanza de la Programación (la programación como contenido en sí mismo y como asignatura separada del resto, dictada por un especialista en Programación), la Computación como profundización del trabajo lógico matemático (la computación como medio facilitador de la construcción de conceptos), y finalmente la enseñanza que apunta a la formación de usuarios en la que el acento no está

---

<sup>3</sup>El concepto de transposición didáctica formulado por Chevallard ([83], p. 45) se refiere al “*proceso complejo de transformaciones adaptativas por el cual el conocimiento erudito se constituye en conocimiento u objeto a enseñar; y éste en objeto de enseñanza (o conocimiento enseñado).*” El fenómeno de la transposición didáctica comprende las sucesivas transformaciones -rupturas, desplazamientos, distorsiones- que se producen en el conocimiento desde que es elaborado por la comunidad científica hasta su vehiculización institucionalizada como conocimiento escolar ([117]).

la cantidad de conocimientos informáticos sino en las estrategias de uso y en la adquisición de estrategias generales.

Actualmente, es necesario un modelo crítico y reflexivo; en el que se destaque, por encima del manejo de la tecnología, la capacidad de reflexión y de gestión del aprendizaje.

En relación a cuál es el espacio más apropiado para realizar tal incorporación, más allá de que existan espacios curriculares específicos para tal fin, está claro que también es necesario incorporar las TIC a través de cada espacio curricular, en particular, a través de la clase de Matemáticas.

Las TIC incluidas como parte de los recursos utilizados por el profesor, permiten promover el trabajo colaborativo entre los alumnos, fomentar el trabajo en equipo, incentivar la calidad y crecimiento personal, y preparar a la persona para los nuevos desafíos que se le van a presentar en la vida real a lo largo de su futuro personal y profesional.

Es necesaria una metodología en la que el alumno participe formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento, en el desarrollo de competencias y en suma en su propia formación, planteando preguntas, extrayendo conclusiones, realizando críticas, llevando a cabo iniciativas personales, enunciando resultados en su propio vocabulario, formulando conjeturas, realizando y compartiendo descubrimientos que le provoquen una actividad interna, resultado de la interacción entre la reflexión, la actividad externa y la información recibida.

En este sentido, la incorporación de soportes multimedia al diseño y utilización de entornos virtuales de aprendizaje, favorece la participación activa y efectiva de los alumnos, fomenta el trabajo colaborativo entre ellos, de manera que asumen parte de la responsabilidad de su aprendizaje, y desarrollan algunas de las funciones que en la enseñanza tradicional están reservadas al profesor.

Estos cambios que se plantean en la estructura y el funcionamiento de las enseñanzas, pueden ser entendidos como instrumentos necesarios para una mejora de la calidad de la enseñanza y como una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, de manera que la nueva organización de la actividad docente permita abordar con éxito los desafíos derivados de la innovación en las formas de generar y transmitir el conocimiento.

La educación europea, y la española en particular, se enfrentan en los momentos actuales a una transformación cultural y social, de manera que

los educadores deberán revisar y realizar sus funciones docentes en un nuevo espacio donde convivan la tradición y la innovación.

La incorporación de las TIC a la escuela abre gran diversidad de posibilidades pero a la vez plantea numerosos desafíos; las TIC constituyen una herramienta potente para desarrollar el pensamiento crítico de los alumnos, para favorecer las estrategias de resolución de problemas con autonomía y creatividad, y de reflexión sobre el propio aprendizaje; pero el saber aprovecharlas optimizando sus potencialidades dependerá del uso que hagamos de ellas. El entorno de aprendizaje diseñado e implementado en el marco de la asignatura optativa “*Taller de Matemáticas*” presenta un formato mixto, que denominamos “*enseñanza bimodal*,” ([267], [268] que consideramos responde a los planteamientos anteriores, potenciando un aprendizaje autónomo y significativo, con el que pretendemos facilitar la participación del alumno en su propio aprendizaje y potenciar su habilidad en el uso de TIC, respondiendo de una forma más completa a las necesidades del presente y del futuro.

Destacamos en particular, el papel que desempeña la demostración en la clase de Geometría, no sólo por ser una práctica matemática fundamental sino por ser además una herramienta fundamental para promover la comprensión matemática ([89]).

*“El fracaso de la enseñanza de la geometría proviene, al menos parcialmente, de una falta de reconocimiento de esta complejidad subyacente a la prueba: la práctica tradicional era simplemente presentar la prueba deductiva formal sin atender a su función o a cómo puede conectar con las intuiciones de los estudiantes acerca de lo que puede ser un argumento convincente. La prueba debería ser parte del proceso de resolución de problemas, logrando que los estudiantes fuesen capaces de mezclar deducción y experimentación, idear representación, trazar diagramas, moverse entre diferentes representaciones.”* ([89], p. 2)

La Geometría, ofrece grandes posibilidades para recuperar esta cultura de la argumentación, y también para analizar las dificultades que se presentan a los estudiantes cuando abordan este tipo de tarea matemática.

Asimismo, teniendo en cuenta que actualmente el interés y la motivación de los alumnos de ESO por la formación en Matemáticas es bastante bajo y que la actitud frente al aprendizaje suele carecer de la suficiente autonomía, pretendemos favorecer con esta incorporación el interés por la asignatura, y el cambio de actitud frente al aprendizaje.

### 1.1.2. El aprendizaje de la Geometría.

Hasta hace algunas décadas, la geometría escolar, se reducía a cálculos de medidas y de trigonometría; y en cuanto al enfoque metodológico, a la resolución automática de ejercicios y memorización de axiomas, definiciones, teoremas y propiedades<sup>4</sup>.

En la década de los 60, la llegada de la Matemática Moderna y su tendencia hacia el formalismo y estructuralismo, marcó el principio del fin de la Geometría Escolar. Con la Matemática Moderna, la Geometría desapareció de la Educación Primaria y Secundaria y ganaron espacio la lógica y la teoría de conjuntos.

*En el fondo, la matemática Moderna fue una propuesta nacida de la mano de matemáticos puros, y demostraron con ella una falta absoluta de sensibilidad educativa. Sí que se aprendió algo interesante: cómo no debe hacerse una reforma y quién no debe dirigirla. Las consecuencias para Primaria y Secundaria fueron altamente negativas. ([7], p. 21)<sup>5</sup>*

Aún hoy se notan las secuelas en las aulas y los currículos de estas tendencias. Más en las aulas que en los currículos, porque si bien los diseños curriculares actuales ya no tienen este enfoque, el hecho de que los profesores actuales se hayan formado en este marco, hace que posean desde una visión distorsionada de la Geometría hasta cierta inseguridad personal frente a los contenidos geométricos.

Si bien a esta etapa de “*Matemática Moderna*”, le siguió otra cuya intención fue la de recuperar la Geometría en la escuela; este proceso de reincorporación suele ser lento, y en muchos casos resistido, en especial por un profesorado formado en una corriente totalmente diferente. Quizá por esta razón, los primeros intentos de retorno de la Geometría, se produjeron a través de la Geometría Vectorial o Algebraica, dado que el álgebra brinda un marco más conocido y de mayor seguridad para la presentación de

---

<sup>4</sup>Aun así, destacamos los intentos tendientes a impulsar un enfoque diferente, a la resolución de problemas y a la reflexión, que a lo largo del siglo XX, realizaron algunos matemáticos como Julio Rey Pastor, Pedro Puig Adam y Luis Santaló, entre otros.

<sup>5</sup>Cabe destacar además, que esta matemática del formalismo, vacía de situaciones problemáticas y de cuestionamientos, sin ninguna tendencia a la reflexión, a la crítica, al intercambio y a la discusión resultó muy conveniente a los sistemas educativos de los sistemas dictatoriales, como fue el caso de las dictaduras militares del último cuarto de siglo de América Latina.

la Geometría a toda esta generación de profesores formada casi ajena a la Geometría.

Lo cierto es que actualmente, se fundamenta la importancia de la Geometría en la escuela, aludiendo a su importancia como ciencia del espacio, como método para la visualización, como punto de encuentro entre las Matemáticas como teoría y la Matemáticas como modelo, como contexto de interacción entre los procesos de inducción y deducción, de experimentación y demostración; pero principalmente, como espacio para la reflexión, la experimentación, la crítica, el intercambio y la creatividad; aspectos reconocidos, tanto en sus contenidos como en sus objetivos, por los actuales currículos europeos y en particular el español para las Matemáticas de la ESO.

Asimismo, las clases de Geometría, pueden favorecer el complejo proceso de interrelaciones entre conceptos, símbolos y objetos reales; más aún, ante una realidad educativa en la que el manejo del lenguaje se hace tan conflictivo, el trabajo desde la Geometría y su manejo simbólico permite comprender, recordar, comunicar en relación a los conceptos, construir conceptos nuevos, visualizar, traducir, clasificar, promoviendo el desarrollo de la creatividad y de la reflexión.

Se destaca además, la importancia de que esta reincorporación de la geometría al aula, contemple las necesidades, problemáticas e intereses actuales y que incorpore el trabajo con las nuevas tecnologías que se imponen en un mundo donde la comunicación y la información comienzan a entenderse a través de códigos diferentes.

Las razones anteriores, así como la diversidad de apartados de interés y de aplicaciones (robótica, modelos físicos, cristalografía, ...) que incluye la Geometría actualmente, fundamentan la importancia de dotar a los alumnos de una cultura geométrica.

*Por todo ello la educación matemática tiene la obligación (o al menos la posibilidad) de considerar como imprescindible ofrecer a los futuros ciudadanos una cierta cultura geométrica, una cultura que requiere desarrollar unas habilidades específicas, tener un vocabulario adecuado y poseer una visión global de las aplicaciones actuales y una sensibilidad por el buen razonar, por la belleza y por la utilidad. ([7], pp. 13 14)*



### 1.1.3. Competencia comunicativa y Matemáticas

En los últimos años el “*aprender a comunicarse matemáticamente*”, ha cobrado gran importancia como parte de los objetivos propuestos para el aprendizaje de las Matemáticas. La relevancia del desarrollo de la capacidad de comunicarse matemáticamente y del papel del lenguaje en el aprendizaje de las Matemáticas, se ve reflejado tanto en numerosas investigaciones de Didáctica de las Matemáticas ([97],[123],[199],[200],...), como en las orientaciones curriculares de muchos países.

En cuanto a las orientaciones curriculares, es sabido que entre los procesos planteados por los NCTM, aparece la comunicación; respecto a la que se destaca la necesidad de capacitar a todos los estudiantes para:

*Organizar y consolidar su pensamiento a través de la comunicación; comunicar su pensamiento matemático con coherencia y claridad a los compañeros, profesores y otras personas; analizar y evaluar las estrategias y el pensamiento matemático de los demás y usar el lenguaje de las matemáticas para expresar ideas matemáticas con precisión.* ([197], p. 64)

La fundamentación de esta importancia, radica en la conexión entre comunicación y pensamiento: “*A medida que los estudiantes van desarrollando una comunicación más clara y coherente (utilizando explicaciones verbales y notaciones y representaciones matemáticas apropiadas), se van convirtiendo en mejores pensadores matemáticos*” ([197], p. 354).

Los documentos curriculares del MEC también señalan, al referirse a Matemáticas como asignatura de la ESO que: *Es importante habituar a los alumnos a expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de notaciones y términos matemáticos.* Y entre los objetivos propone: “*Usar correctamente el lenguaje matemático con el fin de comunicarse de manera clara, concisa, precisa y rigurosa.*” ([184], p. 25707).

De hecho, el último decreto que establece los contenidos mínimos para la Educación Secundaria Obligatoria afirma: “*Las Matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en*

*la formulación y expresión de las ideas. Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto” ([185] pp. 751-752).*

Por su parte, el Proyecto OCDE/PISA, para evaluar el nivel de competencia matemática de los alumnos, define el dominio “*alfabetización matemática*” para referirse a “*las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando identifican, formulan y resuelven problemas matemáticos en una variedad de dominios y situaciones*” ([242], p. 16).

Entre las ocho competencias matemáticas elegidas por el proyecto PISA se encuentran: pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones y usar herramientas y recursos. Nuevamente, notamos la relevancia otorgada a los procesos relativos a la comunicación.

Como se ha mencionado antes, las conexiones entre comunicación y matemáticas, son también tema de interés de numerosas investigaciones en el área de Didáctica de las Matemáticas.

Según Nesher ([199], p. 119), citando a Sfard, “*La conversación matemática se fomenta no sólo por su propio valor sino debido a los efectos que se espera que produzca en el proceso de aprendizaje y en la calidad de conocimiento resultante [...] se cree que la conversación matemática es buena para el pensamiento matemático*”

R. Hyde ([141]) ha investigado sobre la importancia de la acción de “*describir*” en la clase de Matemáticas, concluyendo que resulta una tarea lingüística con consecuencias matemáticas, dado que, muchas veces, el conocimiento matemático en general y las habilidades lógicas y cognitivas para resolver un problema en particular, quedan condicionadas por las habilidades lingüísticas (desde un punto de vista práctico, entender un problema y no saber explicarlo es casi tanto como no entenderlo). Su trabajo se centra en la descripción de patrones geométricos por parte de los alumnos, tarea que requiere de conocimiento matemático (terminología, modelos y estructuras

geométrica, etc) y de habilidades lingüísticas (estrategias de comunicación, organización de la descripción, etc.).

El lenguaje matemático, el geométrico en particular, constituye un sistema muy complejo dado su carácter mixto; mixto en el sentido de que incluye un lenguaje natural y un lenguaje simbólico específico en permanente interacción y que a su vez también contiene registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos (figuras, diagramas, representaciones geométricas).

En la identificación de los procesos cognitivos involucrados en la resolución de problemas y en las demostraciones en Geometría, Duval ([97]) reconoce tres tipos de procesos: procesos de visualización (representaciones espaciales), procesos de construcción mediante herramientas (la construcción de configuraciones) y los procesos discursivos de razonamiento.

Duval plantea una distinción entre proceso discursivo natural (realizado en lengua natural a través de la descripción, explicación, argumentación) y proceso discursivo teórico (realizado a través de la deducción, ya sea en un registro puramente simbólico o en el registro de la lengua natural). Y se basa justamente en esta complejidad cognitiva de la Geometría para fundamentar el porqué de su enseñanza: *“Es la complejidad cognitiva subyacente la que proporciona el interés básico de la geometría (...) La geometría, más allá que otras áreas matemáticas, puede ser usada para descubrir y desarrollar diferentes formas de pensamiento. Esta debe ser una tarea esencial para la enseñanza de la geometría. Pero se requiere obtener una práctica amplia y bien balanceada de estos procesos cognitivos subyacentes”* ([97], p. 14).

Asimismo, la “especificidad del lenguaje” también aparece como una de las propiedades en el Modelo de Van Hiele; al respecto Gutiérrez y Jaime ([136], p. 53) señalan: *“cada nivel lleva asociado un tipo de lenguaje para comunicarse y un significado específico del vocabulario matemático, de forma que dos personas que utilicen lenguaje de diferentes niveles no podrán entenderse”*.

Son varios los investigadores que han estudiado en particular, las conexiones entre el discurso escrito y las matemáticas: el discurso escrito como soporte del aprendizaje matemático con alumnos ([192]), el discurso escrito y la reflexión crítica ([223],[224]), el discurso escrito y las posibilidades de reflexión en la formación del profesorado de matemáticas ([5], [189]).

Si bien, casi todas las investigaciones se centran en la producción de textos escritos en clases presenciales; es cierto que últimamente, ha cobrado importancia el discurso escrito en entornos virtuales, utilizado éste como

herramienta para las teleinteracciones con alumnos; especialmente en casos de alumnos deportistas ([109]) o en asistencia hospitalaria ([112]).

## 1.2. Objetivos de la investigación

Potenciar el aprendizaje autónomo y la iniciativa personal requiere un cambio cultural en el mundo educativo, pasando de entornos caracterizados por un “*profesor dominante*” a otros más centrados en el alumno, en los que éste asuma la responsabilidad de su propio aprendizaje.

Nos proponemos como objetivo principal de la investigación, analizar los beneficios cognitivos que se producen en nuestros alumnos en relación con la adquisición de determinadas competencias matemáticas, en particular relacionadas con el aprendizaje de la Geometría y con el desarrollo de la competencia comunicativa, cuando desarrollan trabajo colaborativo utilizando un entorno interactivo de aprendizaje soportado por medios informáticos.

En relación con la investigación, nuestros objetivos son:

- *Respecto a las actividades propuestas a los alumnos a lo largo del Taller:*
  - 1. Diseñar instrumentos e indicadores adecuados para el análisis de las actividades diseñadas.
  - 2. Aplicar los instrumentos diseñados para el análisis de las actividades.
- *Respecto a los beneficios cognitivos producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la geometría:*
  - 3. Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría.
- *Respecto a los beneficios cognitivos producidos en los alumnos en relación con el desarrollo de la Competencia Comunicativa:*
  - 4. Analizar la producción de discursos correctos como parte de la resolución de problemas geométricos.
  - 5. Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa matemática.

- *Respecto a la correlación entre el Aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la Competencia Comunicativa:*
  - 6. Analizar la existencia o no de correlación entre los progresos en el desarrollo de la competencia comunicativa y los progresos en el Aprendizaje de la Geometría.
- *Respecto a la capacidad de motivación del entorno virtual de aprendizaje utilizado:*
  - 7. Analizar la capacidad de motivación de los medios utilizados para potenciar el interés y la participación en el trabajo de los alumnos.

En el marco de esta investigación acción, la consecución de estos objetivos de investigación, lleva implícita ciertos requisitos o necesidades previas tales como:

- *A. Diseñar actividades adecuadas al medio utilizado*, a los contenidos y a los objetivos propuestos para los alumnos.
- *B. Diseñar actividades que permitan atender a la diversidad en el aula* (adaptables a cada interlocutor), y conseguir el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno.

Además, esta metodología de investigación ha supuesto el planteamiento de objetivos para los alumnos, que pueden leerse en el Anexo I.

Planteamos a continuación, ciertas categorías asociadas a algunos de los objetivos enunciados, con el objeto de la especificar aún más que pretendemos y qué entendemos con la consecución de cada uno de ellos:

1. *Objetivo 1: Diseñar instrumentos e indicadores adecuados para el análisis de las actividades diseñadas.*
2. *Objetivo 2: Aplicar los instrumentos diseñados para el análisis de las actividades.*

En este sentido, en relación con los objetivos 1 y 2, pretendemos diseñar instrumentos y determinar indicadores y criterios que nos permitan analizar dichas actividades teniendo en cuenta:

- su estructura conceptual y didáctica (conocimientos matemáticos que exigen, tiempo estimado para la resolución, posibles errores, tipo de actividad, etc.)
- las condiciones estructurales mínimas necesarias que deben cumplir en función de las características de los procesos comunicativos de cada una de las tres etapas del Taller
- la complejidad de las competencias matemáticas involucradas en su resolución

3. ***Objetivo 3: Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría.***

En este sentido, pretendemos diseñar instrumentos y determinar indicadores y criterios que nos permitan analizar los progresos producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría entendido como:

- *capacidad de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de las actividades planteadas*(capacidad para modelizar el problema; para seleccionar, adaptar y aplicar conceptos, relaciones y estrategias necesarios para resolverlo; para reflexionar y controlar el proceso de resolución y para comunicar acerca del modelo y sus resultados).
- *capacidades relacionadas con los procesos involucrados en la resolución de problemas geométricos*: procesos de visualización (representaciones espaciales), procesos de construcción mediante herramientas (la construcción de configuraciones) y los procesos discursivos de razonamiento ([97]).

4. ***Objetivo 4: Analizar la producción de discursos correctos como parte de la resolución de problemas geométricos.***

En este sentido, pretendemos diseñar instrumentos y determinar indicadores y criterios que nos permitan analizar las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos expresan ideas matemáticas utilizando el lenguaje natural como metalenguaje discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas como parte de la resolución de problemas geométricos.

5. ***Objetivo 5: Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa matemática.***

En este sentido, pretendemos diseñar instrumentos y determinar indicadores y criterios que nos permitan analizar los progresos producidos en el desarrollo de la competencia comunicativa entendida como:

- *el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo* (lingüísticos, socio lingüísticos, estratégicos y discursivos) que se ponen en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido.





## Capítulo 2

# Marco teórico

Nuestro trabajo incluye: el diseño e implementación de un entorno de aprendizaje interactivo destinado a alumnos de ESO y tendiente al desarrollo de ciertas competencias a lo largo de un “Taller de Matemáticas” en el que se abordan temáticas curriculares relativas a la Geometría para la Educación Secundaria y la investigación sobre ciertos procesos relacionados con determinados aprendizajes e interacciones que se desarrollan en el marco de dicho Taller; en particular los relativos al desarrollo de determinadas competencias por parte de los alumnos.

Para llevarlo a cabo, hemos asumido ciertos marcos y planteamientos teóricos; algunos relativos a modelos y concepciones respecto a la enseñanza y el aprendizaje; otros vinculados específicamente con la incorporación de las TIC y la utilización de medios y soportes de Geometría Dinámica –como Cabri Géomètre II–.

De esta manera, podemos decir que nuestro marco teórico general ha sido construido a partir de diferentes aportes; algunos provenientes de amplias teorías, otros de planteamientos más específicos.

### 2.1. Concepto de Entorno Virtual de Aprendizaje

En esta sección, planteamos algunas cuestiones relativas a la incorporación de las TIC a los ámbitos educativos y a la noción de “entornos virtuales de aprendizaje”(EVA); principalmente porque en la actualidad presentan una amplia gama de definiciones y pretendemos dejar claro como se interpretan dichos conceptos en el marco de nuestra investigación y cuál es la

manera en que creemos que debe realizarse su incorporación a los sistemas de enseñanza y aprendizaje.

Según Alsina ([8], p. 105):

*Entendemos por entornos de aprendizaje una estructura o espacio educativo cuyos objetos son situaciones para trabajar matemáticamente, tanto el profesorado como el alumnado y cuyas transformaciones son interacciones que operan sobre las situaciones, activando distintas tipologías de actividades de aprendizajes, usando conocimientos pedagógicos a medida, implementando orientaciones tutoriales y desarrollando procesos de creativos. En un sentido metafórico, los entornos de aprendizaje pueden considerarse como medio para reproducir en la clase de Matemáticas una comunidad intelectual y profesional de trabajadores de Matemáticas.*

En el marco de nuestra investigación:

*Entendemos por entorno de aprendizaje un espacio educativo capaz de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas para trabajar matemáticamente y capaces de promover y soportar el cambio cognitivo de los alumnos ([193], p. 51).*

Partiendo de esta caracterización, resultaría redundante hablar de “entorno interactivo”; dado que desde nuestra perspectiva, el aprendizaje se entiende como un proceso social y por tanto cualquier entorno de aprendizaje debería incluir las interacciones necesarias para que se produzca dicho aprendizaje.

En tal sentido, caracterizamos el entorno virtual de aprendizaje propuesto de la siguiente manera: *un entorno de aprendizaje interactivo, soportado por aplicaciones informáticas y por el uso de las TIC, en el que el trabajo se organiza de manera colaborativa.*

Al diseñar el entorno virtual de aprendizaje que se utiliza en el “Taller de Matemáticas” se han tenido en cuenta ciertas consideraciones sobre el aprendizaje y se ha pretendido desarrollar entornos que generen interacciones adecuadas de aprendizaje entre profesor y alumnos con la idea fundamental de incrementar el aprendizaje y el conocimiento.

Desde 1999, se trabaja en un marco de investigación acción; evaluando el grado de desarrollo de ese objetivo, entre otros, y estudiando las interacciones, las condiciones que favorecen su mejor consecución y modificando la práctica en función de las investigaciones realizadas.

El entorno virtual de aprendizaje diseñado, está constituido fundamentalmente por una red electrónica como soporte instruccional y en el que las actividades con Cabri o Cabri Java, presentadas en la página Web correspondiente o a través del correo electrónico, constituyen el medio esencial de comunicación y aprendizaje. Se utiliza además un foro electrónico en el que es posible plantear preguntas, replicar, solicitar aclaraciones, quedando todas las intervenciones a la vista del grupo.

Creemos que un entorno así diseñado, favorece en los alumnos de la ESO tanto el aprendizaje de la Geometría, como el desarrollo de la competencia comunicativa, del uso de las TIC, de la creatividad y el gusto por “hacer Matemáticas” y los procesos de argumentación, validación y demostración; orientado este proceso al desarrollo de competencias por parte de los alumnos.

Tanto para el diseño original de dicho entorno EVA, como para los ajustes resultantes de este proceso de investigación acción, se han tenido en cuenta dos aspectos fundamentales:

*Uno. Los entornos deben ofrecer al aprendiz la posibilidad de ser parte activa en la interacción del aprendizaje y no un mero receptor pasivo del conocimiento.*

*Dos. La responsabilidad del aprendizaje debe ser compartida de forma significativa entre el profesor y el alumno, permitiendo a los alumnos contemplarse como copartícipes y sujetos comprometidos con su aprendizaje ([193])*

Asimismo, consideramos que el entorno permite optimizar las tres categorías propuestas por Bettetini y Colombo[38]) para las posibilidades de los medios informáticos y las TIC: la representación, la comunicación y el conocimiento.

A través de Cabri y Cabri Java se favorece la “representación”, en este caso geométrica, y se contribuye a los procesos de visualización necesarios para el aprendizaje de la Geometría; la “comunicación” entre usuario y medio y de los usuarios entre sí (alumno profesor y alumno alumno) se enriquece a través del correo electrónico, de la página Web y del foro electrónico; y

el “*conocimiento*” se potencia a lo largo del proceso, generando nuevos y variados aprendizajes para los alumnos.

En síntesis, la incorporación de las TIC y los recursos multimedia brindan grandes posibilidades para el diseño de entornos virtuales de aprendizaje que favorezcan el aprender a aprender, la resolución de problemas y el desarrollo de la creatividad.

Pero también es cierto que su simple uso no garantiza beneficios; para el diseño de “*entornos virtuales de aprendizaje*” que favorezcan el aprendizaje significativo, se deben tener en cuenta los elementos fundamentales del proceso pedagógico (exploración, descubrimiento, resolución de problemas, reflexión, planificación estratégica, etc.) y optimizar la convergencia entre estrategias y soportes de información ([94], pp. 89 109).

Es necesario tender a una “*interactividad significativa*”. Siguiendo a Depover ([94]), esta significatividad se fundamenta en la autonomía de funcionamiento, en las posibilidades de experiencias concretas, de descubrimientos personales, de generar situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas. Se identifica a la acción, a la participación de la persona, como aspecto fundamental para esta significatividad de la interactividad; de ahí la importancia de recrear en estos entornos el proceso de diálogo interpersonal, incluyendo sus componentes comunicacionales, cognitivas e incluso afectivas.

En Depover ([94], pp. 155 178), se enmarca el diseño de este tipo de entornos en la necesidades que se imponen a partir del nuevo universo socio tecnológico y en función de las nuevos requerimientos para el futuro ciudadano: creatividad, flexibilidad, descentralización de la gestión; imprescindibles en una sociedad en la que más que contar con mucha información se necesita ser competente para tratarla, seleccionarla, buscarla en función de necesidades, etc.

La sociedad del conocimiento requiere una redefinición del concepto tradicional de aprendizaje, basado en la autonomía y la responsabilidad del aprendiz y por tanto modelos más integradores de la enseñanza.

## **2.2. El aprendizaje como actividad social: el modelo de trabajo colaborativo en G.D.**

Siguiendo la línea del constructivismo social; consideramos que si bien el aprendizaje es en principio una actividad individual y personal, ésta no se produce sin las interacciones con los demás.

*El constructivismo social considera al sujeto individual y el dominio de lo social como indisolublemente interconectados. Las personas están formadas mediante sus interacciones con los demás (así como por sus procesos individuales)... Ciertamente, la metáfora subyacente corresponde a la de las personas en conversación, abarcando a las personas en interacción lingüística y extra lingüística significativas. La mente se ve como parte de un contexto más amplio, la construcción social del significado...* ([126], p. 28)

Para que se produzca aprendizaje matemático, se debe favorecer la contextualización y funcionalización de un conocimiento matemático general y formal que ha sido construido en épocas con características sociales, económicas y culturales diferentes a las vividas por los alumnos; en un proceso de construcción histórica en el que el conocimiento se ha ido despersonalizando y descontextualizando, pasando a ser parte de la Ciencia Matemática y, por lo tanto, de la cultura.

Dichas contextualización y funcionalización se propician a través de situaciones que permitan a los alumnos participar activamente de la comprensión del conocimiento; situaciones en las que juega un papel preponderante la interacción social.

*El saber se contempla como una construcción social. El conocimiento matemático que se enseña en la institución escolar es exterior y anterior al aprendiz, pero sólo se producirá el aprendizaje en la medida que éste sea capaz de interiorizarlo y dotarlo de significado personal. Aquí radica la importancia de los medios y de los procesos que se pongan en juego para poner a los alumnos en contacto con el saber, posibilitando la deconstrucción del saber existente y su posterior reconstrucción por el sujeto que lo aprehende, y es precisamente aquí, en el proceso de apropiación, donde las interacciones sociales juegan un papel fundamental; puesto que la apropiación colectiva puede preceder a la apropiación individual y los contactos sociocognitivos pueden acelerar ciertas adquisiciones* ([193], p. 38)

Los métodos tradicionales de enseñanza contemplan la clase como un entorno en el que el papel del profesor se reduce simplemente a dar infor-

mación a los estudiantes y en la que los objetivos y metas planteados han de conseguirse individualmente por los alumnos <sup>1</sup>

Esta situación contrasta con la clase en la que se trabaja de forma cooperativa/colaborativa, en la que los estudiantes trabajan conjuntamente en grupos para alcanzar metas comunes. Los alumnos ayudan a otros para que “*todos*” puedan alcanzar en alguna medida el éxito. Mientras que en la enseñanza tradicional el profesor es el centro de la clase, siendo éste el transmisor de la información; en la clase de trabajo cooperativo se considera el profesor como un facilitador y guía del aprendizaje y a los estudiantes buscadores de información.

A través del trabajo colaborativo se puede fomentar el trabajo grupal y reforzar las relaciones humanas dentro del grupo participante, a través del desarrollo de proyectos compartidos entre los propios alumnos. Este tipo de trabajo, se orienta, sobre todo, hacia la realización de actividades en cooperación, con distintos objetivos de desarrollo cognitivo, entre ellos los relativos al desarrollo de competencias matemáticas.

Mediante este tipo de trabajo, es posible generar lecturas compartidas y debates grupales, producir análisis e interpretaciones conjuntas que enriquecen el proceso individual a través de una construcción social del conocimiento.

Como señalan Bereiter y Scardamalia ([35], p. 245):

*Los estudiantes necesitan aprender profundamente y aprender cómo aprender, cómo formular preguntas y seguir líneas de*

---

<sup>1</sup>Con *modelo tradicional de enseñanza*, hacemos referencia al habitualmente denominado modelo normativo, que ha predominado fuertemente en la enseñanza durante muchos años y cuyas principales características son: enseñar matemática consiste en transmitir conocimiento; la tarea del docente consiste en explicar y dar ejemplos; la tarea del alumno consiste en escuchar, estar atento, imitar, repetir, y ejercitar; el saber es un saber acabado y el recorte de conocimientos para la enseñanza se realiza mediante algún tipo de ley prescriptiva; el currículo es cerrado, no permite ningún tipo de flexibilidad; el error es responsabilidad absoluta del alumno, indica falta de atención, ejercitación o capacidad; la evaluación es sinónimo de calificación y sólo atiende aspectos conceptuales y momentos puntuales, en tanto que el proceso no es tenido en cuenta y menos el análisis de la evolución personal del alumno.

Si bien en los diseños curriculares actuales ya no están presentes estas orientaciones, sí quedan algunos restos en las aulas quizá por la inercia de tantos años, quizá porque los docentes actuales han sido formados en gran parte según el modelo anterior por lo que es común encontrar grandes diferencias entre la Matemática de los Proyectos Curriculares (metodología constructivista, evaluación procesual, flexibilidad del currículum) y la de las aulas.

*investigación, de tal forma que ellos puedan construir su propio conocimiento a partir de lo que conocen. El conocimiento propio que es discutido en grupo, motiva la construcción de nuevo conocimiento.*

En el trabajo colaborativo, la necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento. Los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Estos cambios en la estructura y el funcionamiento de la enseñanza más centrada en el aprendizaje y en la que la función del profesor está focalizada en su labor de guía y moderador a través de los cuales los alumnos asumen una responsabilidad mayor sobre su aprendizaje, y desarrollan algunas de las funciones que en la enseñanza tradicional están reservados al profesor, permiten no sólo una mejora en la calidad de la enseñanza sino también una adecuación a las exigencias de la sociedad del conocimiento, a través de formas de planificar y elaborar actividades y desarrollar proyectos educativos utilizando estas herramientas, que enriquecen el proceso individual a través de una *construcción social* del conocimiento.

*La aproximación sociocultural considera el proceso de aprendizaje interactivo como una actividad social que presupone una intersubjetividad<sup>2</sup> entre los interactores, esto es, entendimiento y comprensión compartidos y basados en un foco común de atención y algunos otros presupuestos compartidos que constituyen la base de la comunicación. El entendimiento recíproco, bien entre iguales bien entre profesor y alumno que interactúan es importante para el aprendizaje, aunque es necesario señalar que este entendimiento mutuo es difícil y complejo de alcanzar([193]).*

Para el diseño e implementación del entorno de aprendizaje, hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participe formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias; planteando preguntas, extrayendo conclusiones, realizando críticas, llevando a cabo iniciativas personales, enunciando resultados en

---

<sup>2</sup>Interrelaciones entre nuestro modo de pensar y de actuar

su propio vocabulario, formulando conjeturas, realizando y compartiendo descubrimientos que le provoquen una actividad interna, resultado de la interacción entre la reflexión, la actividad externa y la información recibida.

En este diseño, la función del profesor es intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, emplearemos el concepto de “*andamiaje*”<sup>3</sup>; acuñado por Bruner y colaboradores ([56]) y retomado por Vygostky ([262]), que consideraba que “*las interacciones guiadas por adultos podían ayudar a los niños a desarrollar funcionamiento psicológico superior y que la asistencia de un adulto permitía al niño operar en la zona de “desarrollo próximo”, área situada entre el nivel de lo que un niño puede conseguir por sí solo y el nivel que el mismo niño puede alcanzar con asistencia*” ([114], p. 298).

Así, el profesor es quien realiza “*parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece*”([114], p. 298)

El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

Mencionaremos a continuación, los beneficios que ofrece el soporte técnico que utilizamos en el “*Taller de Matemáticas*”, Cabri Géomètre II; identificando las ventajas que presenta para los alumnos en su aprendizaje de la Geometría en el marco de un modelo de trabajo colaborativo y para el docente en el proceso de mediación de dichos aprendizajes.

*Los entornos informáticos permiten a sus usuarios manipular de una forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando de alguna manera los conceptos matemáticos abstractos. Lo que los diferencia de otros materiales pedagógicos utilizados en la enseñanza de las matemáticas, es su naturaleza intrínsecamente cognitiva .*

---

<sup>3</sup>La definición original de andamiaje se desarrolló para analizar las situaciones en las que los padres ayudaban a sus hijos a expresarse por ellos mismos.



Cabri II es un software interactivo de aprendizaje con ordenador que permite construir y explorar objetos geométricos de forma interactiva y que presenta fundamentalmente dos características importantes; siguiendo a Murillo ([193], p. 67):

1. Coexistencia de funciones primitivas de dibujo puro y funciones primitivas geométricas.
2. Manipulación directa del dibujo.

La diferencia entre la manipulación de este software y la manipulación mediante “regla y compás”, no radica solamente en la velocidad y en la posibilidad de un mayor número de operaciones; sino en que Cabri II, parte de una manipulación del conocimiento totalmente diferente.

*El aprendizaje es el resultado de una construcción de conocimientos en el curso de la interacción con el entorno. El trabajo realizado con el conocimiento para que resulte manejable por el sistema transposición informática determina fuertemente la interacción entre el usuario y el sistema y por tanto el conocimiento que emerge de esta interacción. . .*

*El entorno informático Cabri Géomètre es un micromundo para la construcción y manipulación de figuras geométricas. Consideramos figura geométrica como la clase de equivalencia de todos los dibujos, en tanto que representación material, de un mismo objeto geométrico.*

Los dibujos realizados con Cabri, presentan frente a los realizados con lápiz y papel, la ventaja de que se pueden realizar desplazamientos y variaciones dando lugar a dibujos que corresponden todos ellos a un mismo objeto geométrico. Es decir; si uno de los elementos básicos del dibujo se desplaza mediante el ratón, el dibujo se modifica pero respetando siempre las propiedades y relaciones geométricas que han servido para su trazado y aquellas otras que de ellas se derivan; evidenciando así los invariantes geométricos involucrados.

*Este CAhier de BRouillon Informatique dedicado a la geometría, es el resultado del cruce entre las teorías constructivistas de aprendizaje derivadas de los trabajos de Piaget y de una concepción de entorno informático derivada de los trabajos de la escuela de Palo Alto.*

Cabri ofrece al usuario posibilidades de acción, exploración y experimentación. El usuario puede crear objetos y relaciones geométricas “*accesibles en el interfaz por manipulación directa, esto es, por intermedio de su representación permanente sobre la que el usuario trata físicamente mediante las correspondientes teclas o desplazando el ratón, sus acciones son rápidas, reversibles, incrementales e inmediatamente visibles.*”([193], p. 63)

Esta sintaxis tan sencilla, crea en el usuario la sensación de estar en contacto directo con los objetos geométricos; a lo que se añade la ventaja de trabajar en el idioma nativo.

En cuanto a las posibilidades de construcción, Cabri favorece la puesta en funcionamiento de procesos analíticos, aspecto clave de la enseñanza de la Geometría. Por esta razón, este software es considerado una herramienta potente para el aprendizaje de la Geometría ([31]) y en particular para el aprendizaje de la noción de figura geométrica ([162]).

Cabri permite la construcción de puntos, segmentos, circunferencias, vectores, rectas y casi todas las figuras de la Geometría plana presente en la Enseñanza Secundaria; permite manipular los objetos, transformándolos, validando la construcción propuesta y evidenciando propiedades (propiedades que en casos habrá que demostrar posteriormente) gracias a las posibilidades de visualización, medición y cálculo. El trabajo con este software favorece en los alumnos la diferenciación entre lo particular y lo general y la formulación de conjeturas: “*El alumno explora, observa, hace ensayos, anticipa, imagina el problema resuelto, disminuye o aumenta las restricciones, reconoce alguna situación y prácticamente se le invita a encontrar una demostración*”([193], p. 64)

Aclaremos aquí que entendemos que si bien la construcción del conocimiento geométrico puede favorecerse a partir de la interacción con el software, en la pantalla sólo es posible leer información, el conocimiento de ninguna manera puede leerse en ella, dado que es una construcción realizada por el sujeto que aprende ([24]); aunque dicho proceso sí puede ser favorecido por las posibilidades de Cabri.

De la misma manera, si bien Cabri puede constituirse en una potente herramienta para el aprendizaje de la Geometría; en este proceso siguen resultando fundamentales la interacción social y el rol docente de coordinación y toma de decisiones.

Finalmente, se destacan las posibilidades que ofrece Cabri al docente de realizar un seguimiento del quehacer geométrico de los alumnos, a través de

la opción “*Revisar construcción*”, que permite revisar paso a paso el recorrido seguido por cada alumno en la construcción propuesta.

Como señala Gutierrez([137], pp. 27 44), Cabri permite no sólo acceder a la versión final de la solución propuesta por el alumno sino también seguir paso a paso el proceso, siguiendo así la actividad cognitiva de los alumnos.

*Habitualmente, las investigaciones sobre aprendizaje con SGD se basan en la información recogida de los estudiantes mediante archivos con las construcciones hechas, respuestas verbales y/o escritas a los problemas planteados y conversaciones en entrevistas clínicas. El principal inconveniente de estas formas de recoger datos es que, con frecuencia, resulta difícil tener una idea clara de los procesos de razonamiento de los estudiantes. Con menos frecuencia, los investigadores registran también las manipulaciones que hacen los estudiantes en las figuras construidas mientras resuelven un problema; este registro se puede hacer grabando en video o con el “registro de sesión” en las versiones de Cabri Géomètre con esta capacidad implementada. Esta es una fuente de información muy interesante pues es la más directamente relacionada con la actividad cognitiva de los estudiantes .*

### **2.3. La noción de competencia comunicativa en matemáticas en el marco de esta investigación**

La noción de competencia matemática, resulta fundamental en esta investigación, como se desprende del enunciado de los objetivos 3, 4 y 5 y de sus categorías asociadas (1.2). A continuación, caracterizamos en principio dicha noción, describiéndola según los lineamientos del Proyecto PISA y vinculada al concepto de formación matemática. Seguidamente, la contextualizamos en el marco concreto de esta investigación.

#### **2.3.1. La noción de competencia en matemáticas**

En el marco del proyecto Pisa, “*el área de conocimiento de matemáticas está orientada a la capacidad de los alumnos para usar sus conocimientos matemáticos con el fin de afrontar los desafíos del futuro*”, identificándose

con la *“capacidad del alumno para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos en diferentes áreas de conocimiento y situaciones”* (sección [232], p. 71).

En este contexto, la formación matemática se define de la siguiente manera:

*“La formación matemática es la capacidad del individuo, a la hora de desenvolverse en el mundo, para identificar, comprender, establecer y emitir juicios con fundamento acerca del papel que juegan las matemáticas como elemento necesario para la vida actual y futura de ese individuo como ciudadano constructivo, comprometido y capaz de razonar.”*([232], p. 71).

Desarrollamos sobre esta definición, algunas ideas aclaratorias que pretenden clarificar más, si cabe, la definición de esta área de conocimiento.

- **Formación matemática...** Se ha elegido el término formación para enfatizar que los conocimientos y destrezas matemáticos tal como se definen en el sistema educativo tradicional no constituyen el objetivo primordial; en su lugar, *“se ha enfatizado el conocimiento matemático que se lleva a la práctica en multitud de contextos y maneras que invitan a la reflexión y el razonamiento”*. Aunque resulta claro que, *“para que esa práctica sea posible y viable, son necesarios gran cantidad de conocimientos y destrezas matemáticos fundamentales (como se suelen enseñar en los centros educativos)”*([232], p. 71)

Así, la formación matemática no queda reducida *“a un conocimiento de la terminología matemática, los conceptos, y procedimientos, así como las destrezas para desarrollar ciertas operaciones y aplicar ciertos métodos, sino que todo esto se presupone”*, considerándose estos aspectos imprescindibles respecto a unas capacidades matemáticas más complejas implícitas en esta definición. El término *“formación”* se emplea *“para indicar la capacidad de hacer un uso funcional de los conocimientos y las destrezas matemáticas más bien que para aprenderlos a fondo dentro de un currículo escolar.”*([232], p. 72)

- **...el mundo...** Este término hace referencia al *“entorno natural, social y cultural en que vive el individuo”*. Como postuló Freudenthal(1983): *“Nuestros conceptos, estructuras e ideas matemáticas se han inventado*

*como herramientas para organizar los fenómenos del mundo físico, social y mental”.*

- **...para establecer...** El término establecer no hace referencia únicamente a acciones físicas o sociales en el sentido estricto: *“Dicho término también incluye la comunicación, la toma de posiciones, la relación, la evaluación e incluso el aprecio de las matemáticas. Por eso la definición no debería limitarse al uso funcional de las matemáticas. Los elementos estéticos y recreativos de las matemáticas forman parte de la formación matemática.”*
- **...vida actual y futura.** Este término en relación a un individuo se refiere a “su vida privada, su vida laboral y su vida social con compañeros y familiares, así como su vida de ciudadano integrante de una comunidad”.([232], p. 72)

*Una capacidad fundamental que implica esta noción de formación matemática es la de plantear, formular y resolver problemas dentro de una variedad de áreas y situaciones. Dicha variedad de situaciones abarca desde problemas puramente matemáticos a aquellos en que la estructura matemática no es obvia en principio, es decir, donde el que plantea o el que resuelve el problema tiene que identificar primero la estructura matemática.*([232], p. 72).

- **Las actitudes y emociones...** Se agrega además que las actitudes y emociones, como la confianza en uno mismo, la curiosidad, el interés y la observación, y el deseo de hacer o comprender cosas, si bien no se explicitan en la definición de formación matemática del proyecto OCDE/PISA, se consideran requisitos previos fundamentales.

*En un principio se puede tener la formación matemática definida anteriormente sin necesidad de albergar tales actitudes y emociones al mismo tiempo. Sin embargo, en la práctica no es probable que la formación matemática definida anteriormente sea puesta en práctica por alguien que no tenga confianza en sí mismo, curiosidad, interés, o el deseo de hacer o comprender cosas que incluyen componentes matemáticos.* ([232], p. 72)

En este contexto, el Proyecto PISA identifica como uno de los aspectos clave para organizar el área de conocimiento correspondiente a las Matemáticas, la noción de competencia matemática.

*Las competencias matemáticas son destrezas y competencias generales como la resolución de problemas, el uso del lenguaje matemático y el diseño matemático. ([232], p. 72)*

La siguiente lista no jerárquica de destrezas matemáticas da cuenta de las competencias matemáticas generales relevantes y pertinentes en todos los niveles de la educación:([232], p. 74)

- *Destreza de pensamiento matemático.* Incluye plantear preguntas matemáticas típicas (¿existe...?, Si es así, ¿cuántos?, ¿Cómo hallamos...?), conocer los tipos de respuestas que las matemáticas ofrecen a tales preguntas, distinguir entre varios tipos de afirmaciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, aserciones condicionadas) y comprender y manejar la extensión y límites de los conceptos matemáticos.
- *Destreza de argumentación matemática.* Incluye saber qué son las demostraciones matemáticas y en qué difieren de los otros tipos de razonamiento matemático, seguir y evaluar las cadenas de los diferentes tipos de razonamientos matemáticos, tener un cierto sentido de la heurística (“¿qué puede o no ocurrir?”, y ¿por qué?”) y crear razonamientos matemáticos.
- *Destreza de diseño.* Incluye estructurar el campo o situación por diseñar, “matematizar” (traducir desde la “realidad” a las estructuras matemáticas), “desmatematizar” (interpretar los modelos matemáticos en términos de la “realidad”), trabajar con un modelo matemático, dar validez al modelo, reflexionar, analizar y aportar una crítica de un modelo y sus resultados, intercambiar información acerca del modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones de tales resultados), y seguir y controlar el proceso de diseño.
- *Destreza para plantear y resolver problemas.* Incluye plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos (“puros”, “aplicados”, “de preguntas abiertas” y “cerrados”, y resolver diferentes tipos de problemas matemáticos de distintas maneras.

- *Destreza de representación.* Incluye descodificar, interpretar y distinguir entre las distintas formas de presentar los objetos y situaciones matemáticas y las interrelaciones entre las distintas representaciones. También incluye elegir y cambiar entre distintas maneras de representar, según la situación y el propósito.
- *Destreza simbólica, formal y técnica.* Incluye descodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y comprender su relación con el lenguaje natural, traducir del lenguaje natural al simbólico/formal, manejar las afirmaciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas, emplear variables y resolver ecuaciones y realizar cálculos.
- *Destreza de comunicación.* Incluye la expresión personal, de formas diversas, en temas de contenido matemático, tanto oralmente como por escrito, así como la comprensión de otras afirmaciones orales o escritas acerca de esos temas.
- *Destreza de utilización de ayudas y herramientas.* Incluye saber y ser capaz de emplear varias ayudas y herramientas (incluidas las herramientas de tecnología de la información) que puedan ayudar a la actividad matemática, así como conocer las limitaciones de dichas ayudas y herramientas.

Las destrezas de la lista anterior, no se trabajan ni se evalúan de manera individual; por el contrario, al hacer matemáticas reales se necesita frecuentemente hacer un uso simultáneo de varias destrezas (quizá de todas).

Por esta razón, dichas destrezas se han reorganizado en tres clases más amplias de competencias:

- *Clase 1:* Reproducción, definiciones y cálculos (desarrollo de procesos)
- *Clase 2:* Conexiones e integración para la resolución de problemas (establecimiento de conexiones)
- *Clase 3:* Pensamiento matemático, generalización y comprensión súbita (pensamiento matemático y generalización)

*Probablemente cada una de las destrezas enumeradas anteriormente desempeñará un papel importante en todas las clases de competencias. Es decir, dichas destrezas no pertenecen a*

*una única clase de competencia. Las clases forman un continuo conceptual, desde la simple reproducción de hechos y destrezas computacionales hasta la competencia de hacer conexiones entre diferentes aspectos para resolver problemas cotidianos simples, y hasta la tercera clase, que incluye la “matematización” de problemas cotidianos así como la reflexión sobre las soluciones en el contexto de los problemas, empleando el pensamiento, la racionalización y la generalización matemáticos<sup>4</sup>. ([232], p. 75)*

Otras dimensiones importantes relacionadas con la formación matemática considerada por el Proyecto PISA son las siguientes:

**Procedimientos:** *consisten en las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos. Los procedimientos se dividen en tres clases: reproducción, definiciones y cálculos; conexiones e integración para resolver problemas; y conceptualización, pensamiento matemático y generalización.*

**Contenido:** *el proyecto Pisa enfatiza temas matemáticos muy generales tales como el cambio y el crecimiento, el espacio y la forma, el razonamiento cuantitativo, y las relaciones de dependencia y la incertidumbre.*

**Contexto:** *un aspecto importante de la formación matemática consiste en aplicar las matemáticas en situaciones muy diversas, incluyendo la vida personal, la vida escolar, en el trabajo y los deportes, en la comunidad local y en la sociedad. ([230], p. 77)*

Entendemos que el enfoque pedagógico por competencias resulta superior del enfoque por objetivos en la medida en que “permite evitar la compartimentación artificial de los aprendizajes, como cuando a un problema de matemáticas se le atribuye la etiqueta de **algebraico**, mientras que el

---

<sup>4</sup>Si bien las clases forman una jerarquía, en el sentido de que un grupo de tareas que requieran las competencias de la Clase 3 será generalmente más difícil que otro de la Clase 2, esto no significa que, a un nivel individual, las competencias de la Clase 2 sean un requisito previo para cada una de las competencias de la Clase 3.



*alumno ejerce algo más complejo (v.g. Una modelización con dependencia entre variables e incertidumbre en un razonamiento cuantitativo), o cuando se cree que en clase de matemáticas sólo es digno de interés el contenido propiamente matemático". ([79], p. 55).*

En el marco de esta investigación, la clase de matemáticas es considerada como un sistema complejo en el que las interacciones entre los cuatro polos del sistema educativo (alumno, profesor, conocimiento y medio) producen beneficios en los alumnos que van más allá del contenido matemático en sí mismo y que conciernen dimensiones cognitivas y sociales más amplias. En particular, en este trabajo se han considerado como aspectos fundamentales los procesos relacionados con la comunicación y, en cierta medida, con el uso de las TIC.

El enfoque por competencias constituye un marco acorde a esta visión en tanto que *"proporciona referencias adaptadas a todos los que quieran tener en cuenta la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos estrategias compartidas con el uso de la lengua natural, del lenguaje matemático y de la argumentación, el razonamiento, la abstracción, la resolución de problemas, etc."* ([79], pp. 55-56).

Asimismo, consideramos que este enfoque resulta apropiado para dar respuesta al desafío de atender a la diversidad en el aula.

En síntesis, el enfoque por competencias resulta conveniente en relación a los planteamientos de esta investigación, teniendo en cuenta los siguientes aspectos que se esquematizan en la Figura 2.1.

- permite evitar la compartimentación artificial de los aprendizajes;
- permite enfocar la atención a la diversidad de la manera que se asume en esta investigación;
- entiende la complejidad de la relación didáctica que supone el hecho de considerar, en el aprendizaje de las matemáticas, los procesos comunicativos, el razonamiento, la abstracción, la resolución de problemas, etc.;
- orienta la formación matemática hacia el desarrollo, por parte de los alumnos, de las capacidades complejas necesarias para usar sus conocimientos matemáticos para afrontar los desafíos del futuro;

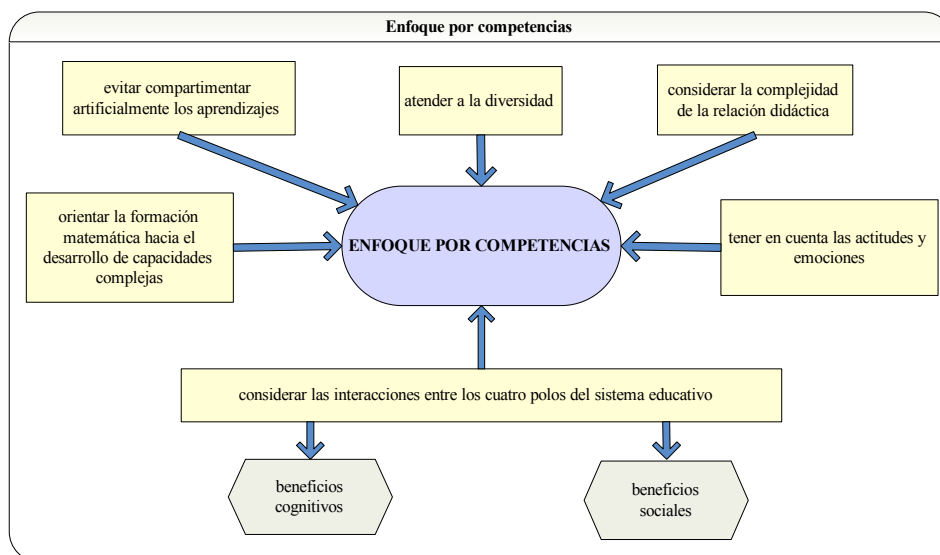


Figura 2.1: Enfoque por competencias.

- otorga importancia de las actitudes y emociones, considerándolas como requisitos fundamentales para el aprendizaje matemático;
- permite considerar la clase de matemáticas como un sistema complejo en el que las interacciones entre los cuatro polos del sistema educativo producen beneficios cognitivos y sociales en los alumnos que van más allá del contenido matemático en sí mismo (véase la figura 2.1).

### 2.3.2. La noción de competencia comunicativa en matemáticas.

El “*paradigma comunicativo*”, proveniente de la Didáctica de la Lengua y de los modelos comunicativos, aporta algunas consideraciones importantes a tener en cuenta en relación al aprendizaje de la comunicación.

Según Mendoza y Cantero ([187]), desde este nuevo paradigma, la comunicación deja de entenderse como un “*contenido enseñable*” (en un contexto específico y transferible a otros contextos) para convertirse en “*una actividad que debe hacerse*”.

Cabe destacar que, antes del enfoque comunicativo, se consideraba que aprendiendo los elementos y las reglas necesarias bastaba; que se trataba de conocer las palabras (repertorio cerrado contenido en el diccionario), su pronunciación (cifrada en una serie de reglas) y su combinación (gramática también cifrada en reglas); es decir, la enseñanza de la lengua y la comunicación se planteaba como “*aplicación de los saberes lingüísticos*” y su lugar era la clase de Lengua.

Pero desde este nuevo enfoque comunicativo, la escuela a través de sus distintos espacios curriculares, debe ser el lugar en el que los alumnos puedan desarrollar su competencia comunicativa<sup>5</sup>, mediante la participación en procesos comunicativos reales y contextualizados que les permitan relacionarse con los otros, regular sus discursos, negociar significados, hacerse entender, transmitir ideas, argumentar, etc.; y el aula debe ser entonces un contexto de adquisición, un contexto comunicativo significativo dónde no sólo se aprende, sino que también se aprende a hacer; donde los procesos de comprensión y expresión, escrita y oral, se alcanzan de manera progresiva a través del uso y de la interacción.

La importancia asignada a los contextos comunicativos específicos, subraya la transversalidad de los dominios comunicativos y compromete especialmente a todos y cada uno de los espacios curriculares, en particular la clase de Matemáticas, en tanto se reconoce la imposibilidad de aprendizaje de la comunicación en un determinado contexto y transferencia a otros.

Señalamos que el diseño curricular español, propone un enfoque comunicativo y funcional; cuya finalidad principal consiste en el desarrollo de la competencia comunicativa por parte de los alumnos; y reconoce la transversalidad de los dominios comunicativos: “*El dominio del discurso adecuado a las situaciones de aprendizaje es una responsabilidad de la escuela en las diferentes materias, ya que desde todas ellas se ha de colaborar al desarrollo de la capacidad de utilizar el lenguaje como instrumento de representación y de conocimiento.*” ([44], p. 25691); sugiriendo así que, la adquisición de los conocimientos específicos correspondientes a cada espacio curricular debe

---

<sup>5</sup>Según Lomas, Osoro y Tusón ([174]), con la expresión Competencia comunicativa se hace referencia “*el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo (lingüísticos, socio lingüísticos, estratégicos y discursivos) que el hablante/oyente/ escritor/lector deberá poner en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido*”. Este conjunto de habilidades y conocimientos operativos necesarios para interacción comunicativa incluye diversidad de conocimientos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e interdependiente. La competencia comunicativa es una competencia cultural que se adquiere mediante la participación en procesos comunicativos reales.

incluir la apropiación de las formas de decir del discurso en que se expresan esos conocimientos, el dominio de las habilidades de comprensión y de producción de los textos habituales en ese contexto específico: “*La comprensión lectora y la capacidad de expresarse correctamente en público serán desarrolladas en todas las asignaturas de la etapa.*” ([44], artículo 6.2).

El reconocimiento del carácter transversal de la lengua no es nuevo; históricamente se ha justificado desde la importancia que tiene el buen uso de la lengua en numerosos procesos cognitivos y educativos: la lengua es el medio esencial de transmisión y comunicación en el ámbito socio educativo, la comprensión y la expresión son de carácter instrumental para el resto de disciplinas; razones que siguen teniendo plena vigencia.

Pero las nuevas perspectivas, además de identificar que las habilidades de comprensión y expresión son fundamentales para cualquier tipo de aprendizaje, van un poco más allá al reconocer la importancia de los contextos específicos en el proceso de adquisición de esas habilidades.

En palabras de Lescano y Lombardo ([166], p. 17): “*Se aprende a leer y a producir textos de Matemática en la clase de Matemática; se aprende a leer y a producir textos de Biología en la clase de Biología... El mejor profesor, para alcanzar la comprensión lectora y la expresión escrita en cada uno de estos contextos, serán respectivamente el profesor de Matemática, el profesor de Biología...*”

Como señalan Miret y Tusón ([190], p. 4), “*esperamos que nuestros alumnos y nuestras alumnas sean capaces de (re)producir o de (re)crear aquellas maneras de decir (también de hacer y de decir cómo hacen) propias del área de la que se trate*”.

Estas aportaciones, nos permiten identificar que el contexto específico para el desarrollo de los aprendizajes relativos a la comunicación matemática es la clase de Matemáticas y que la manera de propiciar el desarrollo de estas capacidades comunicativas es mediante el uso; especialmente si tenemos en cuenta que el lenguaje matemático, como registro de representación semiótica particular, resulta un sistema muy complejo dado su carácter mixto, que incluye un lenguaje natural y un lenguaje simbólico en permanente interacción y que a su vez incluye registros semióticos no lingüísticos como son los gráficos.

En nuestro caso, tanto la resolución de los problemas geométricos en sí, como la forma diseñada para las interacciones y la comunicación (“*enseñanza bimodal*”), conllevan necesariamente a ese uso.

En particular, en relación a los procesos de escritura que los alumnos llevan a cabo como parte de la resolución de problemas geométricos, creemos que esos procesos son parte del aprendizaje geométrico que pretendemos para nuestros alumnos, contribuyen al desarrollo de las capacidades geométricas en general y mejoran la capacidad de comunicación e interacción.

*“En matemáticas es muy importante la argumentación, la capacidad de convencimiento y de persuasión. El discurso matemático tiene que establecer la validez de los enunciados tanto para el orador como para la audiencia. Esto es especialmente importante en la resolución de problemas. En la actualidad la parquedad de escritura de nuestros estudiantes es un hecho constatado y por esta razón se tiene que poner énfasis en la importancia de la misma.” ([204], p. 10)*

### **Hablar (y escribir) de matemáticas**

Nesher ([199]) distingue entre dos acciones: *“hablar matemáticamente”* y *“hablar de matemáticas”*. Con el término *“hablar matemáticamente”* se refiere a usar el lenguaje matemático, aplicándolo a variados contextos, pero teniendo en cuenta su propia sintaxis.

Con la expresión *“hablar de matemáticas”*, se hace referencia al hecho de utilizar el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas; en este caso, el vocabulario y la gramática, sintaxis y semántica, son las del lenguaje natural; aunque claro está que suele tratarse de discursos parcialmente expresados en términos matemáticos. Agrega al respecto:

*Me gustaría también destacar que una parte importante del aprendizaje en matemáticas está relacionado con el desarrollo de explicaciones aceptables matemáticamente, es decir, con la elaboración de argumentos válidos en matemáticas. El profesorado, como parte de su papel, podría ayudar a los alumnos a aprender qué es un argumento convincente en matemáticas y en qué se parece, o se distingue, de un argumento ético o artístico. [...] Debe tenerse en cuenta que este tipo de conversación se da utilizando el lenguaje natural que actúa como metalenguaje para explicar pensamientos matemáticos. ([199], pp. 120 121)*

Coincidimos con Nesher en que cuando los alumnos producen este tipo de discursos, utilizando el lenguaje natural como metalenguaje, desarrollan

aprendizaje matemático; en particular que cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto, desarrollan aprendizaje geométrico.

Nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos escritos producidos, como parte de la resolución de problemas geométricos, por parte de alumnos de ESO, en el marco de la materia optativa “*Taller de Matemáticas*”.

En nuestro caso, adaptando la expresión “*hablar de matemáticas*” propuesta por Nesher, trabajaremos sobre el “*escribir de matemáticas*”, o más específicamente de “*escribir de geometría*”, para referirnos al proceso de producción de discursos escritos en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje<sup>6</sup>

En el contexto de la asignatura considerada, este proceso de producción de discursos escritos relativos a la resolución de problemas geométricos, cobra una relevancia especial debido al formato mixto (“*enseñanza bimodal*”) en el que se estructura la asignatura. La producción de discursos escritos juega un rol superador al de “*tarea escolar*” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor alumno y alumno alumno.

Creemos que esta modalidad comunicativa, favorece el desarrollo de la competencia comunicativa en Matemáticas en particular y la mejora de las capacidades geométricas en general, en tanto que propicia la interacción, el intercambio y la reflexión.

Son varios los investigadores que han estudiado las conexiones entre el discurso escrito y las matemáticas: *el discurso escrito como soporte del aprendizaje matemático con alumnos* [192]), *el discurso escrito y la reflexión crítica* ([223],[224]) y en *la formación del profesorado de matemáticas* ([5]).

Según Powell [224], la reflexión escrita sobre las experiencias matemáticas puede llevar a los alumnos a pensar críticamente sus ideas; un ambiente de aprendizaje significativo y hacer que la reflexión sobre la experiencia sea una reflexión crítica y atenta sobre el propio conocimiento para que el individuo pueda desarrollar su proceso metacognitivo. Powell evidencia que la

---

<sup>6</sup>Según la RAE, metalenguaje (prefijo griego meta: más allá), es el “*lenguaje que se usa para hablar de aspectos propios de otro lenguaje o para describirlo*”. Los signos del metalenguaje se utilizan para analizar y describir las propiedades y relaciones del otro lenguaje, el cual se denomina por este motivo lenguaje objeto. En este caso el lenguaje natural, sus signos y reglas, permiten a los alumnos expresar, describir, analizar propiedades y relaciones geométricas, reflexionar sobre ellas e intercambiar ideas.

escritura trae acoplada la acción de reflexionar sobre la experiencia, como posibilidad de influenciar significativamente sobre la cognición y la metacognición del sujeto que aprende. Añade además, que a partir de la observación de lo que escribe una persona, es posible explorar relaciones, construir significados, ampliar, enriquecer o abandonar ideas, e incluso, comentar y monitorizar sus reflexiones.

Frente a la naturaleza efímera del habla, señala Powell [224], la escritura ofrece un medio estable, que permite a profesor y alumno, examinar, reaccionar y responder al pensamiento matemático.

Desde esa misma perspectiva, Oliveira ([203]) acredita que la escritura consiste en un soporte material de la lengua que favorece la conciencia metalingüística. Por medio de la escritura, *el sujeto puede reflexionar y construir conocimiento explícito, y la conciencia metacognitiva, por las posibilidades de verificación del discurso escrito en cuanto producto de pensamiento, de objetivación de la experiencia personal* ([203], p. 153).

Menezes y Fiorentini ([189]), han investigado sobre la importancia de la expresión escrita en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas (*“la reflexión y el aprendizaje mediada por la escritura”*), en el caso de la formación de futuros profesores y han concluido que:

*Esos momentos de escritura en una disciplina, en que la forma de expresión simbólica es minimizada y sustituida por otra más discursiva, hacen que los pensamientos se suelten contribuyendo a la reflexión de los aspectos formativos del futuro profesor que ocurre en las clases, pero que no siempre son percibidos o explícitos. La articulación necesaria para el registro escrito parece rescatar nuevamente la experiencia vivida tornándola diferente y, con eso, potenciando su carácter formador y transformador.* ([189], p. 7).

Almeida ([5]), toma de van Dijk ([261]) la idea de que al igual que las conversaciones, los textos escritos también tienen usuarios (los autores y los lectores), razón por la cual no sólo se puede hablar de *“comunicación escrita”* sino también de *“interacción escrita”*, aunque los participantes no interactúen en este caso cara a cara.

Añade Almeida que *“la escritura, al dotar a los estudiantes de oportunidades de trabajar con conceptos matemáticos y términos de su propio lenguaje, también ayuda a los alumnos a desarrollar su confianza en el proceso*

*de enseñanza- aprendizaje de la matemática y a involucrase en el desarrollo de todo el proceso en la medida en que adquieren un mayor control sobre su aprendizaje”.*([5], p. 59)

Almeida ([5]), ha analizado desde la perspectiva del análisis del discurso, tanto las conversaciones como los textos escritos (interacciones por Internet) en el contexto de formación de docentes de matemática, en el área de Geometría a través de un entorno virtual tendiente a la construcción colaborativa del conocimiento por parte de los participantes. Desde esta perspectiva, cobra importancia el análisis de la dinámica del (hiper)texto en el proceso.

### 2.3.3. La Competencia Comunicativa: una noción social recontextualizada en Educación Matemática

Bernstein ([36]) utiliza la expresión *recontextualización* para hacer referencia al proceso de incorporación de ciertas nociones producidas por una disciplina en el campo de producción de otra disciplina distinta.

Aunque Bernstein acuñó el término para referirse a la importancia de incluir nociones de las teorías de la identidad y del poder simbólico en el campo educativo; el fenómeno al que hace referencia es cada vez más común actualmente entre distintas disciplinas científicas. En particular, la Didáctica de la Matemática, incorpora frecuentemente nociones provenientes de otras disciplinas como ha ocurrido con los resultados y nociones de la psicología cognitiva tomados de Piaget y las nociones provenientes de la Filosofía como los heurísticos, entre otros; pero a la vez nutre a otras disciplinas de nociones nacidas en el seno de la Didáctica de la Matemática como es el caso de la noción de “*transposición didáctica*”.

Planas ([216]), ha estudiado el proceso de recontextualización de nociones en el ámbito de la Educación Matemática, y en particular, para ejemplificar este proceso, ha investigado la recontextualización de la noción de Competencia Comunicativa.

Al revisar este proceso de recontextualización, Planas argumenta que el problema de la comunicación en el aula de matemáticas tiene que ver con compartir significados pero también con las relaciones discursivas tales como a quién se dirige el mensaje, en qué circunstancias, con qué contenidos, por medio de qué registro lingüístico, con qué propósitos, con qué consecuencias, etc.



En su investigación, Planas revisa el proceso de recontextualización de la noción de Competencia Comunicativa en el campo de la Educación Matemática.

Recoge los aportes de diversos autores como Abreu ([?],[2]), Lerman ([164]), Presmeg ([229]), Evans ([107]) y Pinxten ([214]), quienes aportan elementos para reinterpretar lo que significa ser competente en el aula de Matemáticas desde un punto de vista comunicativo.

*“La adquisición de competencia comunicativa consiste en la adquisición de todo aquello que es necesario saber para poder relacionarse con eficacia en contextos cultural y socialmente significativos sin que se produzcan discontinuidades que lo impidan. En este sentido, la construcción de conocimiento matemático y el buen desarrollo de los procesos de comunicación son del todo inseparables.”* ([216], pp. 179 180).

La investigación de Planas, analiza la recontextualización de la noción de competencia comunicativa en el marco de investigaciones relativas a la interpretación de normas y valoraciones; en particular en casos de alumnos procedentes de culturas minoritarias que deben interpretar significados convencionales de la nueva cultura a la que se incorporan, analizando estas relaciones como procesos de socialización.

Como implicaciones de la investigación realizada, Planas ([216], p. 182), destaca que: *El estudio de la noción de competencia comunicativa se encuentra todavía en sus inicios. No obstante, hay argumentos que tanto de orden social como científico que justifican continuar esta línea de investigación.”*

Destacamos los aspectos anteriores porque consideramos que nuestra investigación puede aportar algunos elementos para favorecer la recontextualización de la noción de competencia comunicativa en el campo de la Educación Matemática; al igual que el de otros elementos provenientes del “*enfoque comunicativo*” que aportan valiosas perspectivas de análisis y potentes herramientas para contribuir a analizar y mejorar los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos y a la vez el Aprendizaje de la Geometría.



## Capítulo 3

# Metodología

Asumimos una visión *constructivista* del aprendizaje y la premisa de que para conseguir un buen resultado es necesario un esfuerzo y que éste ha de ser deseado por los alumnos gracias a la capacidad de atracción de las actividades en sí mismas y del interés despertado por las características del medio utilizado (*aprendizaje significativo*). Utilizamos un entorno interactivo de aprendizaje constituido por una red electrónica, Internet, software de correo y de navegación de dominio público, un foro de discusión y software de geometría dinámica, fundamentalmente Cabri Géomètre<sup>1</sup> .

La metodología de trabajo propuesta, se pone en práctica en el ámbito de la asignatura optativa “Taller de Matemáticas”, destinada a alumnos de 3º año de ESO, que se imparte en un Instituto de Enseñanza Secundaria de Logroño desde 1999. Dicho espacio permite la puesta en práctica de resultados de investigación y a la vez nutre permanentemente nuestra investigación, en lo que se constituye un proceso dinámico de investigación–acción. Por tal razón, se describirán más adelante, tanto la metodología de trabajo con los alumnos como la de la propia de la investigación.

En la investigación que se presenta, siguiendo la línea marcada en Murillo (2001) y en Martín (2002), pretendemos analizar la eficacia de este entorno interactivo de aprendizaje, en relación al desarrollo de determinadas competencias matemáticas por parte de los alumnos, en particular las relacionadas con el

---

<sup>1</sup>Otras aplicaciones de Geometría, por ejemplo Logo y también The Geometer s Sket-chpad, permiten la creación y manipulación de figuras geométricas, que se ofrecen por medio del entorno, a la acción, a la exploración y a la experimentación del usuario, también pueden ser útiles y utilizables como sustitutos de Cabri, aunque en nuestra opinión es más operativo Cabri para las finalidades planteadas.

aprendizaje de la Geometría, con el desarrollo de la competencia comunicativa matemática y con el uso de las TIC, cuando la clase de Geometría se organiza utilizando soportes informáticos y un modelo de trabajo colaborativo que generan formas de interacción, comunicación y aprendizaje diferentes.

El objetivo básico es potenciar y estudiar los posibles beneficios cognitivos y para ello se han diseñado los instrumentos de análisis correspondientes. Para las actividades utilizadas se han determinado unas condiciones estructurales mínimas (objetivos 1 y 2, sección 1.2) y para el análisis de los aprendizajes de los alumnos se han diseñado instrumentos y definido componentes e indicadores con el objeto de evaluar la evolución producida (perfil de aprendizaje) a lo largo de las distintas etapas del proceso, en relación a la mencionada competencia comunicativa y al aprendizaje de la Geometría.(objetivos 3, 4 y 5, sección 1.2)

### **3.1. Arquitectura del modelo de análisis instrumental**

Los primeros análisis nos mostraban que los beneficios producidos en los alumnos a lo largo del taller, podían recogerse en un sistema de tres dimensiones: beneficios relativos al aprendizaje de la Geometría (AG), relativos al uso de las TIC y relativos al desarrollo de la capacidad de interacción y comunicación (CC).

Representamos este sistema mediante un tetraedro en cuyos vértices se encuentran cada uno de las dimensiones mencionadas y en el cual se incorpora un cuarto polo que identifica la tutorización (T). Las aristas de este tetraedro representan las interacciones entre los cuatro polos (véase Figura 3.1). Hemos llegado al esquema de la Figura 3.1 al preguntarnos: ¿Por qué a lo largo del taller mejora el aprendizaje de la Geometría? ¿Por qué mejora la comunicación? ¿Por qué mejora el uso de las TIC?... y pensar que, además de depender de la tutorización del proceso, las respuestas a estas preguntas no eran independientes entre sí.

Pensamos que el hecho de que a lo largo del proceso, estas dimensiones no se comporten como polos aislados sino como vértices en permanente interacción con los demás; da lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión se nutren de los progresos de las otras pero a la vez realimentan dicho progreso.

En base a estas primeras hipótesis, nos hemos propuesto construir instrumentos que nos permitan analizar los progresos de los alumnos en relación

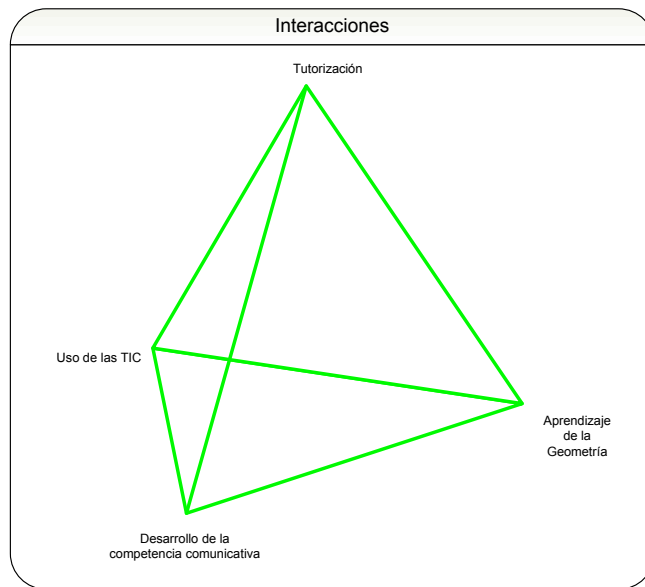


Figura 3.1: Interacciones entre los polos

al desarrollo de la competencia comunicativa (CC) y al aprendizaje de la Geometría (AG). Pretendemos por un lado analizar los perfiles correspondientes a cada tipo de aprendizaje, pero también establecer correlaciones, si es que existen, entre ellos.

Por tanto, en esta investigación, centraremos el análisis en una de las aristas del tetraedro que hemos propuesto como modelo para las interacciones producidas: **la que representa las interacciones entre el desarrollo de la competencia comunicativa (CC) y al aprendizaje de la Geometría (AG)**; por supuesto sin perder de vista que esta interacción no deja de ser parte de un sistema más amplio de interacciones.

Cabe destacar que las implicancias del polo “tutorización” han sido ampliamente estudiadas, por Cobo y Fortuny ([79]), en relación al desarrollo de competencias por parte de los alumnos en un *entorno e learning*.

Asimismo, existen numerosas investigaciones que han estudiado la influencia de los medios, en particular de las TIC, en el aprendizaje: ([94], [136], [180],...) y más específicamente al aprendizaje de la Geometría ([193]).

### 3.1.1. Instrumentos y criterios para evaluar la evolución de Entornos virtuales de aprendizaje (EVA)

Para analizar las mejoras relativas al uso de las TIC, proponemos un instrumento cuyas componentes se recogen y sintetizan en los Cuadros 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5

|   |
|---|
| <p><i>Componente: Uso general del ordenador</i></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Acceso</i> (encender y apagar correctamente el equipo).</p> <p><i>Acceso a programas específicos</i> (abrir y cerrar correctamente, maximizar y minimizar).</p> <p><i>Gestión y edición de archivos</i> a través de la barra de menús de Windows: archivo, edición, ver, etc. (abrir, crear, guardar, guardar como, cerrar, copiar, pegar, cambiar nombre,...) y de los iconos correspondientes.</p> <p><i>Uso de unidades de almacenamiento</i> (diskettes, CD, flash, etc.)</p> |
|---|

Cuadro 3.1: Uso general del ordenador

|  |
|--|
| <p><i>Componente: Uso de Cabri</i></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Uso de los cuadros de la barra de herramientas:</i> puntero, puntos, rectas, curvas, construir, transformar, macro, comprobar propiedades, medir, ver, dibujo; con sus correspondientes opciones.</p> <p><i>Uso estratégico de las diferentes posibilidades</i> para la resolución de problemas geométricos.</p> <p><i>Uso de las posibilidades de dibujo</i> para favorecer la visualización a través de la presentación (colores, grosor, punteado, ocultar datos).</p> |
|--|

Cuadro 3.2: Uso de Cabri

|  |
|--|
| <p><i>Componente: Uso general de Internet</i></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Acceso al navegador</i></p> <p><i>Acceso a una página Web</i> a partir de su dirección URL</p> <p><i>Utilización de hiperenlaces</i> (links).</p> <p><i>Empleo de barra de herramientas</i> (ir hacia atrás, ir hacia delante, actualizar, etc.) y barra de menús (archivo, edición, ver, etc.).</p> |
|--|

Cuadro 3.3: Uso general de Internet

Para la ponderación correspondiente, se proponen tres niveles, que han resultado del análisis exhaustivo de todos los alumnos y de la jerarquización de los estados de los mismos en relación al conocimiento y utilización de las TIC en los diferentes momentos del Taller en tres categorías:

|  |
|--|
| <p><i>Componente: Uso de correo electrónico</i></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Acceso a la cuenta</i> a través de la página Web correspondiente y del nombre de usuario y contraseña personales.</p> <p><i>Reconocimiento de las normas de seguridad</i></p> <p><i>Acceso a los mensajes recibidos:</i> acceder y leer el correo entrante, guardarlo en la carpeta correspondiente, abrir y guardar archivos adjuntos, acceder a través de los links a las páginas necesarias.</p> <p><i>Envío de e mails:</i> especificación de destinatario, asunto, texto del correo, archivos adjuntos, envío a través de la red.</p> <p><i>Utilización de otras opciones del Programa de correo:</i> revisión ortográfica, crear carpetas para organizar los mensajes, uso de libreta de direcciones, etc.</p> |
|--|

Cuadro 3.4: Uso del correo electrónico

|   |
|---|
| <p><i>Componente: Uso del foro electrónico</i></p> <p><b>Indicadores:</b></p> <p><i>Acceso a la página correspondiente</i></p> <p><i>Lectura ordenada de intervenciones ajenas</i></p> <p><i>Participación a través de un mensaje claro:</i> pregunta, nueva información u opinión, respuesta a una cuestión planteada por otro participante, refutación o corrección de una opinión ajena.</p> |
|---|

Cuadro 3.5: Uso del foro electrónico

- Primer nivel (TIC1): Desconocimiento, falta absoluta de práctica en el uso.
- Segundo nivel (TIC2): Conocimiento mínimo necesario para el uso básico y estándar.
- Tercer nivel (TIC3): Manejo estratégico amplio y variado que permite resolver situaciones variadas y originales

### 3.1.2. Instrumentos y criterios para evaluar los Aprendizaje en Geometría (AG)

Para construir este instrumento, necesario para alcanzar el objetivo 3 (sección 1.2, hemos tomado como punto de partida algunas de las competencias establecidas por el Proyecto OCDE/PISA.

Como hemos citado anteriormente: “*El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la*

*educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso.” ([242])*

El concepto de competencia así entendido, resulta un referente apropiado para analizar los progresos en el AG producidos en nuestros alumnos a lo largo del Taller de Matemáticas, realizando las adaptaciones necesarias para la aplicación a nuestro contexto y a nuestros objetivos de investigación.

Partiendo de este concepto reformulamos la pregunta “¿Cómo analizar los progresos relativos al Aprendizaje de la Geometría producidos en nuestros alumnos?” de la siguiente manera: “¿El alumno es capaz de resolver problemas de manera cada vez más competente?”; es decir: “¿Es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de las actividades planteadas?”, a lo largo del proceso: “¿Mejora su capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar conceptos y destrezas?”

Para la construcción del instrumento de análisis correspondiente, tomamos como punto de partida, una categorización general (tomada y adaptada de algunas de las competencias propuestas en el marco del proyecto PISA) y que se recogen en los Cuadros 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9

**Competencia: Pensar y razonar**

**Indicadores**

Plantea cuestiones propias de la Geometría (¿cómo se construye?, ¿son iguales?, ¿qué relación existe?, ¿cuánto mide?, ...) y conoce los tipos de respuestas.

Comprende los conceptos y relaciones geométricos, entendiendo sus alcances y sus limitaciones

Cuadro 3.6: Pensar y razonar

**Competencia: Argumentar**

**Indicadores**

*Crea, expresa y evalúa argumentos geométricos.*

*Sigue y valora cadenas de argumentos geométricos.*

*Realiza demostraciones geométricas.*

*Formula e investiga conjeturas geométricas.*

*Diferencia las demostraciones geométricas de otros tipos de enunciados (definiciones, ejemplos, conjeturas) y procedimientos (mediciones, visualización).*

Cuadro 3.7: Argumentar

La categorización recogida en los Cuadros 3.6, 3.7, 3.8 y 3.9 funciona como referencia para confeccionar un instrumento aplicable al proceso



|  |
|--|
| <p><b>Competencia: Modelar</b></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Traduce enunciados a una estructura geométrica</i> (correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica).</p> <p><i>Trabaja estratégicamente con el modelo geométrico propuesto</i> (medir, calcular, producir variaciones, formular conjeturas, etc.).</p> <p><i>Reflexiona, analiza y ofrece la crítica al modelo y a sus resultados.</i></p> <p><i>Comunica acerca del modelo y de sus resultados</i> (incluidas sus limitaciones).</p> <p><i>Dirige y controla el proceso de modelización.</i></p> |
|--|

Cuadro 3.8: Modelar

|  |
|--|
| <p><b>Competencia: Plantear y resolver problemas</b></p> <p><b>Indicadores</b></p> <p><i>Resuelve distintos tipos de problemas geométricos</i> (algorítmicos, de aplicación, abiertos, ...) mediante la visualización, el razonamiento matemático y la modelización geométrica</p> <p><i>Aplica y adapta estrategias</i> según las necesidades propias de cada problema planteado</p> <p><i>Construye nuevos conocimientos a partir de la resolución de problemas</i></p> <p><i>Controla el proceso de resolución de problemas y reflexiona sobre él</i></p> |
|--|

Cuadro 3.9: Plantear y resolver problemas

concreto llevado a cabo en los alumnos en el Taller, para cuyo diseño hemos considerado unas componentes más concretas y a su vez hemos decidido aplicarlas a la evolución en relación a unos determinados conceptos, relaciones y destrezas geométricos.

Para analizar si el alumno “¿Es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de una actividad planteada?”, revisamos el análisis del proceso de resolución de problemas realizado por diferentes autores. Así, encontramos, entre otras, las propuestas recogidas en el Cuadro 3.10 para las fases de resolución de problemas ([131], p. 100).

Consideramos que los distintos modelos presentados en el Cuadro 3.10, resultan más o menos adecuados según el tipo de estudio que se esté realizando, las edades de los alumnos, los contenidos matemáticos con los que están trabajando, el tipo de problemas, el entorno en el que se resuelven, las interacciones producidas, etc.

Teniendo en cuenta estas variables en el caso concreto de nuestra investigación, identificamos en el proceso de resolución de problemas los componentes e indicadores que se muestran en el Cuadro 3.11

Entendemos que las anteriores capacidades son las componentes fundamentales del proceso de resolución de problemas geométricos, entendido desde la noción de competencia, que llevan a cabo nuestros alumnos al resol-

| Polya  | Mason, Burton y Stacey  | Brandford y Stein   |
|--|---|---|
| <p><b>Comprender el problema:</b> estableciendo cuál es la meta y los datos y condiciones de partida.</p> <p><b>Idear un plan de actuación</b> que permita llegar a la solución conectando los datos con la meta</p> <p><b>Llevar a cabo el plan</b> ideado previamente</p> <p><b>Mirar atrás</b> para comprobar el resultado y revisar el procedimiento utilizado</p> | <p><b>Abordaje:</b> Comprender el problema y concebir un plan</p> <p><b>Ataque:</b> Llevar a cabo el plan</p> <p><b>Revisión:</b> Reflexión sobre el proceso seguido. Revisión del plan</p> | <p>Identificación del problema</p> <p>Definición y representación del problema</p> <p>Exploración de posibles estrategias.</p> <p>Actuación, fundada en una estrategia.</p> <p>Logros. Observación y evaluación de los efectos de nuestras actividades.</p> |

Cuadro 3.10: Propuestas para las fases de resolución de problemas

| <i>Componente</i>  | <i>Indicadores:</i>   |
|--|---|
| <i>Transformación 1. Modelización del problema</i>   | <p><i>Fase 1:</i> ¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático?(cuando sea necesario.)</p> <p><i>Fase 2:</i> ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático a una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?</p> |
| <i>Transferencia. Resolución del problema dentro del modelo</i>                                    | <p>¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo, ...) para resolver el problema?</p> <p>¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema?</p>                 |
| <i>Metacognición. Reflexión y control sobre el proceso de resolución</i>                           | ¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?   |
| <i>Transformación 2. Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado</i> | ¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?  |

Cuadro 3.11: Componentes e indicadores de la resolución de problemas

ver problemas a lo largo del Taller. Dichas capacidades no deben entenderse como componentes aisladas y de sucesión cronológica y lineal (por esa razón, preferimos llamarlas componentes en vez de fases o etapas); dado que los procesos de metacognición hacen posibles las interacciones entre ellas y de esta forma el proceso se hace dinámico y personal en el caso de cada actividad y cada alumno. Asimismo, cada componente incluye capacidades como las que se recogen en la Tabla 3.12, que se esquematiza en en la Figura 3.2

| <i>Componente</i>  | <i>Capacidades</i>  |
|--|---|
| <i>Transformación 1. Modelización del problema</i>   | Identificar las matemáticas que pueden ser relevantes en el contexto.<br>Plantear interrogantes.<br>Representar el problema de una manera diferente.<br>Comprender la relación entre el lenguaje natural, el lenguaje simbólico y el formal.<br>Encontrar regularidades, relaciones y patrones.<br>Reconocer isomorfismos con problemas ya conocidos.<br>Traducir el problema a un modelo matemático.<br>Utilizar herramientas y recursos adecuados |
| <i>Transferencia. Resolución del problema dentro del modelo</i>                                    | Usar diferentes representaciones.<br>Usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y sus operaciones.<br>Refinar y ajustar los modelos matemáticos; combinar e integrar modelos.<br>Argumentar.<br>Generalizar.  |
| <i>Metacognición. Reflexión y control sobre el proceso de resolución</i>                           | Auto reflexionar sobre el proceso y tomar decisiones sobre el mismo.<br>Conocer las propias limitaciones.<br>Solicitar ayuda en el momento adecuado y de manera clara y precisa.<br>Chequear y supervisar la efectividad del plan diseñado para resolver el problema.<br>Determinar cuando finalizar el trabajo sobre el modelo.  |
| <i>Transformación 2. Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado</i> | Entender la extensión y límites de los conceptos matemáticos<br>Reflexionar sobre los argumentos matemáticos y explicar y justificar los resultados.<br>Comunicar el proceso y la solución.<br>Criticar el modelo y sus límites.  |

Cuadro 3.12: Capacidades de las componentes

Pero cabe mencionar aquí una particularidad de las actividades propuestas a los alumnos, especialmente a partir de la “*etapa correo electrónico*”; particularidad que reorientará nuestro estudio en relación al aprendizaje de la Geometría llevado a cabo por los alumnos y completará nuestro instrumento de análisis correspondiente.

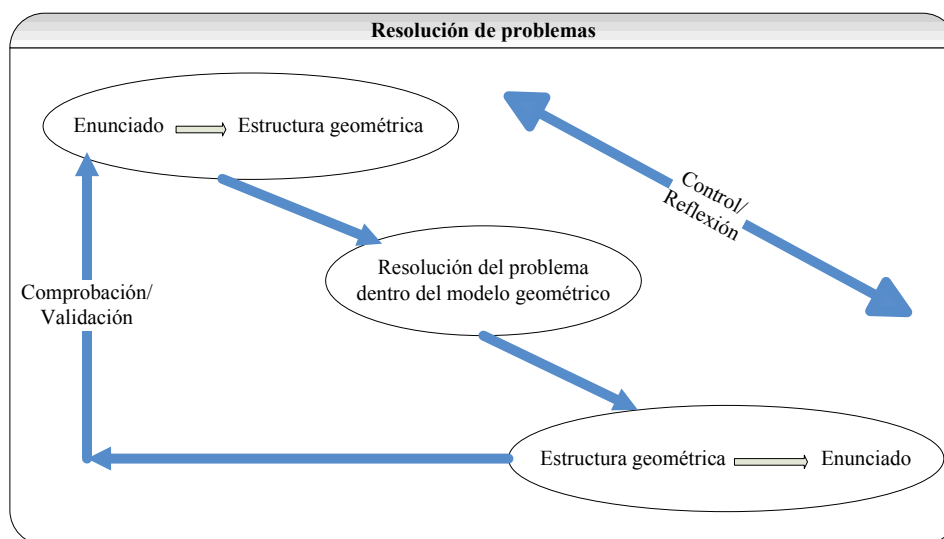


Figura 3.2: Resolución de problemas

Dichas actividades constituyen en principio “*problemas abiertos*” y cada uno de los alumnos recibe en un primer momento el mismo enunciado; pero las mismas se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través de un sistema de “*ayudas progresivas y diversificaciones*”. De esta manera, cada alumno, sigue su propio “itinerario de resolución”; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potenciales respecto a ella. Existe un recorrido mínimo recorrido por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad entendida como hemos planteado en el Anexo I <sup>2</sup>.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos es-

<sup>2</sup>Las “*ayudas progresivas*” son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad.

A través de las “*diversificaciones*” de la actividad inicial, el docente propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno.

Llamamos “*itinerario de resolución*” a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

tén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar.

El esquema mostrado en la Figura 3.3, muestra algunos ejemplos de distintos itinerarios posibles recorridos por diferentes alumnos en el proceso de resolución de una actividad dada.

Es claro entonces que el análisis del “itinerario de resolución” recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha producido cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

Volvemos a recurrir aquí, al informe PISA([242], p. 59)

Los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias.

- **Primera clase:** *Reproducción y procedimientos rutinarios.*
- **Segunda clase:** *Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.*
- **Tercera clase:** *Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.*

Los indicadores para la complejidad de las tareas en cada una de las categorías se resumen en el Cuadro 3.13. ([242], p. 60)

| <b><i>Reproducción</i></b>   | <b><i>Conexión</i></b>  | <b><i>Re exigión</i></b>  |
|--|---|---|
| Contextos familiares.<br>Conocimientos ya practicados.<br>Aplicación de algoritmos estándar.<br>Realización de operaciones sencillas.<br>Uso de fórmulas elementales | Contextos menos familiares.<br>Interpretar y explicar.<br>Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación.<br>Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios. | Tareas que requieren comprensión y reflexión.<br>Creatividad.<br>Ejemplificación y uso de conceptos.<br>Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.<br>Generalizar y justificar resultados obtenidos. |

Cuadro 3.13: Indicadores para la complejidad de las tareas

En este caso la competencia hace relación a la complejidad de la tarea:

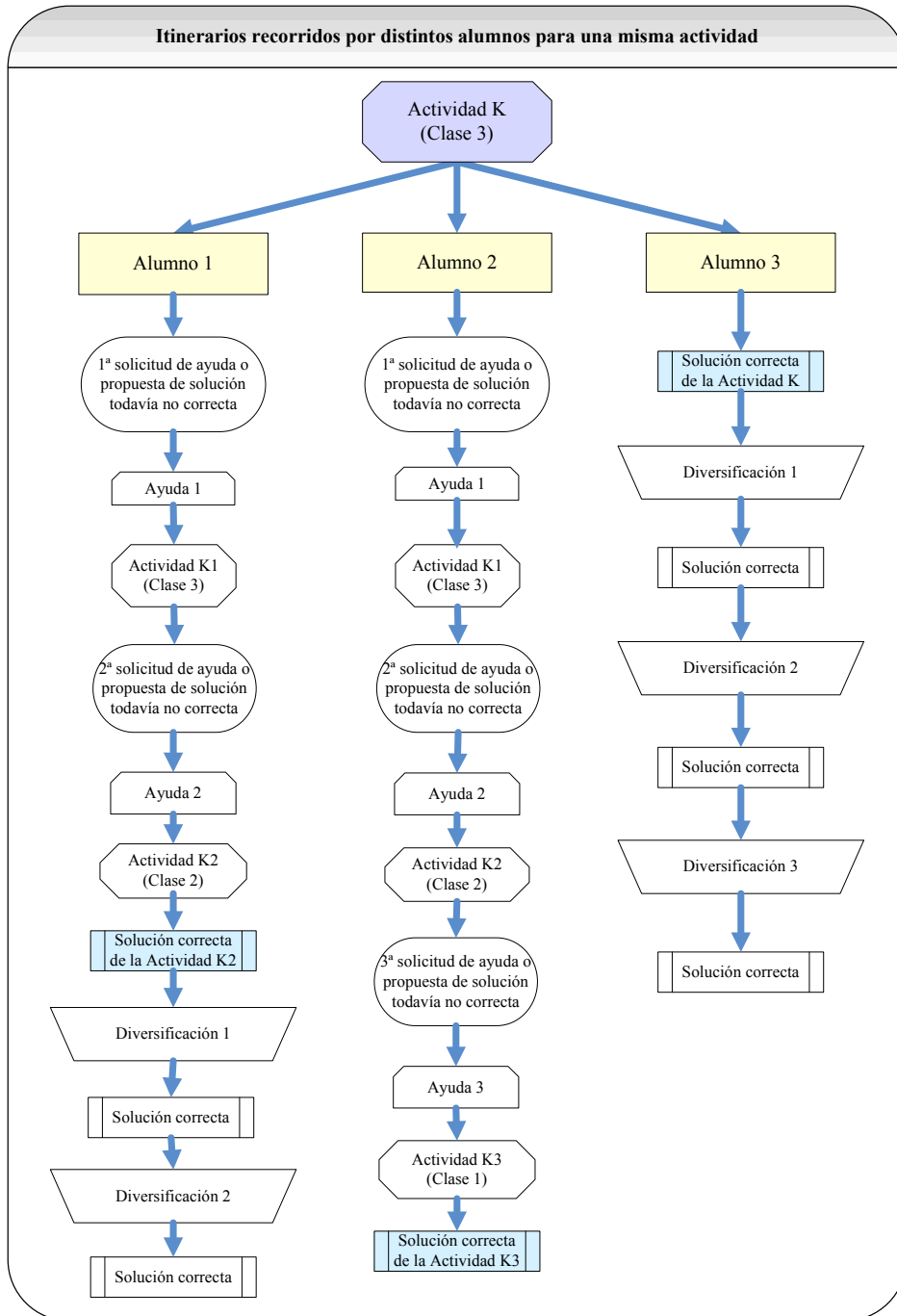


Figura 3.3: Itinerarios de los distintos alumnos para una misma actividad

*“El requerimiento de procesos más complejos, creativos o estructurados delimita distintos tipos de competencias en los estudiantes que, en principio, se concretan en esas tres clases.*

*Alumnos más competentes llevarán a cabo procesos de mayor complejidad; alumnos menos competentes sólo trabajarán procesos de complejidad menor.*

*En este caso la competencia de los estudiantes se refiere a las capacidades individualmente desarrolladas, que se ponen de manifiesto por el tipo de tareas abordadas con éxito.*

*Se acepta la hipótesis de que los estudiantes que alcancen a dar respuesta a tareas de alta complejidad, muestran un alto nivel de competencia matemática con las herramientas utilizadas y en la situación considerada.” ([242], p. 61)*

En nuestro caso, estos niveles no se tienen en actividades distintas, porque cada actividad “se adapta” al nivel de competencia del alumno en cada momento. Así resulta que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya realizado para resolverla; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido.

A partir de las todas las consideraciones anteriores, establecemos finalmente el siguiente instrumento de análisis, que se recoge en el Cuadro 3.14

En base al análisis de cada uno de los indicadores, se establece un nivel general del alumno, nivel que representa el estado general del alumno en relación al Aprendizaje de la Geometría.

- **Nivel Uno (AG1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Primera clase* (Reproducción y procedimientos rutinarios). Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente “*ejercicios algorítmicos*”.
- **Nivel Dos (AG2):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Segunda clase* (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados). Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver *problemas de aplicación*”.
- **Nivel Tres (AG3):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Tercera clase* (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas

|   |   |
|---|---|
| <p><b>Componente</b><br/><i>Transformación 1: Modelización del problema</i></p>   | <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)</i><br/>Sin ayudas<br/>Con ayudas</p>   |
| <p><b>Componente</b><br/><i>Transferencia: Resolución del problema dentro del modelo</i></p>                                    | <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?</i><br/>Sin ayudas<br/>Con ayudas</p> <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?</i><br/>Sin ayudas<br/>Con ayudas</p> |
| <p><b>Componente</b><br/><i>Metacognición: Reflexión y control sobre el proceso de resolución</i></p>                           | <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?</i><br/>Sin ayudas<br/>Con ayudas</p>   |
| <p><b>Componente</b><br/><i>Transformación 2: Codificación e interpretación de la solución en el contexto del enunciado</i></p> | <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto?</i><br/>Sin ayudas<br/>Con ayudas</p>  |
| <p><b>Componente</b><br/><i>Itinerario recorrido</i></p>  | <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Cuántas ayudas ha necesitado?</i></p> <p><b>Indicador</b><br/><i>¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)</i></p>  |
| <p><b>Valoración/ponderación</b></p>  | <p><i>Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde</i></p>  |

Cuadro 3.14: Instrumento de análisis de la complejidad de las tareas

originales). Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver “*problemas abiertos.*”



Estos niveles, han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías, de acuerdo a la clase de Actividad resuelta en cada caso teniendo en cuenta las ayudas recibidas y las diversificaciones resueltas.

### 3.1.3. Instrumentos y criterios para evaluar el desarrollo de la competencia comunicativa (CC) de los alumnos

Como hemos planteado en el objetivo 4 (sección 1.2), consideramos que las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas son parte de la resolución del problema geométrico propuesto.

Entendemos que cuando los alumnos producen este tipo de discursos, desarrollan aprendizaje matemático; en particular cuando los alumnos comunican sus estrategias geométricas en este modo mixto desarrollan aprendizaje geométrico.

Por esta razón, nuestro trabajo incluye el análisis de los discursos escritos producidos por los alumnos, como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos; discursos en los que los alumnos explican, justifican y describen el procedimiento que han llevado a cabo (competencia comunicativa).

Teniendo en cuenta que, las diversas manifestaciones orales y escritas empleadas en el contexto educativo, para la transmisión, construcción y/o demostración de un conocimiento, corresponden a la denominación de *discurso académico* ([74]); estas producciones escritas realizadas por los alumnos son parte dicho de *discurso académico*.

Proponemos entonces el modelo ilustrado en la Figura 3.4 para el análisis de las resoluciones de los alumnos.

Atienza ([17]), siguiendo el marco teórico del grupo INRP (Institute National de Recherche Pedagogique), identifica dos funciones básicas de la escritura del discurso académico:

**Función representativa o expresiva** (la escritura académica como construcción del conocimiento)

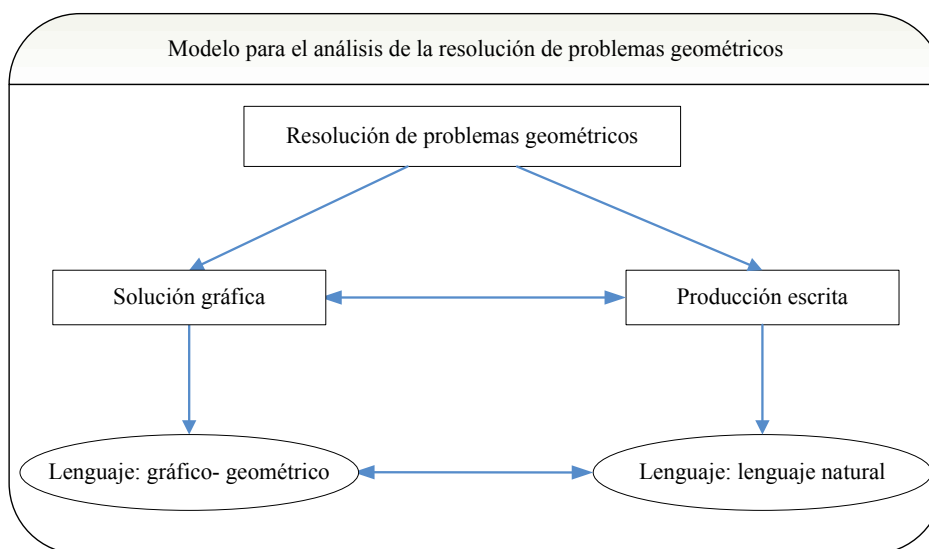


Figura 3.4: Modelo para el análisis de la resolución

*En el contexto educativo, el estudiante utiliza constantemente la escritura en su vertiente formativa (...) Se trata de la función representativa o expresiva de la escritura, empleada por el estudiante como tanteo y aproximación al saber, para explorar y analizar los tópicos de las diferentes disciplinas, esto es, para descubrir, formular y expresar ideas (...) Es, en definitiva, el discurso efectuado para aprender, para construir conocimiento,...* ([17], p. 144)

Teniendo en cuenta esta función, se identifica la escritura académica como facilitadora del aprendizaje, y se entiende que el desarrollo de habilidades escritoras permite una mejor aprehensión del contenido académico impartido por las distintas disciplinas del currículo.

**Función transaccional** (la escritura académica como demostración del conocimiento)

Se trata de la escritura que se utiliza para transmitir conocimientos; aquella escritura que, con carácter público, permite comunicar o demostrar a otras personas los conocimientos de que se dispone. Para acceder al conocimiento de la disciplina y superar las dificultades de socialización dentro de una determinada comunidad de discurso, es

necesario conocer las convenciones de la escritura transaccional propia de cada ámbito disciplinar.

La escritura académica con función transaccional puede entenderse como un acto comunicativo institucional, con unos parámetros de comportamiento específicos; el dominio de la comprensión y de la producción de este tipo de escritura requiere unas estrategias sustancialmente distintas a las necesarias en el dominio de textos más generales. (Atienza, 1999)

Existen dos consideraciones a tener en cuenta respecto a estas dos funciones del *discurso académico*:

- *el discurso académico* no puede concebirse como una realidad homogénea porque “*cada disciplina quizás tenga sus propias convenciones de discurso, re ejo de diferentes epistemologías, lo que da lugar a diversos subgéneros*”. ([17]).
- las funciones representativa y transaccional del discurso académico son concebidas como complementarias ([47]). La demostración del conocimiento no se puede llevar a cabo de manera satisfactoria si no se ha producido la construcción previa del conocimiento y a la vez la mejora en las formas de “*demostrar por escrito*” el conocimiento, mejoran el aprendizaje en sí.

Asumimos entonces que:

- *el discurso académico geométrico* es diferente a los discursos académicos de otras disciplinas
- *el discurso académico geométrico* cumple *una función representativa* (la escritura académica como construcción del conocimiento) y *una función transaccional* (la escritura académica como demostración del conocimiento)

Por ser estas funciones complementarias: la demostración de conocimiento geométrico a través de *discursos académicos geométricos* correctos no puede hacerse sin la construcción de los conocimientos involucrados pero a la vez la destreza en la elaboración de *discursos académicos geométricos* correctos, además de dar cuenta de los conocimientos construidos, contribuye a la construcción de nuevos conocimientos geométricos.

Por estas razones, consideramos importante el análisis de los *discursos académicos geométricos*” producidos por los alumnos como parte de la resolución de los problemas geométricos propuestos<sup>3</sup>

Nos interesa además evaluar los beneficios producidos en los alumnos a lo largo del proceso en relación al desarrollo de la competencia comunicativa involucrada en la elaboración de los discursos académicos geométricos, como expresa el objetivo 5 (sección 1.2)

Para el diseño del instrumento de análisis correspondiente, hemos tomado como punto de partida, el modelo propuesto por Canale ([62],[63]) para el análisis de la competencia comunicativa teniendo en cuenta cuatro componentes o subcompetencias:

- *Competencia discursiva*: capacidad para lograr discursos coherentes.
- *Competencia sociolingüística*: conocimiento de las reglas socioculturales de uso atendiendo al grado de adecuación a la situación de los participantes, los propósitos, las normas sociales de interacción, etc.
- *Competencia gramatical*: dominio del código lingüístico propiamente dicho.
- *Competencia estratégica*: dominio de estrategias de comunicación que puedan utilizarse para compensar fallos (como falta de recuerdo de una palabra), capacidad de resolver problemas comunicativos.

En nuestro caso concreto, estamos interesados en analizar la competencia comunicativa en un contexto específico como es la clase de Geometría, particularmente el proceso de producción de discursos escritos por parte de los alumnos, como parte de la resolución de problemas geométricos.

Hemos creído necesario entonces, diseñar un instrumento, proponer unas componentes y unos indicadores que si bien debían tener en cuenta orientaciones y criterios generales, también debían responder al contexto específico al que se aplicarían y a los objetivos pretendidos.

---

<sup>3</sup>Importancia reconocida también en el borrador de contenidos mínimos para la ESO: *Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento.* ([185]), p. 752

Por esta razón, las cuatro categorías propuestas por Canale ([62],[63]), se han adaptado, para el análisis de la competencia comunicativa y para la producción de discursos escritos por los alumnos en el contexto específico de la clases de “Taller de Matemáticas”; hemos propuesto un modelo de cuatro componentes con sus indicadores correspondientes.

Las componentes, y sus correspondientes interpretaciones, son las siguientes:

1. *Coherencia* (componente relativa a la competencia discursiva): para analizar la capacidad de elaborar discursos coherentes en los que no aparezcan contradicciones. Las partes del discurso deben estar conectadas dando lugar a un mensaje claro, con sentido y completo.

Analizamos la coherencia tomando en consideración dos niveles, uno centrado en la propia estructura del discurso (intratextual) y otro tomando en consideración la relación entre la solución gráfica<sup>4</sup> y la producción escrita (extratextual).

2. *Cortesía y Adecuación* (componente relativa a la competencia socio comunicativa): para analizar el conocimiento de las reglas socioculturales de uso necesarias para llevar a cabo cualquier acto comunicativo.

Con adecuación, hacemos referencia al uso del texto en un contexto concreto de comunicación; contexto que incluye las circunstancias de lugar y tiempo, las características de los destinatarios, su edad, sus caracteres, la relación que se mantiene con ellos, etc. Las normas de adecuación, se refieren a la utilización de un discurso adecuado al contexto específico. Así, un mismo mensaje puede ser adecuado para dirigirse a un compañero de clase pero inadecuado para dirigirse a un profesor; puede ser adecuado para realizar un comentario en forma oral pero no serlo para expresar una idea por escrito. Los especialistas señalan este último aspecto como característico de la adolescencia: el no diferenciar los distintos registros comunicativos y usarlos indistintamente en los distintos contextos; e identifican que éste aprendizaje corresponde especialmente a la escuela.

Respecto a la cortesía, diremos que si bien hasta hace algunos años, era considerada una característica superflua o clasista, los aportes de

---

<sup>4</sup>No se emplea la expresión “resolución geométrica”, porque entendemos que la resolución geométrica abarca tanto la construcción o solución gráfica como la expresión escrita correspondiente a dicha resolución. Denominamos texto o discurso escrito a dicha producción escrita.

Grice ([129]), le han dado la dimensión de regla regulativa de la comunicación. Así entendida, la cortesía no es algo que sólo embellece el lenguaje sino además un constituyente esencial en la comunicación; en tanto permite evitar conflictos y mantener la armonía en el proceso.

3. *Ortografía y Vocabulario* (componente relativa a la competencia lingüística): para analizar el código lingüístico propiamente dicho. Con ortografía, hacemos referencia al uso correcto de las palabras y signos auxiliares; con vocabulario, al uso correcto del vocabulario general y específico, tanto por su riqueza (cantidad y valoración de palabras que no son usuales en el lenguaje del alumno) como por su precisión (utilización adecuada de esas palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea).

En nuestro contexto específico, estas categorías se refieren no sólo al lenguaje natural en general sino también a las particularidades del lenguaje geométrico; el uso de sus términos, notaciones y modos de decir de un lenguaje tan específico como el matemático, deben ser aprendidos en la clase de Matemáticas.

4. *Creatividad y solución de problemas comunicativos* (componente relativa a la competencia estratégica): para analizar el dominio de estrategias de comunicación, capacidad y creatividad para resolver problemas comunicativos, así como la originalidad de las ideas.

La creatividad y la riqueza de estrategias deben ser un elemento fundamental de la clase de Matemáticas, entendidas desde el “hacer matemáticas” y desde la “resolución de problemas”.

En el caso del análisis de las producciones escritas de los alumnos, entendidas como parte de la resolución de problemas geométricos, también consideramos importante el desarrollo de la creatividad comunicativa, entendida ésta como originalidad de ideas, como capacidad de resolución de problemas comunicativos. Se trata de determinar cuando un alumno es capaz de resolver situaciones a pesar del desconocimiento de un término específico o el olvido de una definición, proponiendo caminos alternativos y superando ese escollo comunicativo.

Establecemos, para cada una de las componentes que hemos señalado anteriormente, los indicadores que se recogen en los Cuadros 3.15, 3.16, 3.17 y 3.18.

Para la ponderación correspondiente, se proponen tres niveles, CC1, CC2 y CC3:

| <b>Componente coherencia</b> | <b>Indicadores:</b>   |
|------------------------------|---|
| INTRATEXTUAL                 | <i>Repeticiones, contradicciones, insuficiencia de ejemplos, insuficiencia de argumentos, desorden, ambigüedad, información insuficiente o excesiva, falta de claridad- inadecuación respecto al objetivo comunicativo.</i> |
| EXTRATEXTUAL                 | <i>Coincidencia entre el procedimiento descrito a través del texto y el llevado a cabo en la construcción.</i>  |

Cuadro 3.15: componentes de la coherencia

| <b>Componente cortesía y adecuación</b> | <b>Indicadores:</b>   |
|---|---|
| RESPECTO                                | <i>Imposiciones de voluntad o imperaciones, ofrecimiento de opciones, reforzamiento de lazos.</i>   |
| ADECUACIÓN                              | <i>Utilización de un registro adecuado a la edad del destinatario, a la relación que se mantiene con el destinatario (relación profesor alumno, relación alumno alumno), y a las circunstancias de lugar y tiempo (ámbito educativo, la clase).</i> |

Cuadro 3.16: componentes de la cortesía y adecuación

| <b>Componente ortografía y vocabulario</b> | <b>Indicadores:</b>  |
|--|--|
| ORTOGRAFÍA                                 | <i>Uso correcto de las palabras y signos auxiliares, propios del castellano en general y del lenguaje geométrico en particular, uso correcto de notaciones.</i>  |
| VOCABULARIO                                | <i>Empleo de palabras que no son usuales en el lenguaje habitual del sujeto, precisión en la utilización adecuada de las palabras, oportunidad de su empleo en el desarrollo de la idea o de su situación en la frase.</i> |

Cuadro 3.17: componentes de la ortografía y vocabulario

| <b>Componente creatividad y solución de problemas comunicativos</b> | <b>Indicadores:</b>  |
|---|--|
| ORTOGRAFÍA  | <i>Utilización de sinónimos cuando no se recuerda una palabra específica, construcción de definiciones convenientes.</i> |

Cuadro 3.18: componentes de la creatividad y solución de problemas

- Nivel Uno (CC1): No logrado
- Nivel Dos (CC2): Logra cumplir las condiciones mínimas (nivel estándar) propuestas por la actividad.
- Nivel Tres (CC3): Logro estratégico amplio, capacidad lograda con

amplitud que supera el nivel estándar planteado.

Además de la ponderación de cada uno de los indicadores individualmente, se establece un nivel general del alumno, que se desprende del análisis anterior y que representa el estado general del alumno en relación a la Competencia Comunicativa Geométrica.

Para establecer estos tres niveles, partimos de lo que entendemos por “*discurso correcto*”. Consideramos que un *discurso correcto* es aquél que además de ser coherente, cumple con las reglas ortográficas y de vocabulario (generales y geométricas), es adecuado (responde a las condiciones relativas a la situación y a los destinatarios sino también a los requerimientos solicitados por la actividad) y, de ser necesario, resuelve los problemas comunicativos como puede ser el olvido de una palabra . Ponderamos este tipo de discursos como de Nivel 3 (CC3) y proponemos otros dos niveles.

**Nivel 1 (CC1):** Discurso no aceptable: Son discursos caracterizados por la falta grave de coherencia, que muestra o bien que el alumno no ha comprendido el problema o bien que aunque puede realizar la resolución gráfica, tiene dificultades graves para expresar sus ideas (esta segunda posibilidad, aunque menos frecuente, aparece en algunos casos). En este nivel se incluye también la “*falta de discurso*”. Este tipo de discursos muestra que actividad planteada no ha resultado asequible para ese alumno y en este caso la actuación del profesor consistirá en replantear la situación o proponer nuevas situaciones que permitan al alumno trabajar sobre las destrezas y conceptos previos con los que muestra dificultades.

**Nivel 2 (CC2):** Discurso aceptable pero mejorable: El discurso carece de alguna o algunas de las características propias de un discurso correcto pero mantiene un grado de coherencia mínimo que posibilita su interpretación y permite una actuación docente orientada a la reformulación (no sólo del discurso sino también de las ideas) por parte del alumno. El docente puede orientar el proceso con preguntas, ayudas progresivas, sugerencias, etc.

**Nivel 3 (CC3):** Discurso correcto. En estos casos, la actuación del profesor se orienta a la propuesta de diversificaciones de la actividad que permitan un enriquecimiento y una profundización de la actividad planteada originalmente y que puede consistir, según el caso, en la búsqueda de una generalización, en la formulación de una conjetura, en una demostración, en el análisis de otros casos posibles, etc.



Estos niveles, han surgido del proceso de análisis exhaustivo de las resoluciones de todos los alumnos mediante el instrumento de análisis propuesto y de la organización de las mismas en categorías según las características del discurso en cada caso.

#### **3.1.4. Criterios generales y específicos para el análisis de la Competencia Comunicativa (CC) y el Aprendizaje en Geometría (AG)**

Como parte de la consecución de los objetivos 3, 4 y 5 (sección 1.2), hemos aplicado los instrumentos diseñados para el análisis de los progresos producidos en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa y al Aprendizaje de la Geometría, a resoluciones sucesivas propuestas por algunos alumnos a lo largo del Taller, con el objeto de estudiar el proceso y establecer un perfil de aprendizaje correspondiente a cada dimensión de análisis.

Realizamos el estudio de tres alumnos, considerando para cada uno de ellos las resoluciones que han elaborado para nueve de las actividades propuestas. La elección, tanto de los alumnos como de las actividades cuyas resoluciones se han analizado, no se ha realizado al azar sino teniendo en cuenta los siguientes criterios metodológicos:

- El número de alumnos (tres), se ha determinado con la finalidad de que este estudio se aplique a una muestra de tal manera que si bien éste no deja de ser un estudio de casos, la cantidad de alumnos estudiados represente a la población de alumnos con la que se trabaja.
- Asimismo, la elección de los alumnos a analizar no ha sido aleatoria sino que la misma se ha realizado en base a la información académica anterior disponible par cada alumno (notas en general, notas en la asignatura Matemáticas, cantidad de suspensos, concepto de los profesores y tutores en relación a actitudes frente al aprendizaje, capacidades generales y específicas, etc.). Así, en base a la información recogida y analizada respecto a la totalidad de los alumnos, se han establecido tres clases o categorías según el rendimiento escolar, que coloquialmente hemos denominado: “alumnos buenos y muy buenos”, “alumnos regulares o medios” y “alumnos de rendimiento insuficiente”.
- Una vez realizada esta categorización, se ha escogido un alumno de cada una de las clases.

- En cuanto a los momentos de corte que se han considerado para el análisis, los mismos se han elegido coincidiendo con la resolución de nueve de las más de 50 actividades que los alumnos resuelven a lo largo del Taller en las distintas fases del mismo.
- Estas nueve actividades seleccionadas corresponden, tres de ella a las etapa presencial (actividades que denotamos con AEP1, AEP2 y AEP3, las mismas son resueltas por los alumnos en ese orden aunque no son correlativas dado que entre ellas se resuelven otras) y otras seis a la etapa correo electrónico (actividades que denotamos con ACE1, ACE2, ACE3, ACE4, ACE5 y ACE6).

Con respecto a este instrumento diseñado para el análisis de la evolución de los alumnos en relación al uso de las TIC; debemos aclarar que si bien en una primera fase de esta investigación hemos realizado el diseño del mismo y también la aplicación del mismo a la totalidad de los alumnos estableciendo así tres categorías o niveles para los estados de los alumnos en relación al conocimiento y utilización de las TIC en los diferentes momentos del Taller (presentado en la sección 3.1.1); para la segunda fase, consistente en la aplicación de los instrumentos de análisis obtenidos a los tres alumnos considerados, hemos centrado el análisis en las dimensiones relativas al Aprendizaje de la Geometría (AG) y a la Competencia Comunicativa (CC), como se ha justificado en el apartado 3.1.

### **Criterios específicos para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG)**

Para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG) a lo largo del proceso considerado (objetivo 3 de la investigación, sección 1.2), hemos procedido de la siguiente manera con cada uno de los seis alumnos tenidos en cuenta.

Cada una de las resoluciones propuestas para ocho de las nueve actividades previamente determinadas (ver Anexo 4) han sido analizadas sometiénolas al instrumento propuesto para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG) de los alumnos<sup>5</sup>

---

<sup>5</sup>No analizamos la resolución de la ACE1 dado que, por tratarse de una actividad en la que los alumnos se presentaban ante el profesor virtual, no aporta datos relevantes en cuanto a la resolución de problemas geométricos.

Se ha realizado así el análisis de cada una de estas resoluciones teniendo en cuenta las componentes y los indicadores propuestos por dicho instrumento, con el objetivo de establecer de qué clase ha resultado ser cada actividad para cada alumno, según las tareas involucradas en dicha resolución<sup>6</sup>

*“Los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias.*

***Primera clase:** Reproducción y procedimientos rutinarios.*

***Segunda clase:** Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.*

***Tercera clase:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.” ([242], p. 59)*

Recordemos que las actividades cuyas resoluciones se analizan, “*se adaptan*” al nivel de competencia del alumno en cada momento gracias a un “*sistema de ayudas y diversificaciones*”; de manera que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el “*itinerario de resolución*” que el alumno haya realizado; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas y diversificaciones que haya requerido.

En base al análisis de cada uno de los indicadores, se establece un nivel general del alumno, nivel que representa el estado general del alumno en relación al Aprendizaje de la Geometría:

- **Nivel Uno (AG1):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Primera clase* (Reproducción y procedimientos rutinarios). Este nivel se caracteriza por un manejo básico de conceptos y procedimientos rutinarios que le permite resolver solamente *ejercicios algorítmicos*”
- **Nivel Dos (AG2):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Segunda clase* (Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados). Este nivel se caracteriza por la capacidad de realizar conexiones e integrar conceptos y procedimientos que le permiten resolver “*problemas de aplicación*”

---

<sup>6</sup>Cabe recordar que aunque aplicamos el instrumento de análisis a las producciones de tres alumnos; fue el estudio cualitativo de las resoluciones del total de los alumnos el que dio lugar al diseño de dicho instrumento.

- **Nivel Tres (AG3):** Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno resuelve una *Actividad de Tercera clase* (Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales). Este nivel se caracteriza por las capacidades de razonamiento, argumentación, intuición y generalización necesarios para resolver “*problemas abiertos*”

### **Criterios específicos para el análisis del desarrollo de la Competencia Comunicativa (CC)**

Para el análisis de la competencia comunicativa a lo largo del proceso considerado, (objetivos 4 y 5, sección 1.2) hemos procedido de la siguiente manera con cada uno de los tres alumnos tenidos en cuenta.

Cada una de las resoluciones propuestas para las nueve actividades previamente determinadas han sido analizadas sometiéndolas al instrumento propuesto para el análisis del desarrollo de la competencia comunicativa (CC) de los alumnos.

Se ha realizado así el análisis cualitativo de cada una de estas resoluciones teniendo en cuenta las cuatro componentes propuestas por dicho instrumento: coherencia, cortesía y adecuación, ortografía y vocabulario y creatividad y solución de problemas comunicativos.

Con el objeto de asignar a cada producción, una ponderación numérica relativa a cada componente que permitiera a su vez establecer una ponderación del estado general del alumno en relación a la Competencia Comunicativa en cada momento; se han propuesto cuatro niveles:

- *Nivel Cero (C0): No logrado*
- *Nivel Uno (C1): Si bien todavía no llega por sí solo al nivel mínimo planteado para la actividad, a través de las ayudas del tutor se aproxima a dichas condiciones mínimas propuestas inicialmente para la actividad.*
- *Nivel Dos (C2): Logra cumplir con las condiciones propuestas por la actividad de manera aceptable pero respondiendo al nivel mínimo pretendido para la actividad.*
- *Nivel Tres (C3): Logro estratégico amplio, capacidad lograda con amplitud que supera el nivel estándar planteado.*

Numéricamente, se han asignado a cada uno de los niveles anteriores los siguientes valores:

- Nivel Cero (C0): 0
- Nivel Uno (C1): 1
- Nivel Dos (C2): 2
- Nivel Tres (C3): 3

Una cuestión importante a destacar es que más allá de las ponderaciones particulares de cada una de las componentes, en todo momento guía el análisis lo que entendemos por “*discurso correcto*”.

Consideramos que un *discurso correcto* es aquél que además de ser coherente, cumple con las reglas ortográficas y de vocabulario (generales y geométricas), es adecuado (responde a las condiciones relativas a la situación y a los destinatarios sino también a los requerimientos solicitados por la actividad) y, de ser necesario, resuelve los problemas comunicativos como puede ser el olvido de una palabra. Ponderamos este tipo de discursos como de Nivel 3 (CC3) y proponemos otros dos niveles.

- *Nivel 1 (CC1)*: Discurso no aceptable: Son discursos caracterizados por la falta grave de coherencia, que muestra o bien que el alumno no ha comprendido el problema o bien que aunque puede realizar la resolución gráfica, tiene dificultades graves para expresar sus ideas (esta segunda posibilidad, aunque menos frecuente, aparece en algunos casos). En este nivel se incluye también la “falta de discurso”. Este tipo de discursos muestra que actividad planteada no ha resultado asequible para ese alumno y en este caso la actuación del profesor consistirá en replantear la situación o proponer nuevas situaciones que permitan al alumno trabajar sobre las destrezas y conceptos previos con los que muestra dificultades.
- *Nivel 2 (CC2)*: Discurso aceptable pero mejorable: El discurso carece de alguna o algunas de las características propias de un discurso correcto pero mantiene un grado de coherencia mínimo que posibilita su interpretación y permite una actuación docente orientada a la reformulación (no sólo del discurso sino también de las ideas) por parte del alumno. El docente puede orientar el proceso con preguntas, ayudas, sugerencias, etc.

- *Nivel 3 (CC3)*: Discurso correcto. En estos casos, la actuación del profesor se orienta a la propuesta de diversificaciones de la actividad que permitan un enriquecimiento y una profundización de la actividad planteada originalmente y que puede consistir, según el caso, en la búsqueda de una generalización, en la formulación de una conjetura, en una demostración, en el análisis de otros casos posibles, etc.

Teniendo en cuenta entonces los aspectos anteriores, una vez realizada la valoración cualitativa de cada componente del discurso y establecida su ponderación numérica; se realiza la ponderación general del discurso tanto a nivel cualitativo como numérico. Numéricamente, hemos establecido la correspondencia que se muestra en la Figura 3.5:

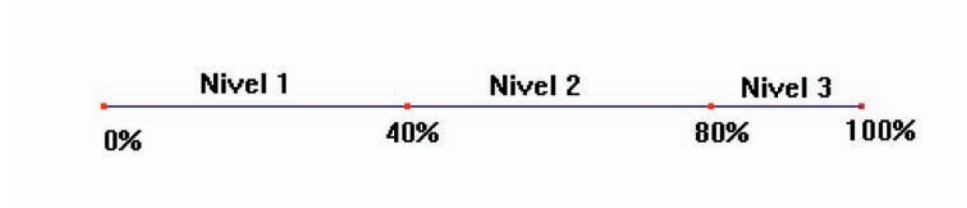


Figura 3.5: Correspondencia numérica para los niveles

Es decir, según el porcentaje numérico asignado en la Figura 3.5, consideramos:

- Discursos no aceptables (o de Nivel 1): aquellos ponderados con menos del 40 % respecto al máximo posible asignado.
- Discursos aceptables pero mejorables (o de Nivel 2): aquellos ponderados con valores comprendidos entre el 40 % (incluido este valor) y el 80 % respecto al máximo posible asignado.
- Discurso correcto (o de Nivel 3): aquellos ponderados con valores comprendidos entre el 80 % (incluido este valor) y el 100 % respecto al máximo posible asignado. (Véase Cuadro 3.19)

**Nota:** Como queda claro a partir de la definición propuesta para “*discurso correcto*”; si bien las componentes guardan cierta independencia que permite su análisis por separado; es la coherencia la que mayor peso tiene en la determinación de la corrección de un discurso. Por tal razón, hemos

| Intervalo:    | Tipo de discurso:                      |
|---------------|--|
| [0 %, 40 %)   | Discursos no aceptables (o de Nivel 1) |
| [40 %, 80 %)  | Discursos aceptables (o de Nivel 2)    |
| [80 %, 100 %] | Discursos correcto (o de Nivel 3)      |

Cuadro 3.19: Intervalos para los diferentes tipos de discurso

considerado que una resolución que presenta *Nivel 1* en relación a esta componente no podrá tener una ponderación general más alta más allá de las ponderaciones obtenidas en relación a las demás componentes.

### 3.2. El Taller de Matemáticas y sus etapas

Las clases de la asignatura “Taller de Matemáticas”, se desarrollan en un aula de Informática, cuyos ordenadores cuentan con programa Cabri Géomètre II, con acceso a Internet y con un navegador. (véase la figura 3.6)

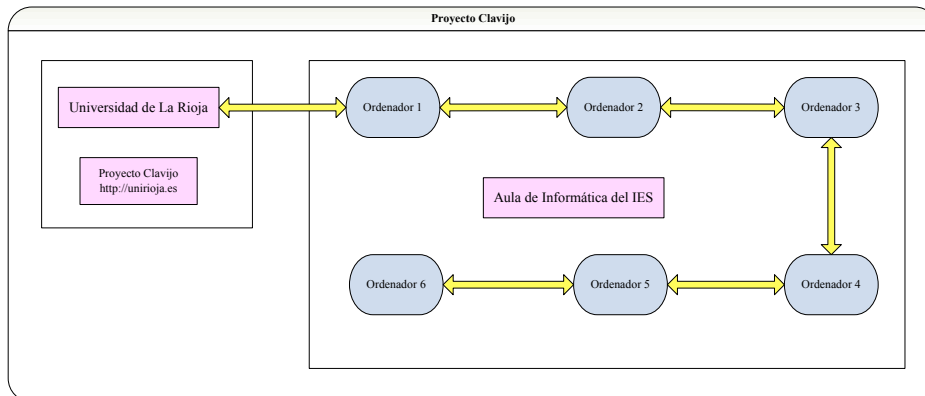


Figura 3.6: Proyecto Clav o

En el desarrollo de la asignatura, se diferencian tres fases o etapas que denominamos: “*etapa presencial*”, “*etapa correo electrónico*” y “*etapa foro electrónico*”. Dichas etapas, aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera fase, “*etapa presencial*”, se trabaja con los alumnos sobre el manejo del entorno interactivo y del software correspondiente. Durante

esta primera etapa, se apunta a que los alumnos aprendan a utilizar el programa y el entorno, a través de la resolución de problemas geométricos de diversa índole (en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas). Las actividades, se proponen por escrito y las clases son coordinadas por un “*profesor presencial*” que acompaña a los alumnos en el aula.

En una segunda fase, “*etapa correo electrónico*”, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del “*profesor virtual*”, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente.

En la tercera fase, “*etapa foro electrónico*”, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas etapas los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse.

Esta modalidad comunicativa para la comunicación alumno profesor y alumno alumno, incluye tanto a las actividades como a sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales.

Así, el uso de las TIC, se convierte no sólo en un medio para la comunicación, sino también un contenido a aprender, tanto en sus aspectos técnicos (¿cómo escribir un correo?, ¿cómo adjuntar un archivo?, ¿cómo participar en el foro?...) como en los relativos a las normas comunicativas adecuadas (encontrar por ejemplo un registro apropiado para elaborar un mensaje dirigido a un profesor, explicitar por escrito las ideas, etc.).

### **3.3. Las actividades propuestas: el sistema de ayudas progresivas y diversificaciones y la idea de itinerario de resolución**

Consideramos que atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso. sino en plantear un entorno que permita,



estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno.

*“Todos los alumnos, independientemente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas. La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros”*([197], p.11).

Y asumiendo la idea de que: *“Los centros y los sistemas educativos deben tener cuidado en acomodar las necesidades especiales de algunos alumnos sin entorpecer el aprendizaje de otros.”* ([197], p. 15); entendemos que la manera más adecuada para llevarlo a la práctica es a través de un currículo que permita diferentes niveles de complejidad y profundidad, posibilitando así a cada uno de los alumnos desarrollar al máximo sus potencialidades.

En el caso del “Taller de Matemáticas”, hemos diseñado un entorno que contempla estas ideas, planteadas en las necesidades previas A y B (sección 1.2), y que atiende la gran diversidad de alumnos presente en los cursos del Instituto Batalla de Clav o (que se describe en el Anexo IV).

Para hacer posible el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno, se han diseñado unas actividades adaptables a cada interlocutor, que especifican tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y que permiten a cada uno desarrollar el máximo nivel de profundidad y complejidad en su resolución.

Según el sistema diseñado, todos los alumnos parten de un mismo enunciado, planteado para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; pero dicho enunciado inicial se irá adaptando a cada resolutor.

Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de un sistema de *“ayudas progresivas y diversificaciones”*.

Las *“ayudas progresivas”* son orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno y pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el

alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

A través de las “*diversificaciones*” de la actividad inicial, el docente propone a cada alumno diferentes niveles de profundidad, complejidad y formalización. Las diversificaciones se proponen una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente por el alumno. Una diversificación puede consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

Con este sistema de “*ayudas progresivas y diversificaciones*”, cada alumno, sigue su propio itinerario de resolución; todos cumplen con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, cada alumno desarrolla al máximo sus potencialidades respecto a ella. Existe un recorrido mínimo llevado a cabo por todos, cumpliendo así con las pautas curriculares mínimas planteadas, pero también damos una respuesta a la atención a la diversidad, de manera tal que se permite a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estén trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminan más rápido avancen hacia otras actividades o tengan que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendemos respetar. Llamamos ***itinerario de resolución*** a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de “*problemas abiertos*”, como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el

itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en “*problema de aplicación*” o en “*ejercicio algorítmico*” para distintos alumnos<sup>7</sup>.

El esquema de la Figura 13, ejemplifica algunos de los distintos itinerarios posibles recorridos por diferentes alumnos en el proceso de resolución de una actividad dada.

El “Alumno1”, ha necesitado de una sola ayuda para resolver la actividad y fue capaz de resolver dos diversificaciones; decimos que resolvió la Actividad K1 y no la Actividad K porque consideramos que al añadir la Ayuda1 ya no estamos frente a la actividad K sino a una menos compleja que llamamos “Actividad K1”.

El “Alumno2”, requirió de tres ayudas para logra resolver correctamente una actividad que ya no es la Actividad K sino la Actividad K3, bastante menos compleja que las Actividades Ki ( $i < 3$ ).

El “Alumno3” fue capaz de resolver la Actividad K a partir de su enunciado original; y pudo avanzar hasta resolver tres diversificaciones correctamente.

Consideramos importante distinguir con cuántas ayudas y de qué tipo resolvió la actividad cada alumno, porque dicha información da cuenta del tipo de problema resuelto; en el caso del ejemplo el “Alumno 1” ha resuelto un “*problema de aplicación*”, el “Alumno 2” ha resuelto un “*ejercicio algorítmico*” y el “Alumno 3” un “*problema abierto*”.

---

<sup>7</sup>Siguiendo a Alsina y otros ([8], pp. 73 75):

- *Ejercicios algorítmicos*: requieren de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, para obtener un resultado buscado.
- *Problemas de aplicación*: implican la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos. El resolutor toma decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Se caracterizan porque en sus enunciados suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar, ...
- *Problemas de enunciado abierto*: sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Se diferencian de los anteriores porque en sus enunciados no suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar, ...

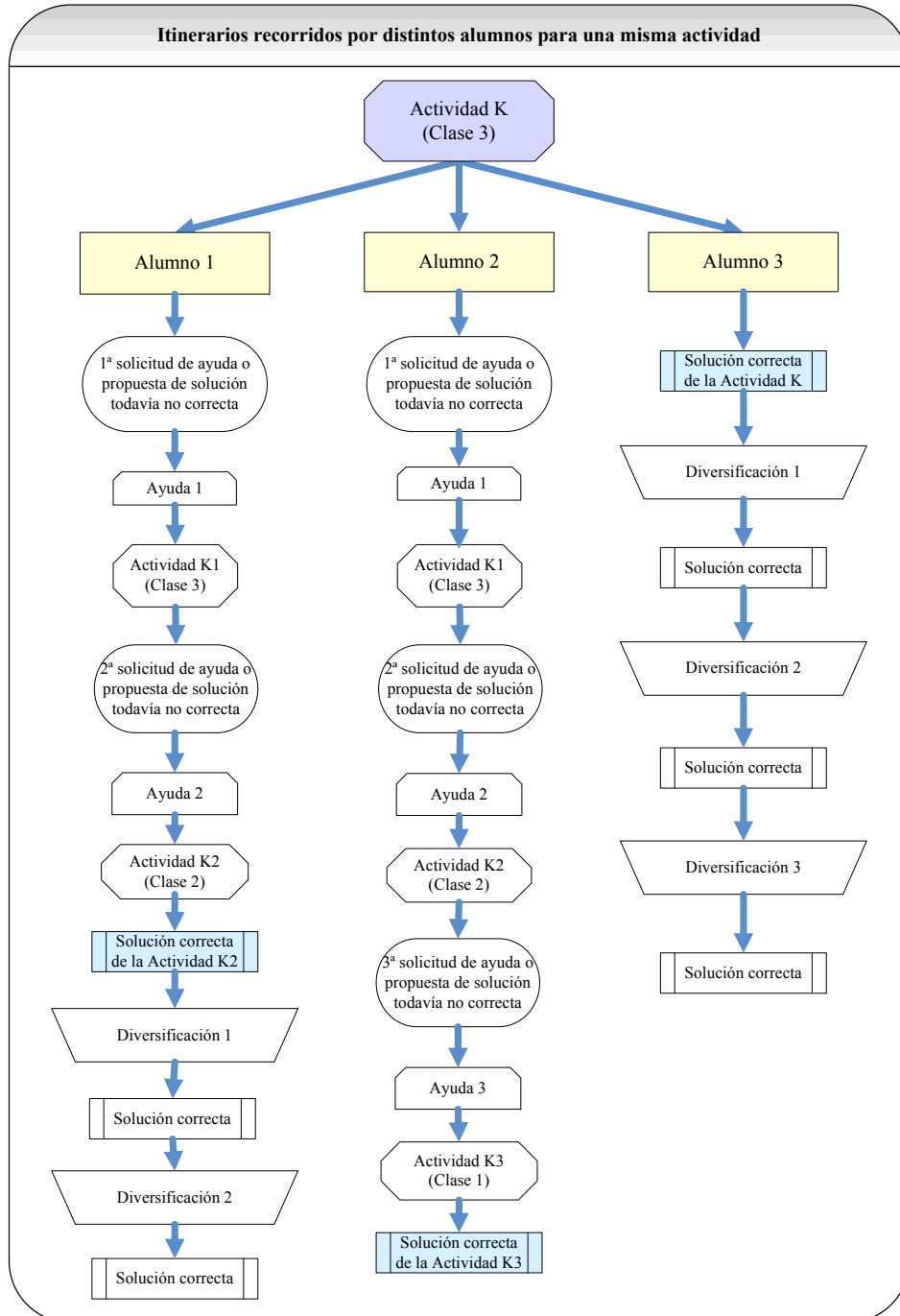


Figura 3.7: Ilustración de itinerarios de los alumnos

Resulta claro entonces que el análisis del itinerario de resolución recorrido por el alumno, aporta una información muy relevante para el estudio del proceso de Aprendizaje de la Geometría, estableciendo qué tipo de actividad ha producido cada enunciado en cada caso, y evaluar la evolución de cada alumno a lo largo del proceso.

### 3.3.1. Criterios utilizados para la organización de las secuencias de actividades.

Las actividades propuestas a los alumnos a lo largo del Taller, cumplen ciertas condiciones de acuerdo a lo desarrollado en las dos secciones anteriores; es decir, para adaptarse a cada una de las tres etapas del proceso (*“etapa presencial”*, *“etapa correo electrónico”* y *“etapa foro electrónico”*) y sus correspondientes modalidades comunicativas y para responder al sistema de *“ayudas progresivas y diversificaciones”* que hemos propuesto para atender a la diversidad de manera que cada alumno pueda recorrer el *“itinerario de resolución”* más conveniente.

Pero más allá de esas características para las actividades, hemos asumido ciertos criterios relacionados con el orden en que éstas se presentan, la manera en que se seleccionan a la hora de construir una secuencia didáctica de actividades.

Las actividades que forman parte de cada una de las secuencias propuestas a los alumnos guardan un orden que respeta criterios de complejidad creciente y resulta acorde a los contenidos y objetivos que se pretenden desarrollar.

Pero entre unas y otras, se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos; es decir las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva. La razón de esta *“decisión didáctica”* radica en el hecho sabido de que los alumnos *“aprenden”* durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; y de la misma manera a identificar en una secuencia de problemas correlativos los contenidos y procedimientos involucrados en su resolución.

Queremos evitar que casi antes de leer una serie de problemas, o con la resolución del primero de ellos, los alumnos puedan realizar afirmaciones del tipo *“éstos se hacen con mediatriz”*, *“éstos son de Pitágoras”*; porque consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo

con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares<sup>8</sup>.

Por tal razón, tanto al organizar el proceso de enseñanza y aprendizaje como el análisis correspondiente del mismo, se han tenido en cuenta estas consideraciones, coherentes con las categorías asociadas a los objetivos 3, 4 y 5 (sección 1.2)

Presentamos a continuación, a modo de ilustración, dos de las secuencias de actividades propuestas a los alumnos. En ambos casos, las actividades que componen cada secuencia se proponen en el orden con el que aquí aparecen pero no de manera consecutiva, sino que entre unas y otras se intercalan otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos, de acuerdo al criterio expuesto más arriba.

### Primera secuencia de actividades (SA1):

En esta primera secuencia de actividades se trabaja el concepto de mediatriz y la propiedad de que todos los puntos ubicados sobre la mediatriz de un segmento equidistan de los extremos de dicho segmento y su recíproco.

#### ■ **ACTIVIDAD 1: Mediatriz de un segmento**

1. Traza un segmento **AB**; luego traza la mediatriz de este segmento con la opción *Mediatriz* y llámala **r**.
2. Marca un punto sobre la mediatriz y llámalo **P**. Mide las distancias de **P** a cada uno de los extremos **A** y **B** del segmento. Mueve el punto **P** sobre **r** y en un comentario, escribe la propiedad que se cumple.
3. Si construimos un triángulo **ABP**; ¿qué tipo de triángulo será? Escríbelo en la pantalla y explica justificadamente porqué.

#### ■ **ACTIVIDAD 2: Trazado de mediatriz sin opción mediatriz**

1. Construye un segmento de extremos A y B.

---

<sup>8</sup>Recordemos que como hemos expuesto en el apartado 2.3.1 del marco teórico, entendemos que la formación matemática debe orientarse al desarrollo de competencias; y que se ha tomado como punto de partida la noción de competencia, entendida como *qué es capaz de hacer el alumno con sus conocimientos y destrezas matemáticas*.

Como se ha citado anteriormente: El concepto de competencia en el proyecto PISA/OCDE pone el acento en “*lo que el alumno es capaz de hacer con sus conocimientos y destrezas matemáticas, más que en el dominio formal de los conceptos y destrezas. Las competencias tratan de centrar la educación en el estudiante, en su aprendizaje y en el significado funcional de dicho proceso*” (Rico, 2003).

2. Te proponemos el siguiente desafío: trazar la mediatriz del segmento sin utilizar las opciones Mediatriz ni punto medio. Una vez que hayas conseguido trazarla, llama  $r$  a dicha recta.
  3. Explica mediante un comentario el procedimiento empleado.
  4. Oculta todos los trazos auxiliares de forma que en la pantalla sólo se vean el segmento y su mediatriz.
- **ACTIVIDAD 3: Estudiando un cometa** Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la Figura 3.8. En el mismo plano de la órbita, hay dos satélites

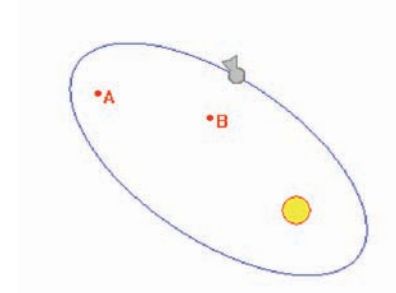


Figura 3.8: Estudiando un cometa

artificiales fijos **A** y **B** encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es estudiado por el satélite que está más próximo a él. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite **A** estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite **B**? Razona tus respuestas.

- **ACTIVIDAD 4: El tesoro escondido 1.** Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro hay solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Se sabe que al situarse junto al abedul (**A**), y mirar hacia la línea recta que une el roble y el pino (**R** y **P**), el roble queda a la derecha y el pino a la izquierda, como muestra la Figura 3.9.



Figura 3.9: El tesoro escondido 1

Para encontrar el tesoro es necesario caminar desde el abedul hacia el roble contando los pasos y al llegar al roble girar en ángulo recto hacia la derecha y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar una estaca (**E1**).

Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde éste hacia el pino, contando los pasos; al llegar al pino hay que girar en ángulo recto hacia la izquierda y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto es preciso detenerse y clavar otra estaca (**E2**).

El tesoro **T** está enterrado precisamente en el punto medio del segmento que une las dos estacas.

Con estas instrucciones tan detalladas, encuentra a partir de las posiciones de los tres árboles, la ubicación del tesoro. Describe el procedimiento que has desarrollado para encontrar la posición de **T**.

■ **ACTIVIDAD 5:** *El tesoro escondido 2.*

Teniendo todas las instrucciones y encontrando el sitio en el que se encuentran los tres árboles resulta bastante sencillo encontrar la posición del tesoro.

Sin embargo, cuenta la historia que un experto buscador de tesoros llegó al sitio indicado y sólo encontró el roble y el pino (el abedul debería haberse secado hace tiempo y no quedaba ningún rastro respecto a cuál había sido su posición).

Dicen que aunque al principio el buscador se desanimó un poco, finalmente logró encontrar exactamente la posición del tesoro.

Surge la pregunta, ¿Cómo habrá logrado hacerlo? Explica y razona cómo crees que lo consiguió.

■ **ACTIVIDAD 6:** *El tesoro escondido 3.*

Cuentan también por ahí que el buscador decidió dejar el tesoro escondido en el mismo punto para volver a buscarlo con ayuda de otras personas debido a que la cantidad y el peso del mismo le hacían imposible manipularlo solo.

Decidió entonces confeccionar un nuevo mapa de referencias para orientarse la siguiente vez de una forma más simple, contando con que el abedul ya no existía.

¿Podrías escribir las indicaciones que habrá dado en esta nueva referencia para encontrar el tesoro conociendo solamente las posiciones del roble y del pino?

Estas seis actividades, que constituyen lo que denominamos Primera Secuencia de Actividades (SA1), se presentan a los alumnos intercaladas entre otras de la manera que mostramos en el Anexo 2.

### Segunda secuencia de actividades (SA2):

En esta segunda secuencia de actividades se trabaja el concepto de mediatrices de un triángulo, el circuncentro y sus propiedades, la circunferencia circunscrita a un triángulo y sus propiedades.

■ **ACTIVIDAD 1:** *Mediatrices de un triángulo*



1. Dibuja un triángulo ABC y traza las mediatrices correspondientes a los tres lados, ¿en cuántos puntos se cortan? (puedes realizar variaciones sobre el triángulo para ver qué ocurre).
2. Enuncia la propiedad correspondiente.

■ **ACTIVIDAD 2: El circuncentro**

1. Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llamaremos circuncentro O al punto de intersección entre ellas.
2. ¿El punto de intersección de las mediatrices pertenece siempre al interior del triángulo? ¿Puede estar fuera del triángulo? ¿Puede pertenecer a un lado?

■ **ACTIVIDAD 3: Circunferencia circunscrita**

1. Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llama O al circuncentro.
2. Traza la circunferencia de centro O y que pase por un vértice del triángulo. ¿Qué ocurre? Explica porqué. La circunferencia que has trazado es la circunferencia circunscrita al triángulo.
3. ¿Dónde se encuentra el circuncentro de un triángulo rectángulo?
4. Justifica la siguiente afirmación: “Dado un triángulo cualquiera, siempre es posible trazar una circunferencia que pase por sus tres vértices”

■ **ACTIVIDAD 4: Gatos y ratones**

El gato Tom, espera que el ratón Jerry salga por alguna de las tres puertas de su ratonera (puertas A, B o C), cercanas al final de un pasillo. Una de las puertas está en una de las paredes del pasillo y la otras dos en la otra, como indica la figura. Sabiendo que Jerry puede salir con igual probabilidad de cada una de las puertas, Tom decide ubicarse en un punto que esté a igual distancia de las tres ¿existe tal punto? ¿hay varios puntos que cumplen esa condición, hay uno solo o no existe ninguno? Si existe tal punto, ¿cómo ayudarías a Tom a encontrarlo? Justifica tus respuestas.(ver gráfico de la Figura 3.10)

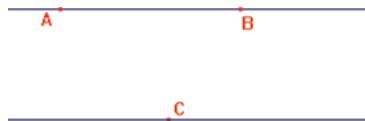


Figura 3.10: Gatos y ratones

■ **ACTIVIDAD 5: En busca del vértice perdido**

Dados dos vértices de un triángulo (A y B), ¿Dónde podrá ubicarse el circuncentro O de dicho triángulo? Analiza cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

- a. Existe una única ubicación posible para O
- b. Existen infinitas ubicaciones posibles para el punto O, pero no es válida cualquier posición.
- c. O puede ser cualquier punto del plano

Piensa ahora, ¿en qué lugar podrá estar ubicado el vértice C del triángulo? ¿Dónde ubicarías C para que el área del triángulo ABC sea lo mayor posible?

■ **ACTIVIDAD 6: Encuentra la circunferencia**

Dibuja una recta  $r$  y sobre ella marca un punto P. Marca otro punto A fuera de la recta.

Encuentra una circunferencia que pase por A y sea tangente a la recta  $r$  por el punto P.

Explica justificadamente en tu comentario el procedimiento que has utilizado para encontrar la circunferencia.

Estas seis actividades, que constituyen lo que denominamos Segunda Secuencia de Actividades (SA2), se presentan a los alumnos intercaladas entre otras de la manera que mostramos en el Anexo 2.

**Ejemplo de actividad presentada en el foro electrónico (AFE):**

Presentamos a continuación, a modo de ilustración, una de las actividades que se han propuesto en el foro electrónico.

**ACTIVIDAD: Investigando sobre trapecios**

En un trapecio cualquiera  $ABCD$ , de bases  $AD$  y  $BC$ , donde  $E$  es la intersección de la diagonales ¿Existe alguna relación los triángulos  $AOB$  y  $DOC$ ? Razona y justifica tu respuesta.(ver gráfico de la Figura 3.11)

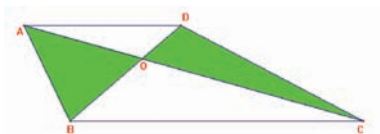


Figura 3.11: Investigando sobre trapecios

**3.3.2. Instrumentos de análisis de las actividades**

En relación con los objetivos 1 y 2 (sección 1.2), hemos analizado las actividades propuestas a los alumnos aplicando para ello tres instrumentos de análisis diferentes que presentamos a continuación.

Este primer instrumento de análisis, nos permite estudiar las actividades, teniendo en cuenta los siguientes criterios: conocimientos matemáticos que exigen (conceptos y estructuras conceptuales, destrezas, estrategias generales), tiempo estimado para la resolución, posibles errores, tipo de actividad (ejercicios de reestructuración; ejercicios de reconocimiento; ejercicios algorítmicos; problemas de aplicación; problemas de enunciado abierto) y conocimientos lingüísticos y semánticos que intervienen. Dicho análisis se ha realizado a través de un instrumento tomado y adaptado de la propuesta realizada por Alsina y otros ([8], pp. 73-75)

1. *Problema N°:*
2. *Enunciado:*
3. *Bloque temático:*
4. *Tipo:*
  - a) Ejercicios de reestructuración
  - b) Ejercicios de reconocimiento
  - c) Ejercicios algorítmicos
  - d) Problemas de aplicación
  - e) Problemas de enunciado abierto
  - f) Problemas tema
5. *Tiempo estimado a emplear*
6. *Conocimientos matemáticos que exige:*
  - a) Conceptos y estructuras conceptuales
  - b) Destrezas
  - c) Estrategias generales
7. *Posibles errores*
8. *Conocimientos lingüísticos y semánticos:*

Detallamos a continuación, la interpretación de cada una de las dimensiones:

1. *Problema N°:* los problemas aparecen ordenados numéricamente correspondiendo dicha numeración al orden en que aparecen en cada una de las secuencias de actividades diseñadas. Cabe recordar que los mismos, fueron presentados a los alumnos en este orden, pero intercalados entre otros con el fin de evitar que puedan enmarcarlos de antemano en una temática geométrica determinada, como se ha explicitado en la sección 3.1.3.

2. *Enunciado*: incluye el contenido completo del enunciado (texto y/o gráficos) del problema tal cual lo recibieron los alumnos
3. *Bloque temático*: se ha tomado la clasificación en bloques temáticos propuesta por los documentos curriculares actuales, y según la cual los contenidos matemáticos aparecen distribuidos en 4 bloques: Aritmética y Álgebra, Geometría, Funciones y Gráficas, Estadística y Probabilidad.
4. *Tipo*: Se considera la siguiente clasificación para los problemas:
  - a) **Ejercicios de reestructuración**: preparan para el aprendizaje de un nuevo concepto o para completar una estructura conceptual. Forman parte de la primera etapa de cada aprendizaje.
  - b) **Ejercicios de reconocimiento**: tienden a enfatizar sobre algunos aspectos, hechos y/ o destrezas, en los que se quiere hacer hincapié (por ejemplo, recordar una definición, una fórmula, etc.)
  - c) **Ejercicios algorítmicos**: requieren de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, para obtener un resultado buscado.
  - d) **Problemas de aplicación**: implican la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos. El resolutor toma decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Se caracterizan porque en sus enunciados suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar,...
  - e) **Problemas de enunciado abierto**: sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Se diferencian de los anteriores porque en sus enunciados no suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar,...
  - f) **Problemas tema**: son los que surgen, quizá inesperadamente, a partir del interés de los alumnos o de la vinculación que realizan a partir de una situación dada, generando nuevas situaciones.
5. *Tiempo estimado a emplear*: corresponde al tiempo estimado que empleará un alumno medio en resolver la actividad. Cabe destacar que la

metodología de trabajo hace que el mismo pueda hacerse muy flexible, respetando los requerimientos y tiempos personales.

6. *Conocimientos matemáticos que exige:*
  - a) **Conceptos y estructuras conceptuales:** incluye los conceptos básicos involucrados (conocidos y nuevos) y sus relaciones.
  - b) **Destrezas:** se especifican las destrezas matemáticas que se requieren para resolver el problema (operaciones, aplicación de fórmulas, realización de construcciones, etc.)
  - c) **Estrategias generales:** se incluyen los heurísticos, métodos y procedimientos generales.
7. *Posibles errores:* se enumeran los errores más frecuentes que los alumnos podrían cometer en la resolución del problema.
8. *Conocimientos lingüísticos y semánticos:* se detallan los aspectos vinculados al lenguaje que necesitan los alumnos para comprender el enunciado del problema y para realizar la comunicación del proceso llevado a cabo en la resolución, incluyendo términos, notaciones, convenios, nuevas expresiones, etc.

### 3.3.3. Segundo instrumento de análisis de las actividades

Este segundo instrumento de análisis, tiene en cuenta los procesos comunicativos de las distintas fases del Taller.

Como hemos descrito anteriormente, a lo largo del proceso de enseñanza y aprendizaje propuesto, se diferencian claramente tres etapas, que denominamos: “*etapa presencial*”, “*etapa correo electrónico*” y “*etapa foro electrónico*”; etapas que aparecen cronológicamente en el orden en que se han mencionado aunque la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

Estas etapas, se caracterizan por presentar modalidades comunicativas muy diferentes; haciendo entonces que las actividades propias de cada una de ellas también resulten muy distintas entre sí, en función de estas modalidades.

Nos propusimos dicho análisis con el objeto de determinar los elementos mínimos necesarios que deben aparecer en las actividades en función de los procesos comunicativos que ocurren en cada una de las tres etapas del Taller.

Cada una de las etapas ha sido caracterizada tomando en consideración las interacciones producidas (alumno alumno, alumno profesor real, alumno profesor virtual), el carácter de dichas interacciones (presencial, a distancia), la modalidad comunicativa (oral, escrita presencial, escrita asincrónica), y los roles establecido (simetría, asimetría). Véase Figura 3.12.

Como puede verse en el cuadro Figura 3.12, dentro de la denominada “*etapa correo electrónico*”, se diferencian dos versiones; en una de ellas, las que corresponden a la “*versión Cabri*”, las resoluciones de las actividades requieren necesariamente del software Cabri mientras que las que corresponden a la “*versión Cabri Java*” pueden resolverse sin contar con dicho software; es suficiente con un navegador que soporte Java.

La ventaja de esta segunda versión radica básicamente en que no es necesario disponer de Cabri II para acceder a la actividad, sin que esto suponga perder “lo dinámico”, ya que se sigue contando con las posibilidades de analizar el proceso y sus variaciones que ofrece Cabri II. La desventaja consiste en que el alumno recorre un proceso propuesto y, aunque puede producir variaciones, no es él quien realiza la traducción del enunciado a la construcción geométrica. En cuanto a las interacciones y la comunicación, en la etapa presencial las interacciones profesor- alumno siguen marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio- temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:

- *Interacción directa, sucesiva, reversible*
- *Inmediatez interlocutiva*
- *Se comparte el contexto situacional.*
- *Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.*
- *Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.*

En esta etapa, la comunicación escrita aparece como parte de la “*actividad escolar*”: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar los problemas que se plantean por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados. Pero es la comunicación oral la que interviene más fuertemente; influyendo incluso en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos: las dudas que se

|  | <b>presencial</b>   | <b>correo electrónico (Cabri)</b>  | <b>correo electrónico (CabriJava)</b>   | <b>foro electrónico</b>  |
|--|---|--|---|--|
| <b>Interacciones principales:</b>                            | alumno-profesor presencial  | alumno-profesor virtual<br><br>alumno-profesor presencial<br><br>alumno-alumno   | alumno-profesor virtual<br><br>alumno-profesor presencial<br><br>alumno-alumno  | alumno-profesor virtual<br><br>alumno-profesor presencial<br><br>alumno-alumno |
| <b>Carácter</b>  | Presencial  | A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Cabri II y correo electrónico  | A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico  | A distancia (mediada por el ordenador y las TIC): foro electrónico             |
| <b>Modalidad comunicativa: Interacciones y comunicación:</b> | Oral y escrita<br><br>Interacciones profesor-alumno marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio-temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral.<br><br>La comunicación escrita aparece como parte de la "actividad escolar"<br><br>La comunicación oral interviene incluso en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos. | Escrita asincrónica<br><br>La comunicación escrita se convierte en "la única forma de comunicación", dejando de ser un "ejercicio escolar"<br><br>La recepción se basa en la comprensión lectora y el mensaje producido a la expresión escrita.<br><br>Se diferencian claramente los momentos de producción y de recepción: contacto en diferido.<br><br>No se comparte el contexto situacional.<br><br>Se comparte el contexto referencial (saberes consensuados), los mensajes (actividades incluidas) deben referirse a ese contexto y especificarlo hasta el nivel que requiera su comprensión.<br><br>Novedad (ventaja): el alumno como emisor, puede (y debe) reconsiderar su producción, organizar, corregir, modificar, etc.; siguiendo las fases de la producción escrita: planificación + textualización + revisión (etapas no necesariamente secuenciales). | Escrita asincrónica<br><br>El foro electrónico es una forma de interacción "mixta":<br><br>- Se produce en tiempo casi real<br><br>- Se pueden negociar los significados de manera más inmediata. |  |

Figura 3.12: Caracterización de las distintas etapas

plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a “atender a la diversidad” , se realizan de forma oral.

En la etapa “*correo electrónico*”, la comunicación escrita se convierte prácticamente en “*la única forma de comunicación*”, dejando de ser un “*ejercicio escolar*” para convertirse en una forma real de comunicación, lo que conlleva a una resignificación de los procesos de comprensión y producción escritas.

La recepción pasa ahora por la comprensión lectora y el mensaje producido se basa en la expresión escrita. Se diferencian claramente los momentos de producción y de recepción (tanto en los alumnos como en el profesor), porque los roles son sucesivos y diferenciados en tiempo y lugar; el contacto es en diferido.

Dado que no se comparte el contexto situacional, toda referencia debe estar especificada con el detalle necesario.

Se comparte el contexto referencial (saberes consensuados), los mensajes (actividades incluidas) deben referirse a ese contexto y especificarlo hasta el nivel que requiera su comprensión: aportar la información suficiente y necesaria, utilizar el registro adecuado (formalidad de la comunicación escrita), etc.

Una marcada diferencia entre esta etapa y la presencial es que el alumno como emisor, puede (y debe) reconsiderar su producción, organizar, corregir, modificar, etc.; siguiendo las fases de la producción escrita: conceptualización + textualización + revisión (etapas no necesariamente secuenciales)<sup>9</sup>, la

---

<sup>9</sup>Si bien para analizar las fases o etapas del proceso de producción de textos escritos, y los subprocesos que lo integran, existen diferentes modelos; la mayoría, coincide en identificar tres fases generales (fases que no se suceden de manera lineal o secuencial sino más bien el productor mientras escribe, idea y planifica la continuidad del texto a la vez que revisa y corrige lo ya redactado). Según Briz ([48], pp. 79 123):

**Fase de conceptualización:** en la que se genera, selecciona y organiza el contenido comunicativo del mensaje, las “ideas” que se pretenden comunicar (fase preverbal, de definición de intenciones, objetivos y generación de ideas)

**Fase de ejecución o textualización:** transformación de los contenidos en un texto escrito organizado linealmente, atendiendo a exigencias gráficas, ortográficas, léxicas, morfológicas, sintácticas, etc.; es decir pasar de una organización semántica a una organización lineal, lo que requiere de una constante revisión y replanificación.

**Fase de revisión:** consiste en la lectura, revisión y mejora del texto teniendo en cuenta los objetivos y también la coherencia, desde la conclusión de la primera versión hasta la elaboración del texto definitivo, aunque pueden estar presentes durante



diferencia aparece especialmente en la revisión, que en esta etapa queda a su cargo mientras que en la anterior usualmente tienden a recurrir al profesor (quizá por la tendencia escolar fuertemente arraigada de que el que corrige y determina “si está bien” es el docente); en este caso el alumno amplía su rol de alumno al de comunicador, de usuario de la comunicación (uso reflexivo, autónomo y consciente del hacer matemáticas y de acto de comunicarse)

En la etapa “*foro electrónico*”, la interacción es “*mixta*”, en el sentido de que si bien la modalidad es escrita, comparte algunas características con la comunicación oral:

- *Se produce en tiempo casi real*
- *Se pueden negociar los significados de manera más inmediata*

A partir de la caracterización anterior de las etapas, se han esbozado condiciones mínimas para las actividades propuestas en cada etapa. Véase Figura 3.13.

Las actividades de la “*etapa presencial*”, aunque presentan la novedad del uso de Cabri II para su resolución y del abordaje de problemas geométricos (a los que los alumnos no suelen estar habituados), tienen un formato conocido por los alumnos: consisten en un texto que plantea alguna construcción o reflexión geométrica. Son problemas de aplicación que lo que persiguen es que los alumnos se familiaricen con el uso del Programa y a la vez reflexionen sobre algunos conceptos y relaciones geométricos ya conocidos. Otra novedad es que se plantea como parte de la solución del problema geométrico, la explicación del procedimiento y de las relaciones utilizadas usando lenguaje verbal; lo cual también constituye una preparación que en la siguiente etapa se convertirá en imprescindible para la comunicación (es de preparación, dado que en esta etapa el alumno todavía puede recurrir al profesor real y a la interacción presencial para realizarla).

Las actividades de la “*etapa correo electrónico*” deben ser adaptables al resolutor, con la posibilidad de permitir distintos niveles de exigencia y profundidad, de manera que especifiquen tanto como sea necesario -y suficiente- para cada alumno y permitir a cada uno el máximo desarrollo posible según sus potencialidades: desafío de atención a la diversidad.

Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de “*ayudas progresivas*” que se administran según las necesidades del caso y a través

---

todo el proceso.

| Las actividades:   |   |   |   |
|--|---|---|---|
| Etapa presencial   | Etapa correo electrónico (Versión Cabri)  | Etapa correo electrónico (Versión Cabri Java)   | Etapa foro electrónico  |
| <p><i>“Actividades escolares”</i>: Si bien el uso de Cabri II para su resolución, y el abordaje de problemas geométricos son una novedad para los alumnos; el formato de las actividades les resulta conocido.</p> <p>Otra novedad consiste en el requerimiento de la “explicación del procedimiento” usando lenguaje natural.</p> | <p><i>“Actividades adaptables al resolutor”</i>: Pretendemos que las actividades planteadas resulten “problemas” para cada uno de los alumnos, que resulten abordables pero también con la complejidad suficiente como para permitir un avance conceptual en cada alumno.</p> <p>Para ser adaptables a cada interlocutor, deben especificar tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y permitir a cada uno el máximo desarrollo posible según sus potencialidades: desafío de atención a la diversidad</p> <p>Esta adaptabilidad a receptores tan diversos, se logra a través de un sistema de “ayudas progresivas y “diversificaciones” de la actividad inicial y general (destinada al total de los alumnos) permitiendo que cada uno siga un “itinerario de resolución” conveniente.</p> | <p>Tienen las mismas características que las de la Versión Cabri en cuanto a la adaptabilidad y a la atención a alumnos diversos.</p> <p>Se diferencian de las anteriores en cuanto a que éstas se soportan en Cabri- Java; con lo cual pueden resolverse sin el programa Cabri.</p> <p>Por esta razón, apuntan al análisis de relaciones y propiedades geométricas, formulación de conjeturas, comprobaciones y demostraciones sencillas; pero no incluyen los procedimientos de construcción geométrica por parte del alumno.</p> | <p><i>“Actividades abiertas”</i>:</p> <p>Las actividades son más abiertas que en la fase anterior, porque son las interacciones entre pares las que funcionan como “ayudas progresivas” y/o diversifican el itinerario por el que se discurre.</p> <p>Asimismo, el profesor, tiene la posibilidad de intervenir en el foro; con lo que la actividad tiene un formato susceptible de intervenciones docentes que se irán graduando según el proceso.</p> |

Figura 3.13: Las actividades

de “diversificaciones” de la actividad inicial y general (destinada al total de los alumnos) permitiendo que cada uno siga un *itinerario de resolución* conveniente.

Estas intervenciones pueden aparecer de dos maneras: a través del mismo correo electrónico o a través de enlaces que permiten a cada alumno recurrir a ellas en caso de necesidad.

Asimismo, existe una diferencia entre las actividades de la versión Cabri y de la versión Cabri Java de la etapa correo electrónico; la misma consiste en que como las actividades de esta segunda versión se soportan en Cabri Java (con lo cual pueden resolverse sin el programa Cabri); apuntan al análisis

de relaciones y propiedades geométricas, formulación de conjeturas, comprobaciones y demostraciones sencillas; pero no incluyen los procedimientos de construcción geométrica por parte del alumno.

Las actividades de la tercera etapa “*foro electrónico*” deben ser más abiertas que en la fase anterior, porque son las interacciones entre pares las que funcionan como “ayudas progresivas” y/o diversifican el itinerario por el que se discurre. Asimismo, el profesor, tiene la posibilidad de intervenir en el foro; con lo que la actividad tiene un formato susceptible de intervenciones docentes que se irán graduando según el proceso; aunque en general sólo lo hace para establecer la finalización e institucionalización de las soluciones.

### 3.3.4. Tercer instrumento de análisis de las actividades

Además de los dos instrumentos anteriores, diseñados en el marco de esta investigación, hemos analizado las actividades propuestas aplicando criterios propuestos por el informe PISA, y que tienen en cuenta la complejidad de las competencias involucradas en su resolución: “*Los ítems que se diseñan proponen tres clases de tareas, que se diferencian por el grado de complejidad que requieren en las competencias*”

**Primera clase:** Reproducción y procedimientos rutinarios.

**Segunda clase:** Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados.

**Tercera clase:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.”

Los indicadores para la complejidad de las tareas en cada una de las categorías se resumen en la tabla recogida en el Cuadro 3.20 ([242], p. 60).

En este caso la competencia hace relación a la complejidad de la tarea:

*“El requerimiento de procesos más complejos, creativos o estructurados delimita distintos tipos de competencias en los estudiantes que, en principio, se concretan en esas tres clases. Alumnos más competentes llevarán a cabo procesos de mayor complejidad; alumnos menos competentes sólo trabajarán procesos de complejidad menor. En este caso la competencia de los estudiantes se refiere a las capacidades individualmente desarrolladas, que se ponen de manifiesto por el tipo de tareas abordadas*”

| Reproducción                             | Conexión   | Reflexión  |
|--|--|--|
| <i>Contextos familiares</i>              | <i>Contextos menos familiares</i>  | <i>Tareas que requieren comprensión y reflexión</i>  |
| <i>Conocimientos ya practicados</i>      | <i>Interpretar y explicar</i>  | <i>Creatividad.</i>  |
| <i>Aplicación de algoritmos estándar</i> | <i>Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación</i>              | <i>Ejemplificación y uso de conceptos</i>  |
| <i>Uso de fórmulas elementales</i>       | <i>Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios</i> | <i>Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos</i><br><i>Generalizar y justificar resultados obtenidos.</i> |

Cuadro 3.20: Indicadores para la complejidad de las tareas

*con éxito. Se acepta la hipótesis de que los estudiantes que alcanzan a dar respuesta a tareas de alta complejidad, muestran un alto nivel de competencia matemática con las herramientas utilizadas y en la situación considerada.” [?],p. 61)*

En nuestro caso, estos niveles no se tienen en actividades distintas, porque cada actividad “se adapta” al nivel de competencia del alumno en cada momento. Así resulta que una misma actividad puede resultar de primera, segunda o tercera clase según el itinerario que el alumno haya realizado para resolverla; es decir, según la cantidad y tipo de ayudas que haya requerido.

Aplicamos este tercer instrumento para analizar de qué tipo de tarea se trata el enunciado inicial de la actividad.

En el Anexo III, aplicamos estos tres instrumentos para analizar las actividades de la Primera Secuencia de Actividades (SA1), de la Segunda Secuencia de Actividades (SA2) y una de las actividades propuestas en el foro electrónico (AFE).

### 3.4. La población a estudiar. Tres alumnos

Realizamos el estudio de tres alumnos, considerando para cada uno de ellos las resoluciones que han elaborado para nueve de las actividades propuestas. La elección, tanto de los alumnos como de las actividades cuyas resoluciones se han analizado, no se ha realizado al azar sino teniendo en cuenta los siguientes criterios metodológicos:

- La cantidad de alumnos (tres), se ha determinado pretendiendo que este estudio se aplique a una muestra de tal manera que si bien éste no deja de ser un estudio de casos, la cantidad de alumnos estudiados represente a la población de alumnos con la que se trabaja.
- Asimismo, la elección de los alumnos a analizar no ha sido aleatoria sino que la misma se ha realizado en base a la información académica anterior disponible par cada alumno (notas en general, notas en la asignatura Matemáticas, cantidad de suspensos, concepto de los profesores y tutores en relación a actitudes frente al aprendizaje, capacidades generales y específicas, etc.). Así, en base a la información recogida y analizada respecto a la totalidad de los alumnos, se han establecido tres clases o categorías según el rendimiento escolar, que coloquialmente hemos denominado: “alumnos buenos y muy bueno”, “alumnos regulares o medios” y “alumnos de rendimiento insuficiente”.
- Una vez realizada esta categorización, se ha escogido un alumno de cada una de las clases.
- En cuanto a los momentos de corte que se han considerado para el análisis, los mismos se han elegido coincidiendo con la resolución de nueve de las más de 50 actividades que los alumnos resuelven a lo largo del Taller en las distintas fases del mismo.
- Estas nueve actividades seleccionadas corresponden, tres de ella a las etapa presencial (actividades que denotamos con AEP1, AEP2 y AEP3, las mismas son resueltas por los alumnos en ese orden aunque no son correlativas dado que entre ellas se resuelven otras) y otras seis a la etapa correo electrónico (actividades que denotamos con ACE1, ACE2, ACE3, ACE4, ACE5 y ACE6).

### 3.4.1. Descripción de los alumnos analizados

Realizamos a continuación, una breve descripción de cada uno de los tres alumnos analizados en detalle en relación a su evolución relativa al Aprendizaje de la geometría (AG) y en cuanto al desarrollo de la Competencia Comunicativa (CC).<sup>10</sup>

---

<sup>10</sup>En el Anexo IV, presentamos algunas características generales del IES y del curso en el que se desarrolla la experiencia en particular.

**Alumno 1 (Javier)**

Javier corresponde a la clase definida como “*alumnos de rendimiento alto*” (su nota media es 7). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar entre bueno y muy bueno según las asignaturas; teniendo una especial preferencia por las relacionadas con las Ciencias Exactas y la Informática. Suele aprobar todas las asignaturas, no ha repetido curso, es un alumno comprometido con sus estudios, tiene una asistencia casi perfecta a clase, su comportamiento general es muy bueno y está bien integrado con sus compañeros. Tiene ciertos conocimientos previos de Informática, algo poco común en los alumnos de este Instituto, pero en su caso esto se debe a que su padre se dedica a la Informática. Las Matemáticas le resultan agradables y nunca le han resultado de gran dificultad.

En las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares se ha notado una actitud de compromiso e interés; es de los pocos alumnos que presta atención, copia de la pizarra, intenta resolver las tareas que el profesor solicita, y muestra preocupación por aprobar los exámenes (consulta dudas en las clases anteriores, pregunta si ciertos temas serán incluidos, etc.). Esta actitud coincide con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que se esfuerza por avanzar, por resolver con corrección las actividades propuestas, teniendo una actitud de mucho interés. Como muchos de los alumnos de esta clase que denominamos “clase de buenos alumnos”, manifiesta explícitamente su intención de continuar estudiando después de finalizar la ESO y reconoce en la escolaridad aportes a su formación y a sus posibilidades futuras.

**Alumno 2 (Blas)**

Blas corresponde a la clase definida como “*alumnos de rendimiento bajo*” (suele suspender la mayor parte de las asignaturas). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar bastante deficiente, especialmente es las asignaturas relacionadas con Matemáticas y Ciencias. Es repetidor de curso, y aún así suspende las asignaturas; no está comprometido con sus estudios; y, aunque tiene una asistencia casi perfecta a clase y su comportamiento general es bueno, muestra habitualmente una actitud de desinterés y de no compromiso con su aprendizaje. Sus conocimientos previos de Informática son prácticamente nulos.

En las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares tiene una actitud de total desinterés; no presta atención, no copia de la

pizarra, no hace las tareas ni en clase ni en casa, ni siquiera intenta aprobar los exámenes. Esta actitud contrasta con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que a pesar de sus falencias evidentes (tanto en lo que respecta a sus conocimientos matemáticos previos, como a la competencia comunicativa y al manejo informático), tiene una actitud de interés. Como muchos de los alumnos de esta clase que denominamos “alumnos con dificultad elevada”, manifiesta explícitamente estar esperando a cumplir los 16 años para salir del Instituto y comenzar a trabajar y no identifica en la escolaridad ningún aporte a su formación ni a sus posibilidades futuras.

### Alumno 3 (Stefan)

Stefan corresponde a la clase definida como “*alumnos de rendimiento medio*” (suele suspender algunas asignaturas, aproximadamente entre tres y seis). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar medio. Es de nacionalidad rumana y lleva cuatro años en España. Si bien maneja bastante bien el español, es un joven introvertido y muy reservado, más bien solitario; durante las clases permanece muy callado, interactuando muy poco con sus compañeros y profesores. No obstante, es un muchacho aceptado por sus pares y la relación es, aunque poco fluida, amable y respetuosa. Tiene una asistencia casi perfecta a las clases de Taller de Matemáticas y su comportamiento general es muy bueno; su actitud tan introvertida a veces puede dar la sensación de desinterés o indiferencia respecto al aprendizaje, pero lo cierto es que sí se compromete con sus tareas. Sus conocimientos previos de Informática son prácticamente nulos.

Contrastando con esta actitud, en las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares se ha notado una actitud de poco interés; su comportamiento no es conflictivo como el de otros alumnos que además de no interesarse generan indisciplina pero su participación es nula en dichas clases y de hecho suspende la asignatura. Como hemos dicho más arriba, esta actitud contrasta con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que no sólo demuestra poseer conocimientos previos y buen manejo matemático, sino que además evidencia cierta facilidad para la asignatura y una actitud de gusto por las tareas matemáticas.





## Capítulo 4

# Análisis e interpretación de datos

Con los planteamientos e instrumentos establecidos, procedemos a realizar el análisis, estudio y evaluación correspondiente.

### 4.1. Aplicación de los instrumentos de análisis de los aprendizajes de los alumnos

Para el análisis del Aprendizaje de la Geometría (AG) y del desarrollo de la Competencia Comunicativa (CC) por parte de los alumnos a lo largo del proceso (objetivos 3, 4 y 5, sección 1.2), hemos aplicado los instrumentos diseñados para tal fin (que hemos presentado en la sección 3.1), teniendo en cuenta también los criterios de selección y distribución que en dicha sección exponíamos.

Así entonces, hemos evaluado mediante los instrumentos de análisis propuestos para el desarrollo de la Competencia Comunicativa y para el Aprendizaje de la Geometría, las resoluciones llevadas a cabo por cada uno de los tres alumnos seleccionados, en relación a estas nueve actividades consideradas (cuyos enunciados pueden leerse en el Anexo VIII).

En muchos casos, hasta llegar a la versión definitiva de la resolución, los alumnos proponen varias versiones intermedias que a través de la orientación docente a través de ayudas y diversificaciones de la actividad inicial (tutorización), de las interacciones con los pares y de los propios procesos

de reflexión/ revisión/control se van mejorando y completando. Estas versiones preliminares, dan cuenta del itinerario de resolución seguido por cada alumno, aportando información relevante en relación al estado de la competencia comunicativa y del aprendizaje de la geometría del alumno en cada momento.

Con el objeto de visualizar fácil y claramente cuál ha sido el itinerario de resolución seguido por cada alumno para la resolución de cada actividad, dichos itinerarios se esquematizan gráficamente. Estas representaciones gráficas, permiten hacerse una idea rápida de cada itinerario, identificando la cantidad de ayudas que fueron necesarias, el número de diversificaciones que el alumno pudo resolver, el momento en el que ha arribado a la solución correcta, etc. Dichos esquemas, han surgido del análisis exhaustivo de cada proceso de resolución (sucesivas versiones preliminares de solución, solicitudes de ayuda, orientaciones docentes, interacciones con compañeros, etc.); estos procesos de resolución completos propuestos (Anexo VIII) y los itinerarios de resolución correspondientes por cada alumno para cada actividad (Anexo VI).

Si bien a continuación sólo expondremos la valoración general de cada resolución en cuanto a la Competencia Comunicativa y en cuanto al Aprendizaje de la Geometría; cabe aclarar que dicha valoración surge del estudio de las distintas componentes para cada dimensión; análisis que también aparece detallado en el Anexo VIII para cada resolución.

## 4.2. Evolución producida en relación al Aprendizaje de la Geometría (AG)

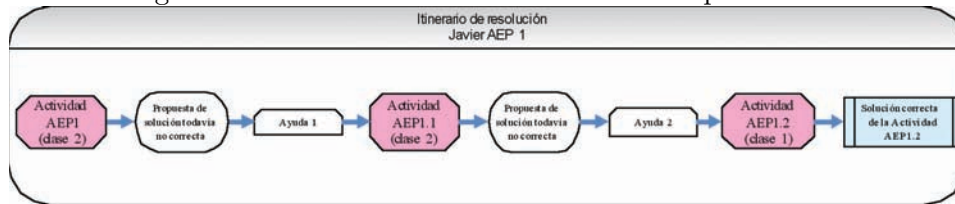
Presentamos para cada uno de los alumnos considerados, su itinerario de resolución y el análisis del aprendizaje de la Geometría.

### 4.2.1. Alumno 1 (Javier):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.1) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

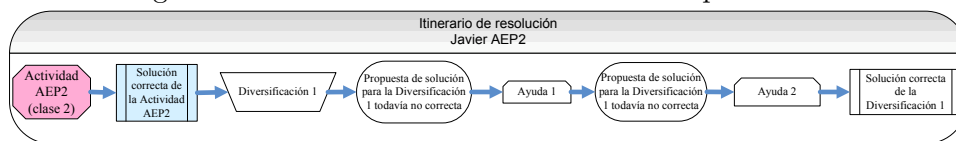
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*  
Esta fase no aparece en esta actividad

Figura 4.1: Itinerario de resolución de Javier para AEP1



- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar circunferencias para conservar distancias (el radio es invariante) y que las perpendiculares le permiten obtener un cuadrilátero de ángulos rectos; muestra que maneja no sólo estos conceptos y relaciones sino también las características de los cuadrados
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo una construcción correcta y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.
  - **Con Ayudas:** Sin embargo, le resulta difícil diferenciar las condiciones mínimas para que el cuadrilátero que él mismo ha construido sea un cuadrado y ante ese pedido enumera todas las características que tiene el cuadrado y que conoce de cursos anteriores.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo, paso a paso.
  - **Con ayudas:** Para que explicitara la justificación de la corrección a través de propiedades y relaciones, fue necesaria la intervención del tutor en dos ocasiones.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Figura 4.2: Itinerario de resolución de Javier para AEP2



- Dado que fueron necesarios varias ayudas (dos) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.
- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Primera clase*, que se corresponde con un *Nivel 1*.

ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución*(Figura 4.2) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*.

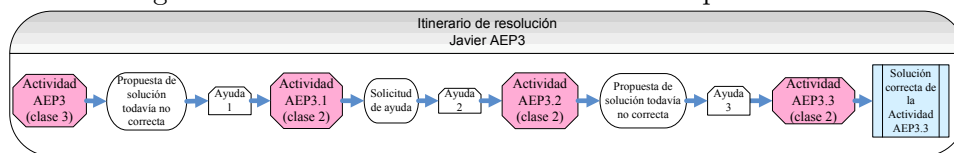
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario) Esta fase no aparece en esta actividad*
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento; como conceptos y relaciones involucrados aparecen la perpendicularidad y la equidistancia a los extremos del segmento como condiciones para la mediatriz. Para la segunda construcción, propone otro procedimiento correcto que involucra otros conceptos y relaciones vinculadas a los rectángulos y sus propiedades; aunque como se nota en las justificaciones, realiza dicha aplicación de conceptos y relaciones de manera muy intuitiva y se le hace difícil explicitarlos (incluso con varias ayudas).
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento, repitiendo con Cabri un procedimiento que ya ha aplicado en cursos anteriores con lápiz, regla y compás. Para la segunda propuesta de solución, de nuevo el procedimiento es correcto

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo dos construcciones correctas y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.
  - **Con Ayudas:** No obstante, el alumno no profundiza su nivel de reflexión en el sentido de que para validar y justificar su propuesta utiliza sólo herramientas de Cabri y la descripción del proceso de construcción desarrollado. Le resulta muy difícil justificar su construcción por dos razones; por un lado tiene dificultades para identificar y explicitar los conceptos, relaciones y estrategias ya que los aplica de manera muy intuitiva y a esto se suman las sabidas dificultades con el proceso de justificación/ demostración en sí mismo que presentan los alumnos. Esta es una de las primeras actividades que propone este tipo de tarea matemática prácticamente desconocida por los alumnos y que se relaciona con las demostraciones sencillas; actividades que se irán haciendo más complejas a lo largo del proceso.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo..
  - **Con ayudas:** Sin embargo, aunque se le pide “justificar” el segundo procedimiento, se limita a describir el proceso sin justificar porqué es correcto (confundiendo la explicación de lo realizado con la justificación de su validez). Como se ha dicho más arriba, es también el comienzo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, recurriendo para ello a un procedimiento que había ideado para resolver una actividad anterior. Para resolver totalmente la diversificación propuesta, fueron necesarias dos ayudas por parte del tutor..
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

ACTIVIDAD AEP3: *Itinerario de resolución*(Figura 4.3) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

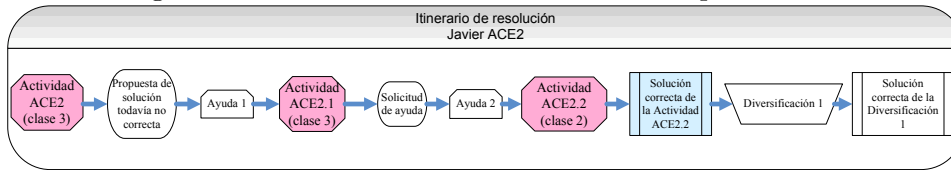
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

Figura 4.3: Itinerario de resolución de Javier para AEP3



- **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica algunos conceptos, relaciones y propiedades involucrados en la resolución: que el centro de la circunferencia que busca está sobre la mediatriz del segmento por ejemplo (equidistancia de los puntos de la mediatriz respecto a los extremos del segmento o concepto de circunferencia circunscrita).
  - **Con ayudas:** No obstante, fueron necesarias algunas ayudas para que identificara otra de las propiedades involucradas: la condición de perpendicularidad del radio respecto a la tangente en el punto de tangencia.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que el centro de la circunferencia que busca está sobre la mediatriz del segmento. Traza dicha mediatriz y propone un punto sobre ella como centro; produciendo variaciones sobre la ubicación de dicho centro, lo posiciona en alguna posición de aparente tangencia con la recta.
  - **Con ayudas:** Fueron necesarias algunas ayudas para que logre incorporar a su estrategia la condición de perpendicularidad del radio respecto a la tangente en el punto de tangencia. Pero su construcción inicial, aunque incorrecta, le permitió identificar esa condición faltante (el alumno mueve el centro sobre r y analiza qué relación existe entre el centro y P en la posición de aparente tangencia).
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; aunque la construcción que propone en principio no cumple todas las condiciones pedidas, su manipulación, conjuntamente con las ayudas del tutor, favorece la visualización de la condición faltante.
  - **Con Ayudas:** Si bien fueron necesarias algunas ayudas para favorecer una reflexión más profunda, el alumno controla el proceso, proponiendo una solución provisoria, sobre la cual analizará variables; análisis que favorecerá la elaboración de la resolución definitiva.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

Figura 4.4: Itinerario de resolución de Javier para ACE2



- **Sin ayudas:** Si bien realiza correctamente la justificación de la solución, explicitando las propiedades que intervienen; lo hace ante el pedido reiterado. Es decir que, aunque en el enunciado se pide, “explica justificadamente”, el alumno sigue asociando esta tarea a la de describir el procedimiento realizado, pero sin hacer referencia a las propiedades o relaciones que lo justifican. Como se ha dicho en relación a la actividad anterior, estas actividades son el comienzo del trabajo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).
- **Con ayudas:** Sin embargo, aunque se le pide “justificar” el segundo procedimiento, se limita a describir el proceso sin justificar porqué es correcto (confundiendo la explicación de lo realizado con la justificación de su validez). Como se ha dicho más arriba, es también el comienzo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Dado que fueron necesarios varias ayudas (tres) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

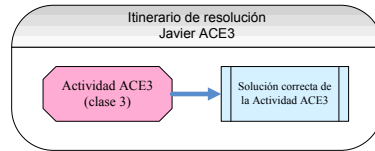
ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.4) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

- **Sin ayudas:** El alumno identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema (y luego también sin ayuda también encuentra que necesita la perpendicular para trazar la circunferencia en cuestión); aunque necesitará ayuda para establecer una estrategia adecuada para aplicarlo a esta problemática concreta.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta pero incompleta: al trazar la bisectriz entre las semirrectas, logra encontrar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a ambas semirrectas (en una primera solución traza por tanteo esta circunferencia y en la siguiente mejora la propuesta al trazarla usando perpendiculares).
  - **Con ayudas:** El alumno necesita ayuda (y solicita dicha ayuda) para lograr que la circunferencia que propone sea también tangente al segmento BC (por construcción y no sólo en apariencia, que es lo que realiza en el primer intento de solución). El tutor le envía una ayuda que le hace pensar en el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una de las semirrectas y al segmento BC
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Con Ayudas:** El grado de reflexión y control es creciente a lo largo del proceso de resolución. Ante la primera versión, es el tutor quien propone la validación mediante variaciones sobre la construcción para detectar la invalidez de la solución propuesta. Puede notarse que para el siguiente versión es el alumno quien ha validado, ha determinado ya que la solución es incorrecta (aunque mejorada respecto a la anterior) y que requiere de ayuda para avanzar. Esta actitud más autorreflexiva se mantiene hasta el final de la resolución.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El grado de reflexión y control es creciente a lo largo del proceso de resolución. Ante la primera versión, es el tutor quien propone la validación mediante variaciones sobre la construcción para detectar la invalidez de la solución propuesta. Puede notarse que para el siguiente versión es el alumno quien ha validado, ha determinado ya que la solución es incorrecta (aunque mejorada respecto a la anterior) y que requiere de ayuda para avanzar. Esta actitud más autorreflexiva se mantiene hasta el final de la resolución.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.



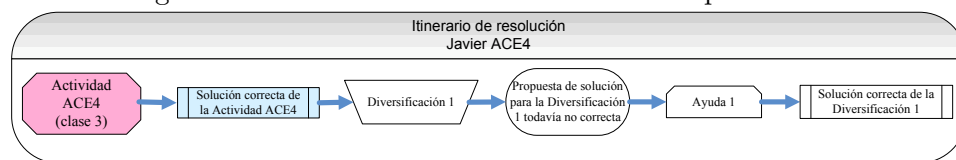
Figura 4.5: Itinerario de resolución de Javier para ACE3



ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.5) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: circunferencias secantes, mediatriz del segmento determinado por los puntos de corte. En particular la propiedad de esta mediatriz de contener los centros de las circunferencias no la conocía, o al menos no la recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (las circunferencias pueden cambiar de posición o tamaño pero deben ser siempre secantes), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos. Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: marca el segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias, traza la mediatriz a dicho segmento, compara los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos para validar el procedimiento, etc.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Con Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Aunque la construcción definitiva no fue inmediata y, por el contrario, requirió de varios intentos y pruebas por parte del alumno; durante este proceso el alumno prefiere agotar las instancias propias antes de solicitar ayuda y logra de hecho la resolución correcta.

Figura 4.6: Itinerario de resolución de Javier para ACE4



- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos. En este caso, el alumno incorpora la justificación de las relaciones y propiedades que intervienen en el procedimiento propuesto sin necesidad de que el tutor explicita su falta o deba recordar su diferencia respecto a la descripción del proceso llevado a cabo. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Si bien es este caso no fue necesario aportar ayudas para que el alumno llegue a la solución correcta (en parte porque el mismo alumno decidió seguir ensayando procedimientos hasta llegar al definitivo); el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.6) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

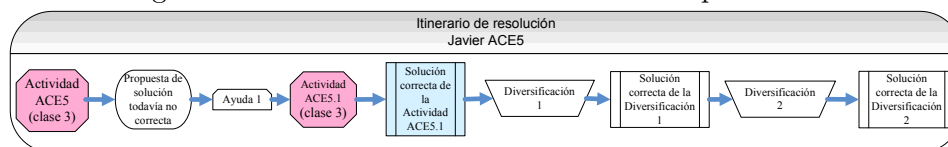
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*
  - **Sin ayudas:** El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

- **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: distancia entre dos puntos, mediatriz, segmento, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento).
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, traza la mediatriz, etc.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Con Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, aunque fue necesaria una ayuda para ello
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.7) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

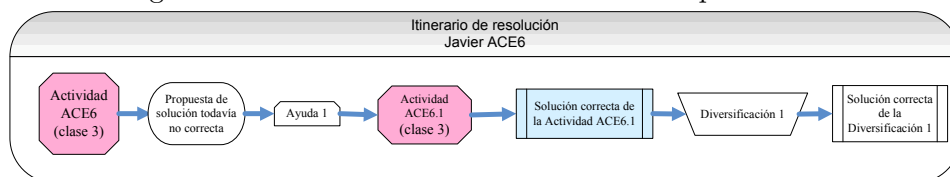
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad

Figura 4.7: Itinerario de resolución de Javier para ACE5



- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro del círculo, Teorema de Pitágoras, perpendicularidad entre radio y tangente
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** La pregunta formulada es abierta (“¿Qué relación...”) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios, perímetros y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido y encuentra un caso particular de relación entre áreas. No encuentra en la 1ª versión de resolución la relación general entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y enuncia como relación encontrada el caso particular.
  - **Con ayudas:** A través de la 1ª ayuda, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con las áreas (el alumno ya ha detectado que “algo pasa con las áreas”, que la “relación que hay que buscar tiene que ver con las áreas”) en un caso más general
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
  - **Con Ayudas:** Sólo ha necesitado de una ayuda, que ha promovido la reflexión en ese momento reorientando la resolución
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Figura 4.8: Itinerario de resolución de Javier para ACE6



- Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones
- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.8) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara perímetros, áreas y segmentos, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes
  - **Con ayudas:** A través de la 1ª ayuda, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con las áreas (el alumno ya ha detectado que “algo pasa con las áreas”, que la “relación que hay que buscar tiene que ver con las áreas”) en un caso más general

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:**El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
  - **Con Ayudas:**Las intervenciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales (análisis del antecedente y consecuente de una implicación propuesta, reflexión sobre la corrección o no del enunciado del teorema propuesto. En este caso la ayuda del tutor no aporta nuevas informaciones, simplemente sugiere la autorreflexión sobre las ideas propuestas por el mismo alumno.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:**El alumno comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas. Realiza además una descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación
- **Valoración/ponderación:***Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

*Per l de Javier en relación al AG*(Figura 4.9)

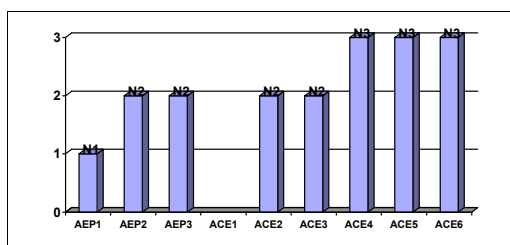
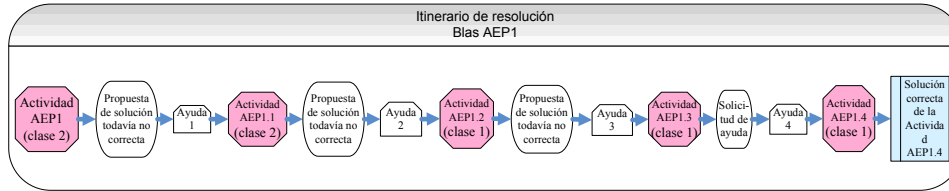


Figura 4.9: Perfil de Javier en el Aprendizaje de la Geometría

Figura 4.10: Itinerario de resolución de Blas para AEP1



### 4.2.2. Alumno 2 (Blas):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.10) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*:

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** En la primera versión de la solución, el alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta; aunque no logra hallar una solución correcta. En el segundo intento, al probar otras estrategias, propone una solución cuya estructura geométrica no respeta las condiciones dadas por el enunciado
  - **Con ayudas:** En las versiones siguientes, por sugerencia del tutor, el alumno vuelve a una estructura geométrica que respeta las condiciones dadas en el enunciado
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar perpendiculares (aunque las llama paralelas) para obtener un cuadrilátero de ángulos rectos, pero no identifica que el concepto de circunferencia puede servirle para conservar distancias (el radio es invariante). Como parte de los errores y deficiencias conceptuales, se evidencia además, que para varios de los conceptos que utiliza no recuerda la expresión correcta para referirse a ellos
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Las estrategias que propone el alumno en la primera versión consisten en generar un rectángulo de lado AB, dado que sus ángulos son rectos pero sus cuatro lados no son iguales (por construcción). En la segunda versión propone una estrategia inversa (a partir del cuadrado obtiene el segmento AB) que vuelve a ser incorrecta.
  - **Con ayudas:** Para que el alumno logre aplicar estrategias que generen una solución correcta fueron necesarias varias ayudas: dos para lograr una construcción que responda a las condiciones solicitadas y dos más para lograr describir el procedimiento empleado.

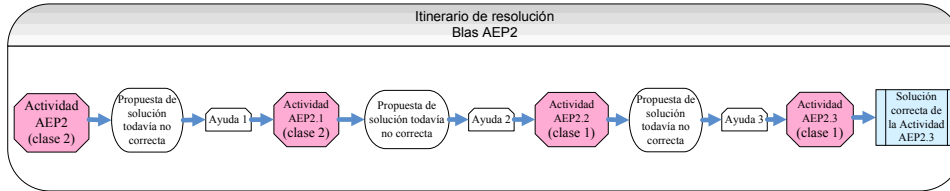
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** Por sí solo, el alumno no reflexiona sobre el proceso, no valida las construcciones que propone (intentando por ejemplo realizar modificaciones en la construcción propuesta). Deja esa tarea al tutor; cada propuesta nueva de solución la somete a la revisión del tutor para que sea el tutor quien determine “si está bien”.
  - **Con Ayudas:** A través de preguntas y sugerencias, el tutor ayuda al alumno a reflexionar sobre cada propuesta que realiza; intentando que pueda controlar el proceso y generar una construcción correcta y comunicar claramente el procedimiento desarrollado
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es incapaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto y justificarlos. Tiene muchas dificultades con el uso del lenguaje geométrico, tanto en lo que se refiere a conceptos, como a relaciones y procedimientos. Manifiesta además que esa actividad no le gusta y “no le sale”.
  - **Con ayudas:** A través de las ayudas, el tutor realiza una doble tarea: por un lado promueve la concienciación de que esta actividad matemática es parte de la solución de cada uno de los problemas propuestos y por otro lado orienta al alumno para que logre resolver esta tarea en este caso concreto. Para lograrlo, el tutor recurre a nuevas preguntas y cuestiones y sugiere incluso la interacción con un compañero a través de un ejercicio concreto de revisión, comparación y reestructuración del comentario. El alumno produce en su última versión un texto que dista bastante de ser totalmente correcto, pero que ha mejorado mucho respecto a los propuestos inicialmente
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Primera clase*, que se corresponde con un *Nivel 1*.

ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.11) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*.

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

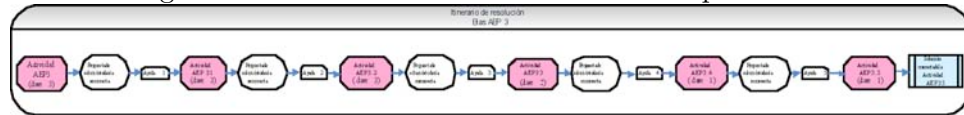


Figura 4.11: Itinerario de resolución de Blas para AEP2



- **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno no identifica que debe recurrir a conceptos, propiedades y relaciones que le permitan hallar la mediatriz del segmento; y propone una construcción aparente que deja de cumplir las condiciones ante la mínima modificación (es un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna).
  - **Con ayudas:** Como primera ayuda, el tutor plantea esa reflexión (la construcción se debe hacer siguiendo un procedimiento de manera tal que la recta hallada siga siendo la mediatriz del segmento cuando modifiquemos el segmento) y no realiza ninguna sugerencia concreta respecto a qué conceptos, relaciones y propiedades elegir para ello. Sólo a partir de esta sugerencia, el alumno empieza a ensayar procedimientos geométricos (en la primera versión solamente proponía un dibujo que aparentaba corrección). Realiza una propuesta de construcción que no es la más frecuente entre los alumnos y que se basa en la resolución de una actividad anterior (construcción de un cuadrado a partir de un lado). Como conceptos y relaciones involucrados aparecen ahora las propiedades de las diagonales de los cuadrados. Maneja esos conceptos y propiedades de manera intuitiva; en principio ni siquiera utiliza el término diagonales y tiene grandes dificultades para describir lo realizado
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** En la primera versión, el alumno aplica una estrategia incorrecta para la primera construcción (propone un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna)
  - **Con ayudas:** Después de la primera ayuda, el alumno identifica que debe proponer un procedimiento geométrico basado en relaciones y propiedades. Propone entonces una estrategia correcta, basada en generar un cuadrado que tiene por lado al segmento dado (antes ha probado otros procedimientos y verificado que no eran apropiados).
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** En la primera versión, el alumno parece no controlar el proceso ni reflexionar sobre él; no propone modificaciones para verificar su construcción, no reflexiona respecto a si lo que ha hecho responde al enunciado de

Figura 4.12: Itinerario de resolución de Blas para AEP3



la actividad. Una vez más, transfiere esa tarea al tutor, como si sólo a él le correspondiera analizar la corrección o no de la propuesta (“¿está bien?”)

- **Con Ayudas:** No obstante, después de la primera ayuda, el alumno mejora su nivel de reflexión: prueba distintos procedimientos y los verifica sin ayuda hasta arribar a uno correcto. Describe con dificultad el procedimiento geométrico que propone; texto que va mejorando en las sucesivas versiones a través de las ayudas propuestas. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta da lugar a la mediatriz del segmento (validación/ justificación de la propuesta). Pero el tutor decide no avanzar en este sentido todavía, sino mejorar la descripción de los procedimientos.
- **Indicador:** ¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto
  - **Sin ayudas:** El alumno evidencia dificultades para describir, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo.
  - **Con ayudas:** A través de las sucesivas ayudas, el tutor propone orientaciones para mejorar esta tarea a partir del planteamiento de nuevas cuestiones, reflexiones y sugerencias.
- **Indicador:** ¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)
  - El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones
- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Primera clase*, que se corresponde con un *Nivel 1*.

ACTIVIDAD AEP3: *Itinerario de resolución*(Figura 4.12) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** ¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario) Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** ¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?

- **Sin ayudas:** En la primera versión, el alumno propone un modelo que no responde a las condiciones dadas en el enunciado (ubica el punto A sobre la circunferencia, una vez dibujada ésta, en vez de colocarlo antes para intentar hallar una circunferencia que lo contenga).
  - **Con ayudas:** Una vez que el tutor realiza la reflexión correspondiente y el alumno mejora el modelo
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
- **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno no identifica que debe recurrir a conceptos, propiedades y relaciones que le permitan hallar la circunferencia en cuestión; y propone una construcción aparente que deja de cumplir las condiciones ante la mínima modificación (es un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna).
  - **Con ayudas:** Para que el alumno arribe a las diversas nociones (conceptos, propiedades y relaciones) involucradas en la resolución, fue necesario un trabajo gradual consistente en sucesivas interacciones con el tutor. A través de dichas interacciones, el tutor propone una reflexión progresiva sobre dichas relaciones (cómo son las distancias del centro de una circunferencia a los puntos de la circunferencia, dónde está ubicado el centro de una circunferencia que pasa por dos puntos, cómo resulta la recta que pasa por C y por el punto de tangencia respecto a la recta tangente, etc.)
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
- **Sin ayudas:** En la primera versión, el alumno aplica una estrategia incorrecta para la construcción (propone un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna y que ni siquiera respeta las condiciones iniciales planteadas en el enunciado).
  - **Con ayudas:** Al igual que ha ocurrido con los conceptos, el tutor orienta al alumno de manera que pueda diseñar una estrategia cada vez más correcta. El alumno va proponiendo nuevas estrategias, en la medida que encuentra y analiza los conceptos y relaciones subyacentes a esas estrategias y procedimientos
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
- **Sin ayudas:** En la primera versión, el alumno parece no controlar el proceso ni reflexionar sobre él; no propone modificaciones para verificar su construcción, no reflexiona respecto a si lo que ha hecho responde al enunciado de la actividad. Una vez más, transfiere esa tarea al tutor, como si sólo a él le correspondiera analizar la corrección o no de la propuesta (“¿está bien?”).
  - **Con Ayudas:** No obstante, las sucesivas ayudas, permiten al alumno mejorar su nivel de reflexión: analiza relaciones, prueba distintos procedimientos y los verifica para dar respuesta a las cuestiones planteadas por el tutor. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta es correcta (validación/justificación de la propuesta). Pero el tutor decide no avanzar en este sentido todavía, sino mejorar la descripción de los procedimientos

Figura 4.13: Itinerario de resolución de Blas para ACE2



- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno sigue evidenciando dificultades para describir, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo. No obstante, ha mejorado respecto a actividades anteriores
  - **Con ayudas:** A través de las sucesivas ayudas, el tutor propone orientaciones para mejorar esta tarea a partir del planteamiento de nuevas cuestiones, reflexiones y sugerencias
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Primera clase*, que se corresponde con un *Nivel 1*.

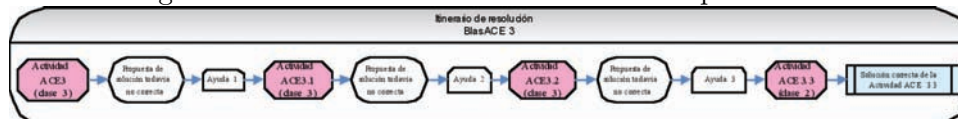
ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.13) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones iniciales dadas a un modelo geométrico que las respeta (aunque en este caso esta fase resultaba muy sencilla dado que consistía simplemente en el trazado de dos semirrectas secantes y de un segmento cuyos extremos pertenecen cada una de dichas semirrectas).
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Con ayudas:** El alumno no identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema. Fueron necesarias varias ayudas por parte del docente y alguna por parte de un compañero para que

lograra hacerlo; fue también la interacción con un compañero la que le permitió identificar que era necesario trazar una perpendicular para encontrar la circunferencia en cuestión).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Con ayudas:** Además de no identificar los conceptos involucrados, una vez que mediante interacciones con el profesor los identifica, el alumno tampoco es capaz de aplicar una estrategia correcta que involucre esos conceptos y relaciones sin ayuda. En las primeras soluciones propuestas traza la circunferencia por tanteo; en las siguientes presenta dificultades para identificar condiciones, relaciones, propiedades que le permitan diseñar una estrategia correcta y en la última fue necesaria la ayuda de un compañero para transferir esos conceptos y relaciones a este caso concreto. El alumno finalmente resuelve un ejercicio algorítmico.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Con Ayudas:** Respecto a la primera solución propuesta, fue necesaria la intervención del tutor para que el alumno detectara su invalidez mediante variaciones en la construcción propuesta. El grado de reflexión es mínimo y el de control es prácticamente nulo; el alumno es incapaz de controlar el proceso con autonomía y requiere de mucha ayuda para ello.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de describir, utilizando lenguaje verbal, los procesos llevados a cabo (aunque es cierto que dicha tarea se vuelve bastante sencilla con tantas ayudas y queda reducida a una descripción lineal, más bien de tipo técnico que no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso).
  - **Con ayudas:** Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que conoce respecto de la bisectriz en un texto que incluye la propiedad en cuestión, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las "propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo" (se basa incluso para elaborar el texto en la actividad de referencia cuya revisión ha propuesto el tutor como ayuda). No se realiza una contextualización de la propiedad para el caso de la solución propuesta.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

Figura 4.14: Itinerario de resolución de Blas para ACE3



ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.14) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario) Esta fase no aparece en esta actividad*
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta. Copia el enunciado de la actividad en su archivo, aunque no era necesario, proceso que le ayuda a interiorizar esas condiciones.
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: circunferencias secantes, mediatriz del segmento determinado por los puntos de corte. En particular la propiedad de esta mediatriz de contener los centros de las circunferencias no la conocía, o al menos no la recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (las circunferencias pueden cambiar de posición o tamaño pero deben ser siempre secantes), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos. Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: marca el segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias, traza la mediatriz a dicho segmento, etc.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Aunque la construcción definitiva no fue inmediata y, por el contrario, requirió de varios intentos y pruebas por parte del alumno; durante este proceso el alumno prefiere agotar las instancias propias antes de solicitar ayuda y logra de hecho la construcción correcta, aunque no su justificación (a la que ni siquiera considera como parte de la solución).

Figura 4.15: Itinerario de resolución de Blas para ACE4



- **Con Ayudas:** Sólo a través de las ayudas por parte del tutor, el alumno identifica la justificación del procedimiento como parte de la resolución y logra, también después de varios intentos y de recibir varias orientaciones por parte del docente, enunciar la propiedad que justifica su construcción. Es decir, que si bien el alumno ha controlado el proceso de solución gráfica, han sido necesarias varias ayudas para que lograra controlar y reflexionar el proceso de explicación y argumentación de dicha solución
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Con ayudas:** Fueron necesarias varias ayudas para que el alumno lograra explicitar de manera clara su procedimiento y la justificación de su idoneidad. Respecto a este último aspecto, fueron necesarias dos fases; una primera de reconocimiento de esta necesidad y una siguiente para lograr esta argumentación de manera correcta.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - El alumno no resuelve ninguna diversificación
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

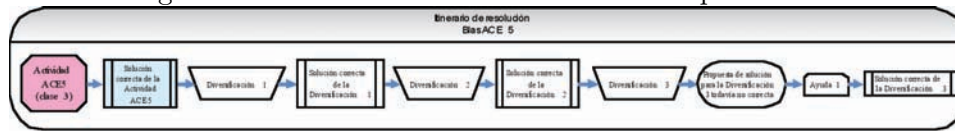
ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.15) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*
  - **Sin ayudas:** El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático.
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

- **Sin ayudas:** Si bien el alumno no identifica en primera instancia que son la mediatriz y su propiedad, las que posibilitan resolver la actividad; encuentra conceptos y relaciones (triángulo isósceles, distancia entre puntos, equidistancia de los extremos del lado desigual al vértice restante, distancia entre puntos, etc.) para caracterizar la posición del punto en el que el cometa deja de ser estudiado por uno de los satélites para ser estudiado por el otro, aunque al principio no logra determinarla geoméricamente de manera correcta. Pero es el trabajo utilizando estos conceptos, conjuntamente con las ayudas del tutor, el que le permiten arribar en la tercera versión de la solución, a los conceptos, relaciones y propiedades en cuestión.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Consideramos muy importantes los primeros intentos de análisis a través de la construcción del triángulo determinado por los satélites y el cometa (ABE) y las mediciones realizadas. Estas le han permitido caracterizar el punto C en cuestión y poseer más elementos para, en las versiones siguientes, no sólo caracterizar su ubicación sino también hallarla en forma inequívoca mediante el trazado de la mediatriz de AB. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto E, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (1ª y 2ª versión: la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino del tipo de triángulo que queda determinado en cada caso, siendo el caso del triángulo isósceles el caso límite, 3ª versión: relación de esa posición con la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, en la tercera versión traza la mediatriz, etc
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
  - **Con Ayudas:** Pero no detecta que en la 2ª versión, la posición propuesta para C, aunque bien caracterizada, es susceptible de modificaciones en la solución gráfica; la ayuda del tutor lo orientó a solucionar ese error en la tercera versión.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos; incluso en este caso, la incorporación de la propiedad para justificar la propuesta, es iniciativa del alumno. Describe además, en todo momento, el proceso de resolución llevado a cabo, utilizando lenguaje verbal.



Figura 4.16: Itinerario de resolución de Blas para ACE5



- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación (enunciar la propiedad de la mediatriz que justifica la construcción propuesta) aunque ni siquiera fue necesario que el tutor lo solicitara.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.16) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Se trata de un alumno que habitualmente presenta dificultades para el aprendizaje de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular; de hecho no dispone de tantos conocimientos geométricos previos como sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). Por esta razón, mientras para sus compañeros, actividades como esta involucran muchos conceptos y algunos procedimientos ya conocidos; para Blas resulta casi todo nuevo, dado que no cuenta con esa información previa, al menos de manera disponible<sup>1</sup>. No obstante, quizá esa carencia respecto a los demás, le

<sup>1</sup>Utilizamos el término disponible, para hacer referencia a conocimientos previos que aunque hayan sido trabajados por el alumno en instancias previas (cursos anteriores por ejemplo), no están disponibles en el sentido de que el alumno o bien no los recuerda o bien no puede transferirlos a otros contextos. En este caso, es impensado que el alumno no haya trabajado anteriormente con conceptos como el de área, pero en principio le

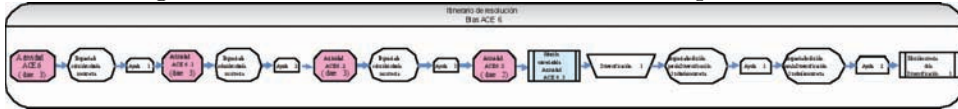
ha hecho interiorizarse de muchas de las ventajas que le ofrece Cabri y utiliza esas herramientas en forma exhaustiva: mide, calcula, etc. El aprovechamiento de estas posibilidades, le ayudan a indagar sobre la situación planteada, haciendo que no se sienta ¿desarmado? ante ella y pueda abordarla. De hecho en este caso, en la primera versión, mide todo lo que puede intentando buscar alguna regularidad y así encuentra la relación entre las áreas. Mientras, casi todos los alumnos seleccionan primero los conceptos y luego las herramientas a utilizar; Blas indaga primero qué herramientas que le ofrece Cabri (medir longitudes, medir área, medir áreas, calcular) y son esas mismas herramientas las que le permiten luego seleccionar conceptos involucrados. Es decir, que el trabajo con Cabri, favorece en este caso, el proceso de transferencia de conceptos y relaciones previas a la resolución de la actividad

- **Con ayudas:** En la 2ª versión, por sugerencia del tutor, analiza el triángulo que él mismo había señalado y medido en la versión anterior, encontrando que el mismo es rectángulo y relacionando (aquí sí por sí mismo) este tipo de triángulos con el Teorema de Pitágoras. Calcula para corroborar que se cumple dicho Teorema en el triángulo en cuestión. En cuanto a la relación de perpendicularidad entre tangente a la circunferencia y radio, necesitó de la ayuda de un compañero para identificar dicha propiedad, que no conocía.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** La pregunta formulada es abierta (“¿Qué relación...”) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios, perímetros y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido. Encuentra en la 1ª versión de resolución la relación general entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y la enuncia.
  - **Con ayudas:** En la 1ª diversificación, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con el triángulo “rojo” y entonces el alumno detecta que es rectángulo, lo vincula con el Teorema de Pitágoras y calcula para corroborar que esta relación se cumple en dicho triángulo.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción; encontrando una solución para la actividad inicial sin necesidad de ayudas.
  - **Con Ayudas:** A través de la interacción con el tutor a través de las diversificaciones, el alumno avanza en el grado de reflexión, encontrando conexiones que en principio no había detectado y justificando las relaciones: relaciona los lados del triángulo con los radios de los círculos e intenta, ante el pedido del tutor, vincular esta cuestión con la relación que había obtenido para las áreas

---

resulta imposible seleccionarlo por sí solo, como uno de los parámetros a tener en cuenta y comparar. Toma esa decisión, a partir de las herramientas de las que dispone en el software.

Figura 4.17: Itinerario de resolución de Blas para ACE6



- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver tres diversificaciones.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.17) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda. El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos<sup>2</sup>. El trabajo con Cabri, ha resultado fundamental para este avance, dado que sus herramientas le permiten indagar sobre la situación

<sup>2</sup>Como se ha comentado anteriormente, este es el caso de un alumno que al principio presentaba graves dificultades para el aprendizaje de la Geometría; dado que parecía no disponer de tantos conocimientos geométricos previos como sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). De hecho, mientras las primeras actividades,

planteada, haciendo que no se sienta “desarmado” ante ella y pueda abordarla (mide todo lo que puede, calcula, compara?); y es el trabajo con estas herramientas el que le permite seleccionar conceptos involucrados. Es decir, que el trabajo con Cabri, favorece en este caso, el proceso de transferencia de conceptos y relaciones previas a la resolución de la actividad.

- **Con ayudas:** Fue necesaria una ayuda del tutor para que el alumno revisara la noción de teorema y pudiera reformular el enunciado propuesto
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara segmentos, áreas y perímetros, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción
  - **Con Ayudas:** Las intervenciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales como la corrección o no del enunciado del teorema propuesto. Respecto al análisis de la congruencia de los segmentos, el alumno utiliza un razonamiento circular (son iguales porque el triángulo es isósceles y el triángulo es isósceles porque son iguales) y fue necesaria la intervención del tutor para salir de esa circularidad
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno comunica de manera clara sus respuestas; ayudándose de notación geométrica conveniente y de colores para la presentación de textos y dibujos.
  - **Con ayudas:** A través de una ayuda, el tutor solicita la explicitación del enunciado del teorema, y a través de otras ayudas, orienta esa formulación.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, aunque fueron necesarias dos ayudas para ello.

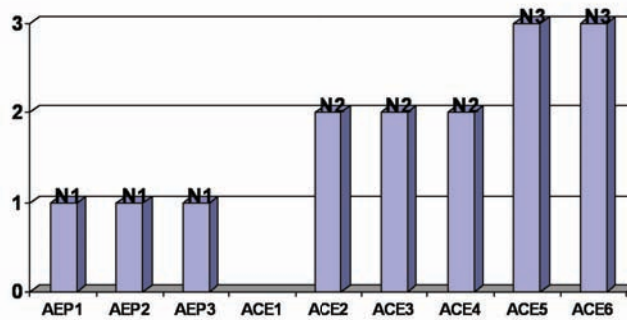
---

involucran muchos conceptos y algunos procedimientos ya conocidos para el resto de los alumnos; para Blas resultaba casi todo nuevo, dado que no contaba con ese conocimiento previo, al menos de manera disponible; le resulta imposible seleccionar conceptos y qué estrategias a emplear por sí solo, o bien porque no los recordaba o bien porque no podía transferirlos a contextos de resolución de problemas. Por esta razón, esta identificación, selección y aplicación de conceptos y relaciones significa un gran avance en este caso.

- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

### Perfil de Blas en relación al AG (Figura 4.18)

Figura 4.18: Perfil de Blas en relación al Aprendizaje de la Geometría

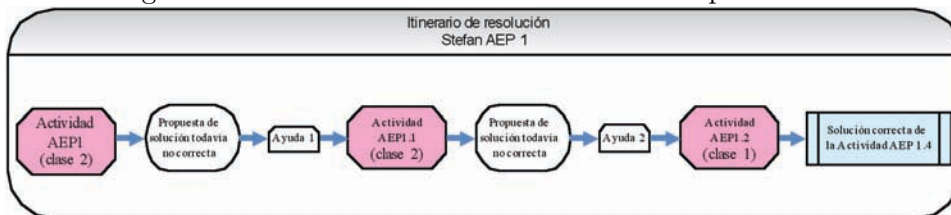


### 4.2.3. Alumno 3 (Stefan):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.19) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*:

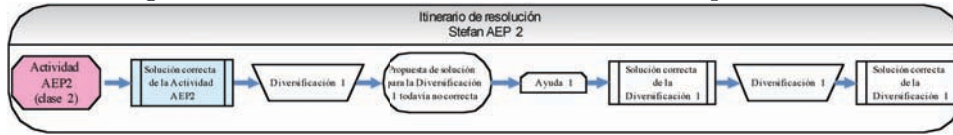
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta

Figura 4.19: Itinerario de resolución de Stefan para AEP1



- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar la opción compás para conservar distancias. Utiliza el concepto de perpendicular para determinar ángulos rectos; mostrando que identifica el concepto de cuadrado y sus propiedades
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Se destaca que, mientras el resto de los alumnos emplea la opción circunferencia, Stefan es el único alumno que escoge la opción compás, reproduciendo con Cabri, los procedimientos de construcción con lápiz, papel, regla y compás real.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo una construcción correcta y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.
  - **Con Ayudas:** Sin embargo, le resulta difícil explicitar verbalmente cuáles son las condiciones mínimas para que el cuadrilátero que él mismo ha construido sea un cuadrado. Al principio, no identifica este requisito (aunque aparece en el enunciado de la actividad); en un segundo intento y ante el pedido del tutor, recurre como argumento a la validación gráfica (producir variaciones y observar que sigue siendo un cuadrado). Recién en la tercera versión justifica la corrección recurriendo a las estrategias de construcción aplicadas.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto, describiendo con corrección el procedimiento aplicado. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo, paso a paso
  - **Con ayudas:** Para que explicitara la justificación de la corrección a través de propiedades y relaciones, fue necesaria la intervención del tutor en dos ocasiones.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Dado que fueron necesarios varias ayudas (dos) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Primera clase*, que se corresponde con un *Nivel 1*.

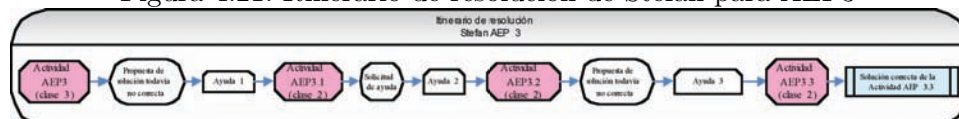
Figura 4.20: Itinerario de resolución de Stefan para AEP2



ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.20) y *Análisis del aprendizaje de la G*.

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento (nuevamente las traza utilizando para ello la opción compás). Como conceptos y relaciones involucrados aparecen las propiedades de las diagonales del rombo (perpendicularidad y corte en el punto medio) así como la equidistancia de los puntos de intersección de dichas circunferencias respecto a los extremos del segmento. Para la segunda construcción, propone otro procedimiento correcto que involucra otros conceptos y relaciones vinculadas a los hexágonos regulares y sus propiedades; aunque como se nota en las justificaciones, realiza dicha aplicación de conceptos y relaciones de manera muy intuitiva y no quedan explicitadas muy claramente en el comentario.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento, repitiendo con Cabri un procedimiento que ya ha aplicado en cursos anteriores con lápiz, regla y compás. Profundiza estas estrategias para realizar la argumentación del procedimiento propuesto. Para la segunda propuesta de solución, de nuevo el procedimiento es correcto
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo dos construcciones correctas y comunicando claramente el procedimiento desarrollado

Figura 4.21: Itinerario de resolución de Stefan para AEP3



- **Con Ayudas:** Ante la orientación del tutor, el alumno profundiza su nivel de reflexión para validar y justificar su propuesta utilizando argumentos geométricos, propiedades, relaciones, etc. Teniendo en cuenta que esta es una de las primeras actividades que propone este tipo de tarea matemática prácticamente desconocida por los alumnos y que se relaciona con las demostraciones sencillas; el alumno la resuelve de manera creativa y reflexiva.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo con claridad y corrección.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones, aunque para resolver la primera diversificación propuesta, fue necesaria una ayuda por parte del tutor
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

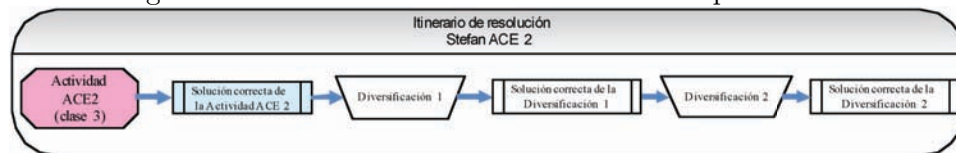
ACTIVIDAD AEP3: *Itinerario de resolución*(Figura 4.21) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, relaciones y propiedades involucrados en la resolución: que el centro de la circunferencia que busca es el circuncentro de cierto triángulo AP1; que existe una única posición para el punto 1 de manera tal que se cumplan todas las condiciones.



- **Con ayudas:** Probando por tanteo, ante la sugerencia del tutor de estudiar cuál es la condición de esa posición; el alumno encuentra que se trata de la perpendicularidad de P1 respecto a la recta; y utiliza ese hallazgo para su construcción definitiva. Fue necesaria una nueva ayuda para que el alumno explicitara las propiedades involucradas; aunque el alumno ha manejado todo el tiempo de manera implícita las mismas en su resolución.
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica que el centro de la circunferencia que busca es el circuncentro de cierto triángulo AP1; construye dicho triángulo, traza sus mediatrices, determina el circuncentro, traza la circunferencia circunscrita y manipula el vértice 1 hasta ubicarlo en la única posición para la cual se cumplen todas las condiciones
  - **Con ayudas:** A partir de esa construcción visualmente correcta pero no correcta por construcción y de las intervenciones del tutor, el alumno estudia cuál es la condición de esa posición, encuentra que se trata de la perpendicularidad de P1 respecto a la recta; y utiliza ese hallazgo como estrategia para su construcción definitiva. Se destaca que la construcción inicial propuesta por el alumno, aunque incorrecta, le permitió identificar esa condición faltante (el alumno mueve el vértice 1y analiza qué relación existe entre 1 y P en la posición de *aparente tangencia*).
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; aunque la construcción que propone en principio no cumple todas las condiciones pedidas, su manipulación, conjuntamente con las ayudas del tutor, favorece la visualización de la condición faltante.
  - **Con Ayudas:** Si bien fueron necesarias algunas ayudas para favorecer una reflexión más profunda, el alumno controla el proceso, proponiendo una solución provisoria, sobre la cual analizará variables; análisis que favorecerá la elaboración de la resolución definitiva
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo. Explicita claramente su proceder dejando claro qué hace y porqué lo hace (implícitamente hace referencia a las relaciones y propiedades involucradas en la resolución de la actividad).
  - **Con ayudas:** Si bien se refiere correctamente de manera implícita a las propiedades que justifican su solución; recién las explicita de manera más clara cuando el tutor se lo pide (aunque en el enunciado se pide, ¿explica justificadamente?, el alumno sigue asociando esta tarea a la de describir el procedimiento realizado, pero no hace hincapié en las propiedades o relaciones que lo justifican). Como se ha dicho en relación a la actividad anterior, estas actividades son el comienzo del trabajo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Figura 4.22: Itinerario de resolución de Stefan para ACE2



- Dado que fueron necesarios varias ayudas (tres) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación
- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.22) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

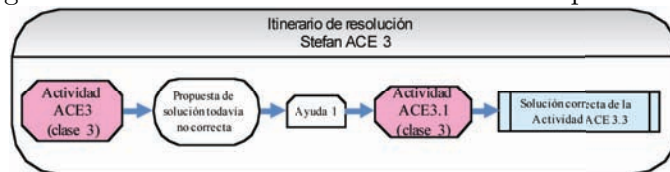
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema; y también sin ayuda también encuentra que necesita la perpendicular para trazar la circunferencia en cuestión.  
Fue capaz, sin ayuda, de establecer una estrategia adecuada para aplicar dichos conceptos a esta problemática concreta. Aunque dicha estrategia es un caso particular de una más general, da solución al problema.
  - **Con ayudas:** Con ayuda del tutor, el alumno reflexiona sobre algunas de las condiciones de su construcción que no eran imprescindibles para su corrección
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica una estrategia correcta, quizá un poco sofisticada y con condiciones que no eran imprescindibles pero correcta en tanto que da respuesta a la problemática planteada. Se destaca este hecho, porque ha sido uno de los poquísimos alumnos que ha logrado diseñar y aplicar esta estrategia sin ayudas

- **Con ayudas:** El tutor le envía algunas cuestiones que le ayudan a pensar sobre algunas de las condiciones propuestas en su solución para hallar la circunferencia y el alumno reflexiona correctamente al respecto e indica claramente esas ideas en un comentario
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Con Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso y lo controla. En el primer versión, propone una estrategia que ha sido el resultado de probar varias otras (que involucraban variados conceptos, relaciones y procedimientos) y controlarlas a través de variaciones en el dibujo; seleccionando los apropiados y descartando los que no resultaban adecuados. Así ha arribado a la solución que propone. Todavía no enumera las propiedades involucradas, porque no identifica que esta tarea es una parte importante de la resolución
  - **Con ayudas:** Ante la primera versión, el tutor le propone algunas cuestiones para reflexionar y el alumno analiza y explica correctamente cada una de ellas. También ante la solicitud del tutor, el alumno ha explicitado la propiedad de la bisectriz involucrada en esta resolución.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.
  - **Con ayudas:** También ha sido capaz de justificar mediante propiedades, pero lo ha hecho como respuesta a un nuevo pedido del tutor.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.23) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

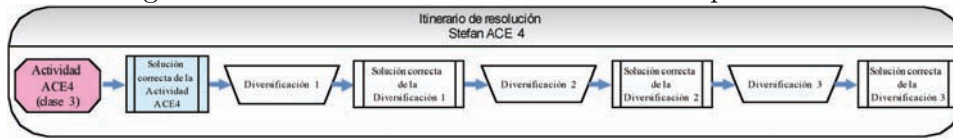
- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta

Figura 4.23: Itinerario de resolución de Stefan para ACE3



- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación; aunque o hace de manera muy intuitiva. Utiliza el hecho de que las mediatrices a una cuerda de circunferencia pasarán por su centro; propiedad que no conocía, o al menos no recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables, diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos. Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas (incluso propone un procedimiento más general que el solicitado, dado que sería válido incluso para hallar el centro de una única circunferencia, sin que estuviera la otra circunferencia secante): traza dos cuerdas en cada circunferencia, traza sus mediatrices, compara los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos para validar el procedimiento, etc
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el proceso. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Logró hacer su construcción sin ayuda; aunque para arribar a la construcción definitiva requirió de varios intentos y pruebas.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y de intentar justificarlos, aunque todavía no ha logrado justificar correctamente por sí mismo en la primera versión (no ha recurrido a propiedades para argumentar sino solamente a procedimientos de verificación visuales e intuitivos). Describe de manera clara y correcta, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.
  - **Con ayudas:** En este caso, el alumno incorpora la justificación de las relaciones y propiedades que intervienen en el procedimiento propuesto, ante la solicitud del tutor. Pero lo hace de manera muy correcta

Figura 4.24: Itinerario de resolución de Stefan para ACE4



- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - En este caso, el alumno no resuelve ninguna diversificación; aunque realizó un muy trabajo (prácticamente sin ninguna ayuda) sobre la resolución propuesta para la actividad inicial.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Segunda clase*, que se corresponde con un *Nivel 2*.

ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.24) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*
  - **Sin ayudas:** El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas; propone incluso un modelo geométrico muy claro al utilizar distintos colores, trazos, grosores, etc
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: distancia entre dos puntos, mediatriz, segmento, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento).
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias

Figura 4.25: Itinerario de resolución de Stefan para ACE5



a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, traza la mediatriz, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto
  - **Con ayudas:** Las orientaciones del tutor lo ayudan a explicitar y justificar de manera más completa el porqué de los resultados obtenidos y a generalizar el resultado a un caso más amplio.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver tres diversificaciones.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.25) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)* Esta fase no aparece en esta actividad
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

- **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área del círculo, Teorema de Pitágoras, perpendicularidad entre radio y tangente; seleccionándolos y contextualizándolos con total idoneidad
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** La pregunta formulada es abierta (“¿Qué relación...”) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido, realiza los cálculos pertinentes, encuentra la relación entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y la enuncia con corrección
  - **Con ayudas:** A través de la 1ª ayuda, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con las áreas (el alumno ya ha detectado que “algo pasa con las áreas”, que la “relación que hay que buscar tiene que ver con las áreas”) en un caso más general
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas
  - **Con ayudas:** Como respuesta a las intervenciones del tutor, avanza en la calidad de su solución, haciendo que la misma resulte cada vez más consistente y esté mejor argumentada.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.26) y *Análisis del aprendizaje de la Geometría*

Figura 4.26: Itinerario de resolución de Stefan para ACE6



- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario) Esta fase no aparece en esta actividad*
- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*
  - **Sin ayudas:** El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.
- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos
- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*
  - **Sin ayudas:** Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara perímetros, áreas y segmentos, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.
- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*
  - **Sin Ayudas:** El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción
  - **Con Ayudas:** Las orientaciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales, indicando por ejemplo qué le falta hacer todavía, pero en ningún caso, las ayudas aportan información adicional respecto a la que se ofrecía en el enunciado original del problema: en este caso la ayuda del tutor no aporta nuevas informaciones, simplemente sugiere la autorreflexión sobre las ideas propuestas por el mismo alumno.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*
  - **Sin ayudas:** El alumno comunica de manera clara y coherente, una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones



propuestas. Realiza además una descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y del razonamiento llevado a cabo para justificar las relaciones involucradas.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*
  - Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde*
  - Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una *Actividad de Tercera clase*, que se corresponde con un *Nivel 3*.

Perfil de Stefan en relación al AG (Figura 4.27)

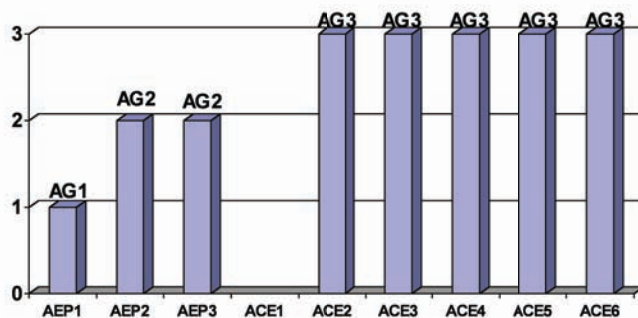


Figura 4.27: Perfil de Stefan en relación al Aprendizaje de la Geometría

### 4.3. Evolución producida en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa (CC)

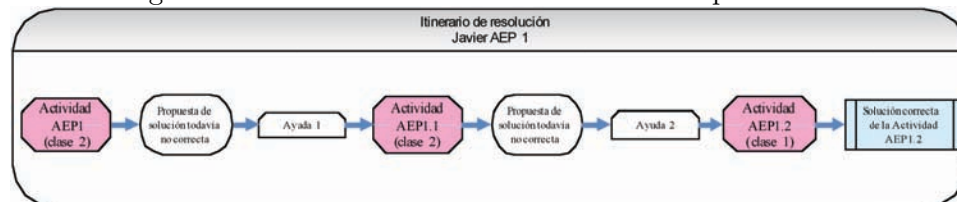
Como parte del análisis necesario para alcanzar los objetivos 4 y 5 (sección 1.2), presentamos para cada uno de los alumnos considerados, su itinerario de resolución y el análisis de la Competencia Comunicativa.

#### 4.3.1. Alumno 1 (Javier):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.28) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

*Análisis de la Competencia Comunicativa*

Figura 4.28: Itinerario de resolución de Javier para AEP1



- **Análisis Coherencia intratextual:**

Si bien el texto inicial no contiene contradicciones ni repeticiones; no llega a ser totalmente coherente dado que la información no es suficiente y el no hacer uso de notaciones o de indicaciones más precisas da lugar a ambigüedades (no queda claro qué condiciones cumplen las circunferencias mencionadas, los puntos de corte entre las circunferencias y las perpendiculares no son sólo dos, etc.)

Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En respuesta al pedido del profesor, el alumno enumera todas las características que sabe que presentan los cuadrados, pero no diferencia las que definen a un cuadrado de las propiedades consecuentes, tampoco reconoce en principio, cuáles de esas características ha considerado como condiciones para su construcción, aunque sí logra hacerlo con una ayuda más.

- **Análisis Coherencia extratextual:**

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por presentar éste último cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones

- **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

- **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.) y la omisión de una h en “echo”.

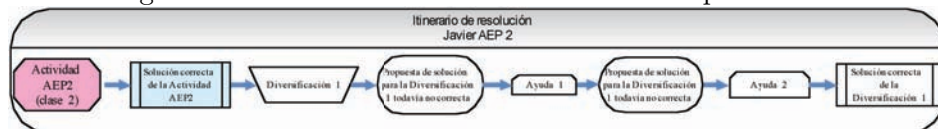
En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto

- **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos hace da lugar a ambigüedades:

- respecto a las perpendiculares: no se indican las dos condiciones mínimas para determinarlas (perpendicular a qué elemento y pasando por qué punto); es más ambas condiciones se mezclan erróneamente en una expresión ¿he hecho las perpendiculares a A y a B?
- respecto a las circunferencias: no se indican las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan)

Figura 4.29: Itinerario de resolución de Javier para AEP2



■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las ambigüedades del texto.

■ **Valoración/ponderación:**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 3/9 (33, 33 %)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.29) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

***Análisis de la Competencia Comunicativa***

■ **Análisis Coherencia intratextual:**

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia; no es totalmente clara la frase “una circunferencia desde A y que pase por B y otra desde B y que pase por A”. La ambigüedad se genera por la falta de referencia a los elementos característicos de dichas circunferencias (centro y radio). Incluso así, el texto resulta bastante claro. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de que las construcciones propuestas dan lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos); para la segunda construcción, ante la solicitud del profesor y con ayuda, el alumno justifica correctamente el proceso.

■ **Análisis Coherencia extratextual**

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por ser el primero de cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

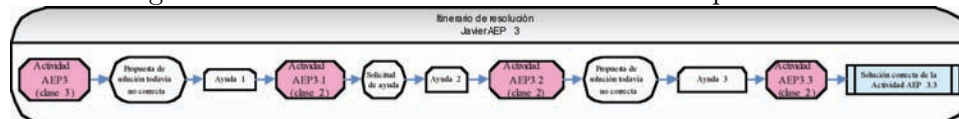
No se analiza en este caso.

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, espacios, etc.) y la omisión de una h en “ha”.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y

Figura 4.30: Itinerario de resolución de Javier para AEP3



mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para mejorar el texto. No obstante, se aprecia una mejora respecto al texto de la actividad anterior en relación a la explicitación de las condiciones de las circunferencias que todavía no son totalmente correctas.

#### ■ Análisis Vocabulario

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos da lugar a ambigüedades. El uso del vocabulario específico (centro, radio) mejoraría el texto. No se analiza en este caso.

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

En principio, no se evidencia creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta; básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema. Sí se muestra creatividad para generar textos de cierta claridad sin recurrir a notaciones geométricas.

#### ■ Valoración/ ponderación

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 4/9 (44,44%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

ACTIVIDAD AEP3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.30) y Análisis de la Competencia Comunicativa

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual:

El texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un nuevo avance respecto a las actividades anteriores en cuanto a la coherencia.

Un aspecto importante es que aparecen referencias a las relaciones y propiedades que justifican la construcción propuesta, y aunque todavía no se expresan con total claridad ni se contextualizan en el proceso (de hecho se enumeran en un texto separado); la mención de las mismas es identificada por el alumno como parte de la resolución del problema. Ante la solicitud del profesor, el alumno las enumera de manera más explícita.

Algunas frases generan ambigüedades o falta de claridad debido a errores en el uso del lenguaje geométrico, que todavía presenta errores que se analizan en ortografía y vocabulario.

■ **Análisis Coherencia extratextual**

El texto se corresponde en todos los casos con las construcciones propuestas para resolver el problema, que en algunos casos son correctas y en otros no.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

No se analiza en este caso.

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, la omisión o cambio de orden de alguna letra en alguna palabra (“pnto, porblema”) y la falta de alguna tilde (“triangulo”).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para mejorar el texto. No obstante, se aprecia una mejora respecto al texto de las actividades anteriores en relación a la explicitación de las condiciones y de las relaciones geométricas.

■ **Análisis Vocabulario**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos da lugar a ambigüedades o errores de interpretación:

- no es el centro de la circunferencia el que pasa por la mediatriz sino la mediatriz la que pasa por dicho centro
- de la perpendicular por P no se indica perpendicular a qué elemento geométrico (en este caso a la recta); aunque la expresión muestra un avance respecto a textos anteriores en los que se hablaba de “perpendicular a un punto”.

Un mejor uso del vocabulario específico mejoraría asimismo la claridad en el enunciado de las propiedades.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

Las propiedades que fundamentan la construcción se mencionan en este caso, lo que supone un avance. No obstante, se hace de las mismas un enunciado más de tipo académico escolar que creativo y contextualizado al procedimiento concreto.

Se nota todavía que el enunciado responde a un requerimiento por parte del profesor y que aún no se ha desarrollado una capacidad creativa y dúctil al respecto, falta mejorar la interrelación entre procedimientos gráficos, la identificación de las relaciones y propiedades geométricas que los fundamentan y su explicitación por escrito.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9

- *Ponderación general*: 5/9 (55,56%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE1: *Presentación profesor virtual alumno y propuesta de trabajo y Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ **Análisis Coherencia intratextual**

El mensaje es coherente, la presentación que realiza de sí mismo es completa y apropiada; al igual que la justificación de la elección de la materia. Las ideas se expresan clara y correctamente.

##### ■ **Análisis Coherencia extratextual**

No se analiza en este caso.

##### ■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial. Al final, incorpora incluso un saludo.

##### ■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, todos ellos de utilización de espacios en relación a los signos de puntuación (después de comas, después de puntos); son más bien errores de mecanografía más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí.

Nota: Javier utiliza la opción de revisión ortográfica que ofrece el programa de correo electrónico. Valoramos positivamente esta preocupación, dado que indica que el alumno reconoce que la reconoce que la corrección ortográfica es también una parte importante; y aunque todavía no puede lograr esa corrección por sí mismo, recurre a las herramientas informáticas para lograrla.

##### ■ **Análisis Vocabulario**

El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural, la elección de palabras y expresiones es apropiada.

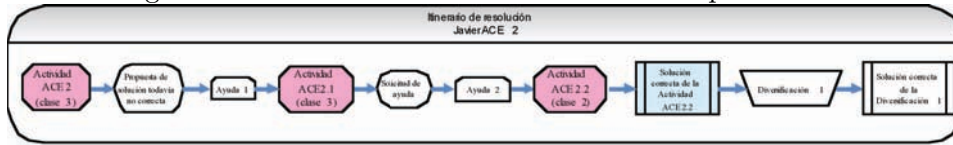
##### ■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso se ha resuelto eficazmente.

##### • **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente Ortografía y Vocabulario: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 7/9 (58,33%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

Figura 4.31: Itinerario de resolución de Javier para ACE2



ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.31) y *Análisis de la Competencia Comunicativa* **Análisis de la Competencia Comunicativa**

#### ■ Análisis Coherencia intratextual

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no justifica por qué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

El profesor indica un fallo en la construcción inicial, y el alumno comprende en qué consiste, intenta remediarlo pero aunque prueba distintas estrategias no lo logra; pide entonces ayuda al profesor relatando lo sucedido y con esta ayuda sí logra la resolución correcta.

El alumno muestra una preocupación por describir el proceso que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso.

Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que sabe respecto a la bisectriz (definición, propiedades).

La primera que se menciona (“La propiedad de la bisectriz es que divide el ángulo en dos”) está incompleta dado que no se indica que se hace referencia a “dos ángulos de igual medida”; pero además esta frase no tiene relación directa con la resolución de la actividad.

Asimismo, la expresión “que esta equidistante entre los dos lados” también resulta vaga e imprecisa. Finalmente la propiedad “que desde cualquier punto de la bisectriz tiene la misma distancia a los lados del ángulo”, resulta ser la que más estrecha relación tiene con la solución propuesta, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las “propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo”. El alumno “cuenta todo lo que sabe” sobre la bisectriz (definición, propiedades) pero no realiza ninguna contextualización de dichas propiedades en el caso concreto de la actividad resuelta.

#### ■ Análisis Coherencia extratextual

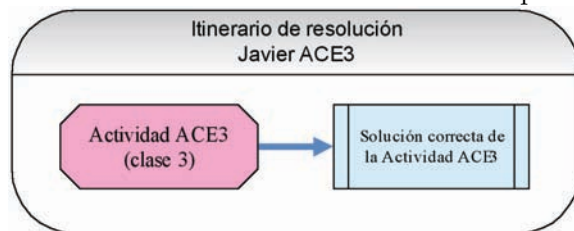
El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

#### ■ Análisis Cortesía y adecuación

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (se observa un avance en la construcción de la relación e intercambio entre profesor y alumno, lo que favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición)

#### ■ Análisis Ortografía

Figura 4.32: Itinerario de resolución de Javier para ACE3



Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.).

Nota: Javier utiliza la opción de revisión ortográfica que ofrece el programa de correo electrónico (los acentos que faltan, en “sé” o “está”, muestran justamente ese hecho: el programa no los detecta como errores ortográficos). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los ángulos, puntos y semirrectas.

■ **Análisis Vocabulario**

El vocabulario general y específico (geométrico) es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (semirrecta, circunferencia, ángulo, centro, perpendicular, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

No se evidencia; la resolución propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo no se ha superado con creatividad en principio (fueron necesarias sucesivas intervenciones docentes).

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente Ortografía y Vocabulario: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 7/12 (58,33 %)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.32) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

***Análisis de la Competencia Comunicativa***

■ **Análisis Coherencia intratextual**

Como en la actividad anterior, se describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no se justifica totalmente mediante propiedades geométricas porque los procedimientos aplicados conllevan necesariamente a una construcción que cumple con



las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

No obstante, el último apartado, se observa un esfuerzo por cumplir este requisito (justificar porqué los procedimientos geométricos aplicados son válidos para resolver la actividad); esto evidencia un avance respecto a la actividad anterior (en la que ni siquiera se evidenciaba esta necesidad y fue necesaria la intervención del profesor) pero todavía no se logra cumplir con este requisito (en el apartado mencionado, se enumeran nuevamente algunas relaciones, pero estas no terminan de justificar con solvencia la construcción, incluso de hace referencia a una “deducción” realizada en referencia a una relación observada como regularidad en el gráfico).

■ **Análisis Coherencia extratextual**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye saludo, interés personal, se observa un avance en la confianza y en el intercambio pero a la vez se mantiene el respeto correspondiente a una relación profesor alumno).

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, faltan tildes en “qué” en su uso interrogativo y en “esté”, “está” y aparece un “hestan” por “están”; sin embargo ha mejorado el uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto)

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmento, puntos, mediatrices, etc.

■ **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, perpendicular, secantes, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

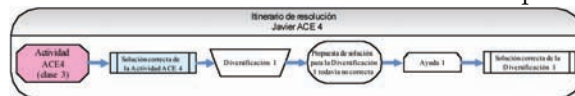
Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo no se ha superado con creatividad en principio (fueron necesarias sucesivas intervenciones docentes).

El avance respecto a la actividad anterior radica en el hecho de que esta instancia es ahora reconocida por el alumno como un requisito que forma parte de la resolución de las actividades.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 12

Figura 4.33: Itinerario de resolución de Javier para ACE4



- Ponderación general: 8/12 (66,66 %)
- Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.33) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

1ª versión: Se describe linealmente el proceso llevado a cabo y si bien no se menciona explícitamente la propiedad que fundamenta la solución, se hace referencia a la misma de manera implícita. El texto propuesto resulta coherente, la información es suficiente y completa en relación a los requisitos iniciales.

2ª versión: Ante el pedido de explicitar qué propiedad de la mediatriz de un segmento se relaciona con la solución propuesta, el alumno copia la definición de mediatriz de un segmento.

3ª versión: Ante el nuevo pedido, el alumno logra dar respuesta específicamente a lo solicitado, identificando la propiedad indicada, aunque todavía no logra contextualizar la aplicación de la misma al marco específico de la actividad en cuestión.

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

##### ■ Análisis Cortesía y adecuación

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador).

##### ■ Análisis Ortografía

Aparecen pocos errores de ortografía, faltan tildes en “satelite”, “mas”, “esta” y “tendra”, además del uso en masculino de la palabra elipse; sin embargo ha mejorado el uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto) En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos y puntos.

##### ■ Análisis Vocabulario

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, elipse, distancia, etc.)

##### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo. Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas,

Figura 4.34: Itinerario de resolución de Javier para ACE5



si bien nuevamente las mismas vinieron en respuesta a una nueva demanda por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma adecuada a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

#### ■ Valoración/ponderación

- *Componente Coherencia: 2*
- *Componente Cortesía y Adecuación: 2*
- *Componente Ortografía y Vocabulario: 3*
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos: 2*
- *Máximo asignado: 12*
- *Ponderación general: 9/12 (75%)*
- *Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2)*

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.34) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En este caso, ya no se pide la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación<sup>3</sup> geométrica, pero siempre el procedimiento debe ir acompañado de explicaciones, justificaciones, etc.

1ª versión: La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentra una relación entre las áreas para un caso particular. No se menciona la propiedad que fundamenta la relación encontrada.

2ª versión: El alumno encuentra una relación más general entre las áreas.

3ª versión: Ante el pedido de explicitar cuál es la justificación de tal relación, y después de una exhaustiva indagación por parte del alumno (diario del investigador: el alumno produce variaciones, realiza mediciones, etc.); el alumno encuentra y explicita la relación entre los cuadrados de los radios de los círculos, basándose en la relación pitagórica aplicada al triángulo rectángulo determinado entre los radios. Y a partir de ahí, relaciona esto con las áreas de los círculos.

4ª versión: Se explicita la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras). Esta

<sup>3</sup>Nótese que se trata de una pregunta abierta; no se solicita establecer ¿qué ocurre con las áreas? sino que se formula una pregunta abierta y es el alumno quién debe establecer no sólo la relación que se cumple sino entre qué elementos (radios, perímetros, áreas, . . .)

instancia supuso para el alumno dos fases: una primera para traducir la condición “aplicabilidad del Teorema de Pitágoras” en la condición “seguridad de que el triángulo es rectángulo” y luego una segunda para justificar esta afirmación mediante la propiedad mencionada (perpendicularidad entre la tangente a una circunferencia y el radio hasta ese punto).

■ **Análisis Coherencia extratextual**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. Existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes siguen manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador), tendencia que además es progresiva en los tres textos de correos enviados en relación a esta actividad (registro en el diario: una vez obtenida alguna nueva respuesta, el alumno se da prisa en enviarla pero sin perder la cortesía en sus mensajes).

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en áreas, quedarían, más, envías, aquí, Pitágoras, será, triángulo, rectángulo) y mayúsculas (Pitágoras, Francisco).

Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmento, puntos y se incorpora el uso de notaciones para las circunferencias, lo que ayuda a expresar con mayor claridad las ideas y relaciones geométricas.

■ **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (circunferencia, radio, área, punto, tangente, perpendicular, hipotenusa, intersección, tangente, triángulo rectángulo, catetos, etc.).

El único error que podría señalarse es la referencia al “área de la circunferencia”, pero en este caso el mismo puede deberse a que en la opción de Cabri aparece así<sup>4</sup>.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

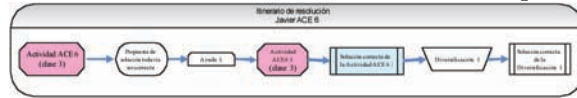
Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que suponen la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas (asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo, susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras, relación entre radios y consecuencia sobre la relación entre áreas).

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

<sup>4</sup>Esto se debe a la existencia en castellano de dos palabras diferentes (circunferencia y círculo) que se corresponden con una única en inglés (“circle”).

Figura 4.35: Itinerario de resolución de Javier para ACE6



#### ■ Valoración/ponderación

- *Componente Coherencia*: 3
- *Componente Cortesía y Adecuación*: 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario*: 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 10/12 (83,33 %)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3)

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.35) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino que lo que se solicita es encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la condición que se cumple para el perímetro.

Asimismo, se intenta justificar la relación encontrada para el perímetro. Respecto a estos argumentos:

- la implicancia entre lados paralelos dos a dos e igualdad de sus medidas se enuncia en el sentido inverso (el alumno afirma que la igualdad de las medidas le permite asegurar el paralelismo, cuando en realidad, por construcción la implicación es la recíproca)
- el hecho de que el triángulo BNP sea isósceles (necesario para asegurar la congruencia entre BN y NP) se menciona pero no se justifica el porqué recurriendo a relaciones entre ángulos determinados entre paralelas
- no es claro el orden de implicación entre estos argumentos

En las versiones siguientes, el alumno logra reordenar su discurso de manera mucho más coherente, cumpliendo ampliamente con los requisitos del problema.

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se incluye un saludo de despedida de curso y una valoración del trabajo realizado.

- **Análisis Ortografía**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en aquí, esté, triángulo, isósceles, así, cuadrilátero, conclusión, máxima, etc.).

Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros.

Se destaca, el avance que se observa entre el primer y segundo versión.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triángulo isósceles, lado, perímetro, área, teorema, etc.).

Se destaca, el avance que se observa entre el primer y segundo versión.

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

- **Valoración/ponderación**

- *Componente Coherencia: 3*

- *Componente Cortesía y Adecuación: 3*

- *Componente Ortografía y Vocabulario: 3*

- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos: 2*

- *Máximo asignado: 12*

- *Ponderación general: 11/12 (91,67%)*

- *Discurso correcto (de Nivel 3)*

*Per l de aprendizaje de Javier en relación a la competencia comunicativa (Figura 4.36)*

*Desarrollo de la competencia comunicativa de Javier a lo largo del proceso, teniendo en cuenta las distintas componentes analizadas (Figura 4.37)*

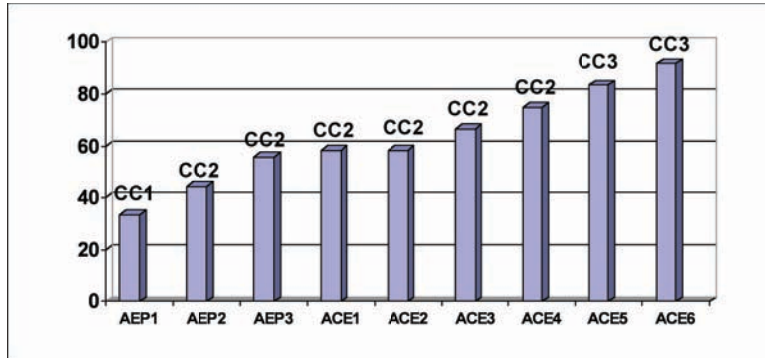


Figura 4.36: Perfil de aprendizaje de Javier en relación a CC

Figura 4.37: Desarrollo de la CC de Javier a lo largo del proceso

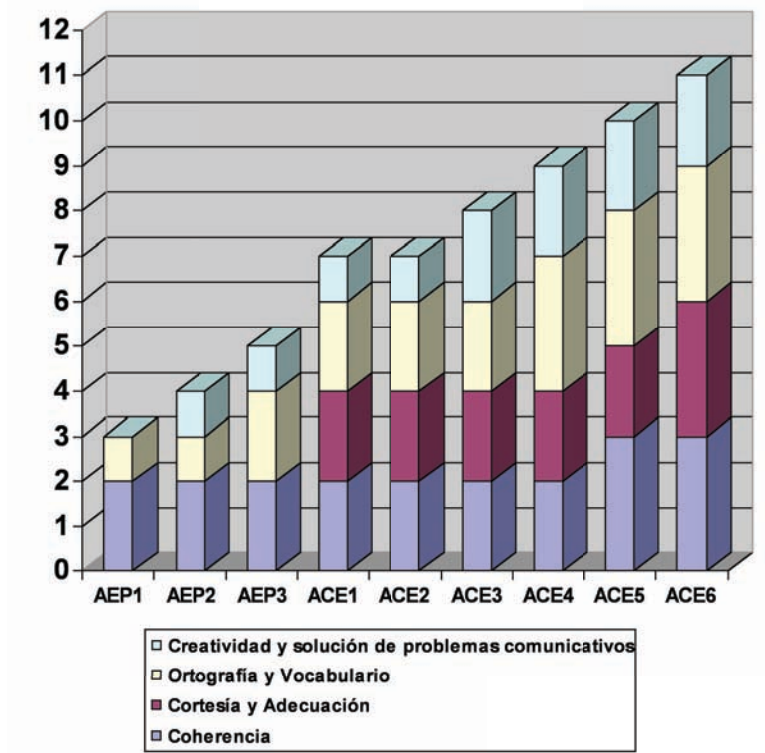


Figura 4.38: Itinerario de resolución de Blas para AEP1



### 4.3.2. Alumno 2 (Blas):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.38) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

Los textos iniciales no son coherentes debido a diversas razones: la información que contienen no es suficiente, aparecen errores en la utilización de términos geométricos (recta por segmento, paralela por perpendicular, lado por radio, etc.), no se hace uso de notaciones o de indicaciones más precisas,...

Todo esto da lugar a ambigüedades y los comentarios resultan muy confusos e incoherentes. A lo largo del proceso esta característica perdura (de hecho el alumno se resiste a escribir esos comentarios porque reconoce sus falencias) y fue necesaria la interacción con un compañero, además de las ayudas del tutor, para que el alumno pudiera mejorar su comentario en la última versión de resolución.

Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En este caso, el alumno ni siquiera llega a esa instancia, dado que ha sido necesario un trabajo intensivo sobre la construcción inicial y su descripción.

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

Existen varias contradicciones entre el texto y la construcción; muchas de ellas debidas al mal uso de los términos geométricos (dice paralelas y traza perpendiculares, dice recta y se refiere a un segmento, dice lado y se refiere al radio de la circunferencia). A esto se suma, la incoherencia intratextual, el comentario es tan vago y ambiguo que se podría corresponder con esta construcción o con muchas otras.

##### ■ Análisis Cortesía y adecuación

No se analiza en este caso.

##### ■ Análisis Ortografía

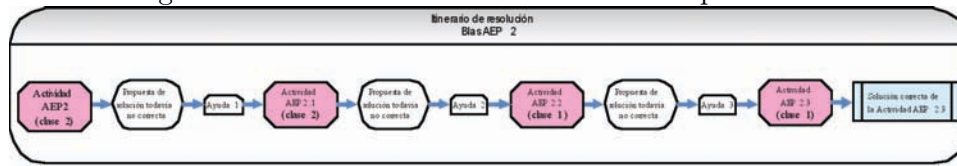
Como errores de ortografía, se destaca especialmente la no utilización de tildes (no aparece ninguna a lo largo del proceso).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados (aunque en el texto utiliza minúsculas en vez de mayúsculas para referirse a ellos); hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto.

Pero más allá de las notaciones, el error más grave aparece en la utilización de términos geométricos.



Figura 4.39: Itinerario de resolución de Blas para AEP2



#### ■ Análisis Vocabulario

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados: utiliza la expresión paralela en vez de perpendicular, recta en vez de segmento y lado en vez de radio de la circunferencia. Además de estos errores, el uso de los términos geométricos es vago y ambiguo, dado que no se especifica lo suficiente:

- respecto a las circunferencias: no se indican las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan)
- respecto a las perpendiculares: no se indican las dos condiciones mínimas para determinarlas (perpendicular a qué elemento y pasando por qué punto)

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las incoherencias del texto.

#### ■ Valoración/ponderación

- *Componente Coherencia*: 1
- *Componente Cortesía y Adecuación*: no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario*: 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 2/9 (22,22%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.39) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### ■ Análisis Coherencia intratextual

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un gran avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia, aún presenta grandes carencias. En la primera versión, el texto es coherente, aunque describe un procedimiento que no es correcto como solución de la actividad.

En la segunda versión, aparecen frases que dan lugar a ambigüedades (por ejemplo no se indica perpendicular a qué elemento); pero esto mejora en la tercera versión en respuesta a la orientación del tutor. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de por qué la construcción propuesta da lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos).

- **Análisis Coherencia extratextual**

No existen contradicciones explícitas entre las construcciones y los textos, pero por ser estos últimos de cierta vaguedad, podrían corresponderse con otras construcciones.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

No se analiza en este caso.

- **Análisis Ortografía**

Como errores de ortografía, además de faltan una h, sigue sin utilizar tildes. El alumno utiliza bien los signos de puntuación, lo que contribuye a textos más claros.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en la primera versión no se emplean notaciones; en la segunda, se identifica como avance el hecho de utilizar algunas para los puntos y segmentos aunque con ciertos errores (utilización de minúsculas para los puntos). En la tercera versión, esto se mejora ante la orientación del docente, al igual que las indicaciones respecto a la perpendicular trazada; el mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas mejoran el texto.

- **Análisis Vocabulario**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están mejor empleados que en la actividad anterior: se emplean bien las expresiones “perpendicular” y “segmento”. Aunque en algunos casos aún no se utilizan de manera totalmente correcta, lo que da lugar a ambigüedades: “la perpendicular del punto”, “las perpendicular por donde se unen...”.

El uso del vocabulario no es óptimo, pero ha mejorado notablemente. El alumno, presenta muchas dificultades y dudas respecto al uso del vocabulario geométrico, pero ha incorporado como estrategia, el recurrir a los nombres de las herramientas de Cabri que utiliza (por ejemplo, al trazar una perpendicular, que elige por su icono de Cabri, verifica el nombre que el programa asigna a dicha relación, para no cometer errores llamando por ejemplo paralela a dicha recta).

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

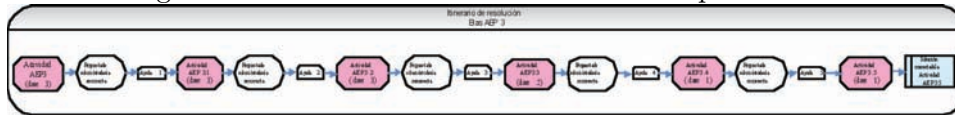
Para encontrar el punto E, el alumno traza las diagonales del cuadrado que ha construido, aunque no las identifica como tales; no obstante supera ese escollo describiendo el procedimiento de una manera alternativa: “he unido B-C y A-D”.

No se recurre a la creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta; básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema.

- **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 1
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

Figura 4.40: Itinerario de resolución de Blas para AEP3



ACTIVIDAD AEP3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.40) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

El texto muestra un nuevo avance en cuanto a la coherencia. En la primera versión, el texto es coherente, aunque describe un procedimiento que no es correcto como solución de la actividad.

En las siguientes, aparecen frases que dan respuesta a cuestiones planteadas por el profesor, aunque en algunos casos, las omisiones o la falta de informaciones más concretas dan lugar a ambigüedades (por ejemplo no se indica perpendicular a qué elemento, se hace referencia a la perpendicular a un punto, etc.).

En la última versión, y como respuesta a las orientaciones del tutor, el alumno ha podido reelaborar su comentario de manera coherente (aunque han sido muchas las ayudas que ha requerido)

No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta es correcta (insuficiencia de argumentos).

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

No existen contradicciones explícitas entre las construcciones y los textos, pero por ser estos últimos de cierta vaguedad, podrían corresponderse con otras construcciones.

##### ■ Análisis Cortesía y adecuación

No se analiza en este caso.

##### ■ Análisis Ortografía

Como errores de ortografía, el alumno sigue sin utilizar tildes. Utiliza bien los signos de puntuación, lo que contribuye a textos más claros. En cuanto al uso del lenguaje geométrico, se emplean notaciones para puntos y segmentos, y su utilización es correcta (se emplean mayúsculas para los puntos); lo que representa un avance. En las sucesivas versiones, ante las orientaciones del docente, se observa un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas, lo que mejoran el texto.

##### ■ Análisis Vocabulario

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están mejor empleados que en las actividades anteriores: se emplean bien las expresiones “perpendicular”, “circunferencia”, “mediatriz”, “distancia”, etc.

Aunque en algunos casos aún no se utilizan de manera totalmente correcta, lo que da lugar a ambigüedades: “he hecho la perpendicular a P”, ...

Aparecen además, errores de vocabulario al denominar “punto medio” al centro de la circunferencia y “recta” a un segmento.

El uso del vocabulario no es óptimo, pero ha mejorado notablemente. Como se ha dicho antes, si bien el alumno presenta muchas dificultades y dudas respecto al uso del vocabulario geométrico, ha incorporado como estrategia, el recurrir a los nombres de las herramientas de Cabri que utiliza (por ejemplo, al trazar una perpendicular, que elige por su icono de Cabri, verifica el nombre que el programa asigna a dicha relación, para no cometer errores llamando por ejemplo paralela a dicha recta.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

No se recurre a la creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta (las propiedades que fundamentan la construcción ni se mencionan); básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema.

La elaboración de textos descriptivos del procedimiento, siguen ofreciendo gran dificultad para el alumno; de manera tal que requiere de varias ayudas por parte del tutor para llevar a cabo, de manera medianamente correcta, esa tarea.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 1
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD ACE1: *Presentación profesor virtual alumno y propuesta de trabajo y Análisis de la Competencia Comunicativa*

***Análisis de la Competencia Comunicativa***

■ **Análisis Coherencia intratextual**

Aunque el mensaje es coherente, y el alumno realiza su presentación, breve pero clara; no expone sus expectativas en relación al Proyecto.

■ **Análisis Coherencia extratextual**

No se analiza en este caso.

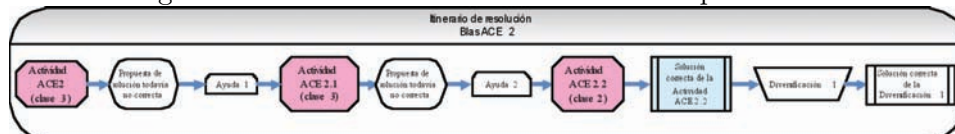
■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial; deja incluso una pregunta planteada para continuar el diálogo en siguientes correos.

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos ellos de utilización de espacios en relación a los signos de puntuación (después de comas, después de puntos); son más

Figura 4.41: Itinerario de resolución de Blas para ACE2



bien errores de mecanografía más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí.

Nota: para este primer correo, Blas consulta a la profesora presencial muchas dudas ortográficas intentando evitar hasta el último error. Valoramos positivamente esta preocupación, dado que indica que el alumno reconoce que la corrección ortográfica es también una parte importante; y aunque todavía no puede lograr esa corrección por sí mismo, ni recurre a herramientas informáticas como la revisión ortográfica (porque la desconoce), consulta varias veces a la profesora presencial para que su mensaje final no contenga errores.

#### ■ Análisis Vocabulario

El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural y se trata de un mensaje breve, la elección de palabras y expresiones es apropiada.

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso no se ha resuelto completamente, dado que si bien el alumno ha logrado hacer una sintética presentación personal, no expone sus expectativas en relación al Proyecto.

#### ■ Valoración/ponderación

- Componente *Coherencia*: 1
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- Máximo asignado: 12
- *Ponderación general*: 5/12 (41,67%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.41) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### ■ Análisis Coherencia intratextual

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo, que varias veces es incorrecto porque ha consistido en la realización de un dibujo que aparentemente cumple las condiciones solicitadas.

No aparece la justificación de porqué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. En los primeros intentos de solución, esa justificación no aparece escrita porque no ha existido (el alumno no realiza una construcción basada en propiedades sino un dibujo que pierde esas condiciones aparentes al producir variaciones sobre él).

Por esta razón, los primeros textos son coherentes respecto a la solución gráfica propuesta, pero incorrectos como propuesta de solución y asimismo la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

El profesor indica el fallo en la construcción inicial, y el alumno comprende en qué consiste, intenta por sugerencia del docente, encontrar alguna particularidad del centro de la circunferencia que busca y encuentra (por tanteo) que el mismo debe equidistar de ambas semirrectas; y posteriormente que esa distancia también debe coincidir con la distancia al segmento; identificando ese lugar geométrico con las bisectrices de los ángulos en cuestión (después de revisar una actividad resulta con anterioridad que involucraba dichos conceptos).

El alumno muestra una preocupación por describir el proceso que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso.

Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que conoce respecto de la bisectriz en un texto que incluye la propiedad en cuestión, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las “propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo” (se basa incluso para elaborar el texto en la actividad de referencia cuya revisión ha propuesto el tutor como ayuda). No se realiza una contextualización de la propiedad para el caso de la solución propuesta.

- **Análisis Coherencia extratextual**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

Los textos de los mensajes son adecuado y amenos: adecuados al destinatario y mantienen un tono cortés. Se observa un avance en la construcción de la relación entre profesor y alumno en este caso a partir del intercambio de opiniones sobre temáticas extracurriculares como el deporte, los videojuegos y las aficiones en general lo que favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición; dicho intercambio de opiniones acompaña de manera paralela, el proceso de resolución de la actividad.

- **Análisis Ortografía**

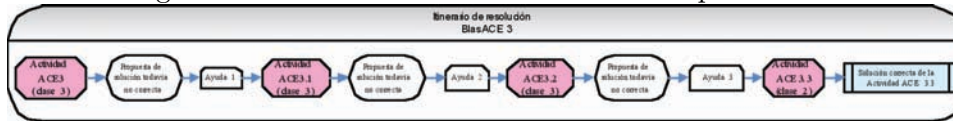
Aparecen algunos errores de ortografía: varios de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.), de espacios (entre palabras, después de signos de puntuación, etc.), de acentuación y de omisión o alteración de letras en algunas palabras.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien el escaso uso que se hace del mismo es adecuado, es justamente el hecho de que no se utilice más este lenguaje el que le da vaguedad y ambigüedad al discurso (no se nombra el centro de la circunferencia, ni los ángulos, ni el punto considerado sobre la semirrecta AB, ni el punto de tangencia, etc.)

- **Análisis Vocabulario**

El vocabulario general y específico (geométrico) es correcto. Aparece un fallo reiterado respecto al uso del término geométrico “punto medio” para hacer referencia

Figura 4.42: Itinerario de resolución de Blas para ACE3



al centro de una circunferencia (aunque las últimas dos veces que lo menciona lo hace de manera correcta). Aparecen otros términos que sí se emplean bien al ser utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (semirrecta, circunferencia, ángulo, perpendicular, tangente, radio, etc.)

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

No se evidencia; la actividad inicial ha resultado inabordable para el alumno y han sido necesarias numerosas ayudas para que consiguiera arribar a una solución correcta. De esta manera, el enunciado inicial ? de tipo problema abierto- se ha convertido en un ejercicio algorítmico.

#### ■ Valoración/ponderación

- Componente *Coherencia*: 1
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 3/12 (25%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.42) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### ■ Análisis Coherencia intratextual

El alumno describe el procedimiento propuesto a través de un texto que en principio resulta vago y ambiguo, dando lugar a distintas interpretaciones (no queda claro a qué mediatriz se refiere, a qué puntos, etc.). Por otra parte, la descripción carece de argumentos que la justifiquen; incluso ante el pedido por parte del tutor de estas razones, el alumno sólo argumenta la validez de su procedimiento mediante la verificación de la coincidencia entre los centros hallados y los que había ocultado al dibujar las circunferencias. No hace referencia a propiedades o relaciones; no se evidencia que el alumno reconozca que los procesos de justificación/ argumentación son parte de la resolución de la actividad.

En la última versión, intenta dar una explicación de este tipo (“Esto funciona porque el punto medio está en la mediatriz”), pero nuevamente la misma está incompleta y resulta imprecisa y ambigua y será necesaria una nueva ayuda para completar el enunciado de esta propiedad.

- **Análisis Coherencia extratextual**

Existe coherencia entre los textos y las soluciones gráficas, aunque por ser los primeros vagos e imprecisos, podrían dar lugar a diferentes construcciones.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto del primer mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye saludo, interés personal, y mantiene el intercambio respecto a otras temáticas como el fútbol) y se mantiene el respeto correspondiente a una relación profesor alumno.

Los textos de correo van siendo cada vez más breves en la medida que el alumno avanza en la resolución, dado que se realizan en intervalos cortos de tiempo y para dar respuesta a cuestiones planteadas en relación al versión anterior.

- **Análisis Ortografía**

Aparecen algunos errores de ortografía: varios de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.), de espacios (entre palabras, después de signos de puntuación, etc.), de acentuación y de omisión o alteración de letras en algunas palabras (“cirferencias”).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en el primer versión el uso que se hace del mismo es prácticamente nulo, es justamente el hecho de que no se utilice más este lenguaje el que le da vaguedad y ambigüedad al discurso (no se nombra los centros de la circunferencias, ni los puntos, ni los segmentos considerados, etc.). Ante el pedido del tutor, el alumno incluye notaciones geométricas y, aunque no lo hace de manera completa ni óptima, con dicha inclusión mejora su discurso.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, perpendicular, secantes, etc.); aunque sigue utilizando en una ocasión la expresión “punto medio” para hacer referencia al centro de la circunferencia. Aunque el vocabulario geométrico es correcto, como se ha dicho más arriba, el hecho de no utilizar notaciones convenientes genera imprecisión.

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

En este caso, el alumno no ha tenido dificultad para hallar la resolución gráfica a la actividad, de hecho ha conseguido hacerla sin ayudas.

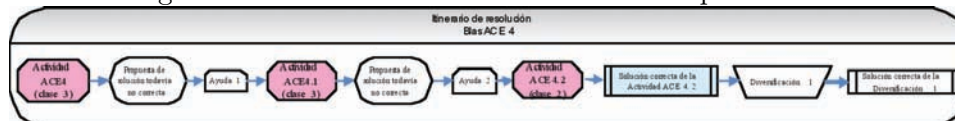
Sin embargo existen problemas comunicativos al expresar por escrito el procedimiento propuesto. Por un lado por la no utilización de notaciones geométricas y por otro, por no identificar que los procesos de justificación/ argumentación son parte de la resolución de la actividad.

El primer problema (el no uso de notaciones geométricas) podría haber sido solucionado explicitando más la descripción (utilizando por ejemplo expresiones del tipo: “mediatriz del segmento que determinan los puntos de intersección entre ambas circunferencias” que si bien no emplea notaciones geométricas resulta clara y da lugar a una única interpretación). Pero este tipo de solución no aparece y el tutor sugiere entonces la incorporación de notaciones para mejorar el discurso. Ante este pedido, el alumno mejora su producción.

Respecto al segundo problema, la cuestión no es solamente que el alumno no sepa cómo justificar sino que no identifica que los procesos de justificación/ argumentación son parte de la resolución de la actividad, con lo cual ni siquiera reconoce



Figura 4.43: Itinerario de resolución de Blas para ACE4



como problema esta dificultad. Fueron necesarias tres ayudas para que el alumno pudiera cumplimentar este requisito: en el primer intento verifica gráficamente la construcción, en el segundo enuncia una propiedad de manera muy imprecisa y en el tercero logra el enunciado definitivo con mucha ayuda del tutor.

#### ■ Valoración/ponderación

- Componente *Coherencia*:1
- Componente *Cortesía y Adecuación*:2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*:1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*:12
- *Ponderación general*: 4/12 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.43) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

1ª versión: Se describe linealmente el proceso llevado a cabo a través de un texto que resulta coherente, salvo por el hecho de que se hace referencia a un punto (C) que no aparece en la construcción, lo que da lugar a diversas interpretaciones y a ambigüedades.

2ª versión: Ante el pedido de explicitar la posición de dicho punto y la manera de hallarla, incorpora el punto a la construcción, aunque no de manera correcta porque encuentra una ubicación de C susceptible de modificaciones. Sin embargo, cuando en el texto caracteriza dicha ubicación teniendo en cuenta las condiciones del triángulo que determina ese punto C con A y B.

3ª versión: Ante el nuevo pedido, el alumno logra dar respuesta específicamente a lo solicitado, identificando que es la mediatriz de AB la que le permite determinar en forma inequívoca la ubicación del punto C. Incorpora en esta versión, la descripción de un procedimiento más directo, que permite obtener la posición de P utilizando sólo la mediatriz y prescindiendo del triángulo ABE; aunque fue necesario el trabajo con dicho triángulo (construcción, mediciones, comparaciones, análisis del tipo de triángulo en cada caso) para arribar a esta propuesta.

Un avance significativo en relación a las actividades anteriores, es que el alumno identifica la justificación a través de propiedades como parte de la resolución de la actividad: hace referencia a la propiedad de la mediatriz sin que el profesor lo solicite y aunque lo hace con un enunciado muy sencillo, que desde ya podría mejorarse, el mismo resulta acorde y está contextualizado en la resolución.

- **Análisis Coherencia extratextual**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción. En la segunda versión, cuando el alumno escribe “El punto C es justo donde es isosceles el triangulo de arriba y de abajo”, existe una incoherencia entre texto y construcción, dado que en la construcción C es un punto móvil sobre la elipse. El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción. En la segunda versión, cuando el alumno escribe “El punto C es justo donde es isosceles el triangulo de arriba y de abajo”, existe una incoherencia entre texto y construcción, dado que en la construcción C es un punto móvil sobre la elipse.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador). El tema fútbol, sigue siendo el que acompaña los intercambios a través del correo electrónico.

- **Análisis Ortografía**

En cuanto a los errores de ortografía, el alumno no usa tildes (sólo una en uno de los textos de correo) y persisten las dificultades con los espacios después de los signos de puntuación. En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los puntos, aunque todavía no se utiliza demasiado este tipo de lenguaje.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, elipse, distancia, triángulo isósceles, etc.)

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

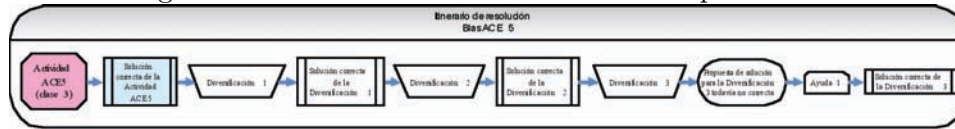
Si bien recién en la tercera versión de la solución el alumno arriba al procedimiento que le permite encontrar de manera correcta la posición crítica que limita los casos en que el cometa es estudiado por uno y otro satélite; en las versiones anteriores el alumno no se queda paralizado ante la actividad y pone en juego estrategias y conceptos que le permiten caracterizar dicha posición (“Desde el punto C hacia la derecha lo estudia el satelite B y hacia la izquierda lo estudia A. El punto C es justo cuando es isosceles el triangulo de arriba y el de abajo”) aunque todavía no logra determinarla geoméricamente de manera correcta.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, ha mejorado no sólo su enunciado se enuncia la propiedad de una forma adecuada a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores sino también el hecho de que la incorporación de la misma a la solución de la actividad ha sido iniciativa del alumno y no fue necesaria la solicitud por parte del tutor.

- **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 1
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1

Figura 4.44: Itinerario de resolución de Blas para ACE5



- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 6/12 (50%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.44) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

1ª versión: El alumno realiza correctamente la construcción (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) pero no la describe (en este caso no era un requisito de la actividad) y como sabe que debe encontrar una relación mide todo lo que puede (segmentos que coinciden con los radios, con los diámetros, áreas) e intenta encontrar alguna particularidad en esas medidas. Así encuentra la relación entre las áreas, que los segmentos que ha medido no guardan relación de suma, y que dos de los círculos son concéntricos (aunque esto se cumple por construcción). Escribe todas estas relaciones encontradas de manera clara.

2ª versión: El alumno, por sugerencia del tutor, analiza el triángulo que ha determinado en su construcción y cuyos lados ya ha medido y encuentra que se trata de un triángulo rectángulo y que se cumple entonces la relación pitagórica. Escribe un texto muy claro y coherente explicando estas cuestiones y acompaña su explicación con cálculos que incorpora al texto. Aunque en lo que escribe se refiere a hipotenusa en vez de hipotenusa al cuadrado, se puede considerar que se trata de un olvido dado que en los cálculos lo aplica correctamente.

3ª versión: Ante el pedido del tutor, el alumno analiza y explica de manera clara y coherente, la relación entre los lados del triángulo BCD y los radios de los círculos y vincula esta relación con la existente entre las áreas.

4ª versión: En un texto, el alumno justifica que el triángulo BCD es rectángulo a través de una medición; aunque no tiene validez como justificación, el texto es coherente.

5ª versión: Se explicita la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras).

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. En todos los casos, existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes siguen manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador), incluso envía algunos mensajes sin texto de correo.

- **Análisis Ortografía**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en círculo, relación, también, etc.) pero aun así representa un avance respecto a actividades anteriores en las que el alumno directamente las ignoraba (en este caso las utiliza al menos alguna vez: área, además). De todos modos el tutor en una de sus intervenciones sugiere revisar la ortografía y en las siguientes versiones el alumno mejora bastante, incorporando las tildes en los textos nuevos.

El alumno utiliza muy bien los signos de puntuación, lo que contribuye a que las ideas queden claras dando lugar a una mayor coherencia del discurso.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, los puntos y para el triángulo analizado (esta notación para el triángulo es incorporada por el alumno en la 2ª versión para mejorar su explicación); todavía es mejorable, pero se nota un avance.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (círculo, radio, área, punto, tangente, perpendicular, hipotenusa, triángulo rectángulo, catetos, etc.). El alumno llama ahora correctamente al centro de la circunferencia (en resoluciones anteriores empleaba la expresión “punto medio” para referirse a él).

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

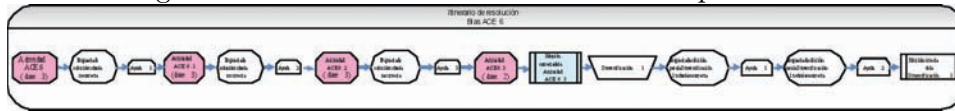
Se trata de un alumno que habitualmente presenta dificultades para el aprendizaje de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular; de hecho no dispone de tantos conocimientos geométricos previos como sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). No obstante, quizá esa carencia respecto a los demás, le ha hecho interiorizarse de muchas de las ventajas que le ofrece Cabri y utiliza esas herramientas en forma exhaustiva: mide, calcula, etc. El aprovechamiento de estas posibilidades, le ayudan a indagar sobre la situación planteada, haciendo que no se sienta “desarmado” ante ella y pueda abordarla.

De hecho en este caso, en la primera versión, mide todo lo que puede intentando buscar alguna regularidad y así encuentra la relación entre las áreas; y en la 2ª versión calcula para corroborar que se cumple el Teorema de Pitágoras en un triángulo que él mismo había señalado y medido en la versión anterior, todavía sin notar que los lados del mismo coincidían con los radios de los círculos.

El uso de Cabri, le ofrece posibilidades para abordar la resolución gráfica pero también de ir comunicando en forma de texto lo que hace, lo que encuentra, etc. con seguridad y entusiasmo.

Al referirse por ejemplo, al triángulo determinado por los radios (particularidad que en principio el alumno no nota), supera ese escollo comunicativo utilizando notación geométrica para dicho triángulo e incluso utilizando los colores como referencia; lo

Figura 4.45: Itinerario de resolución de Blas para ACE6



mismo hace con las áreas, a través de un código de colores hace referencia a ellas sin ambigüedades y de manera clara y coherente.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

#### ■ Valoración/ponderación

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 8/12 (66,66%)
- Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.45) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

Dicha construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la condición que se cumple para el perímetro. El alumno expresa ambas condiciones claramente.

Asimismo, intenta justificar la relación encontrada para el perímetro, relacionando su cálculo con “otra forma posible de hacerlo” que lleva implícitas las igualdades entre los segmentos (igualdades que ha verificado midiendo exhaustivamente y que ha apuntado de manera correcta).

La formulación del teorema, en principio resulta incompleta en relación a las condiciones que el alumno ha encontrado que se cumplen; el texto propuesto detalla perfectamente las condiciones iniciales que deben cumplirse pero deja sin escribir qué ocurrirá entonces con el perímetro y con el área. En las versiones siguientes, ante las solicitudes del tutor, logra mejorar este enunciado.

El alumno utiliza muy bien los signos de puntuación, incluso incluye guiones para organizar sus frases e incorpora colores a los dibujos y a los textos, de manera que su discurso resulta además de coherente, más claro y fácil de leer.

- **Análisis Coherencia extratextual**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado. Existen entre construcción y textos, relaciones de colores que permiten establecer conexiones visuales y mejorar la lectura.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se incluye un saludo de despedida de curso y una valoración del trabajo realizado.

- **Análisis Ortografía**

La ortografía en general ha mejorado bastante, faltan muy pocas tildes y se nota que el alumno está pendiente de este aspecto tanto en los textos de correo como en los comentarios que escribe en Cabri.

Se sigue apreciando el buen uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto): puntos, guiones, etc.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros; y este uso además ha aumentado significativamente respecto a resoluciones de actividades anteriores.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triángulo isósceles, lado, perímetro, área, teorema, etc.).

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

- **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 3
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 3
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 10/12 (83,33%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3)

*Per l de aprendizaje de Blas en relación a la CC* (Figura 4.46)

*Desarrollo de la competencia comunicativa de Blas a lo largo del proceso, teniendo en cuenta las distintas componentes analizadas* (Figura 4.47)

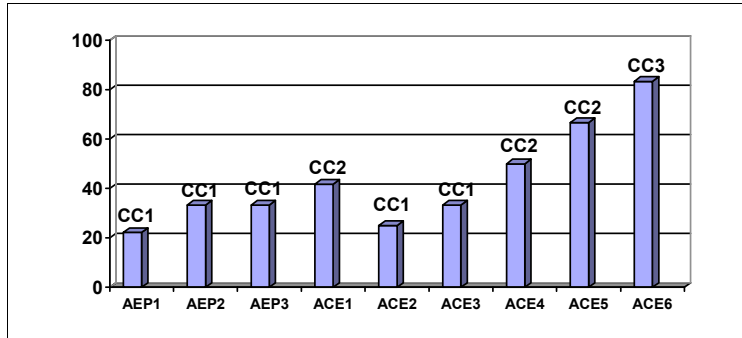


Figura 4.46: Perfil de aprendizaje de Blas en relación a CC

Figura 4.47: Desarrollo de la CC de Blas a lo largo del proceso

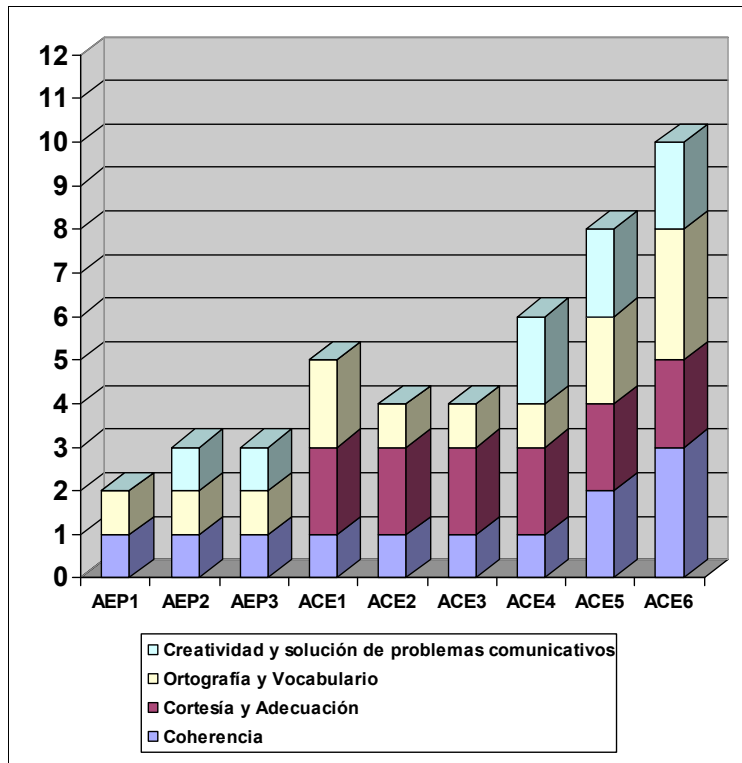
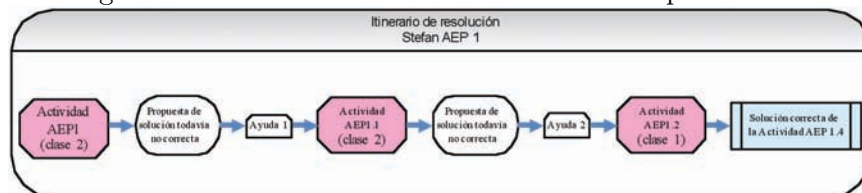


Figura 4.48: Itinerario de resolución de Stefan para AEP1



### 4.3.3. Alumno 3 (Stefan):

ACTIVIDAD AEP1: *Itinerario de resolución* (Figura 4.48) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

Si bien el texto inicial no contiene contradicciones ni repeticiones; no llega a ser totalmente coherente dado que la información no es suficiente y el no hacer uso de notaciones o de indicaciones más precisas da lugar a ambigüedades (no queda claro qué condiciones cumplen las circunferencias mencionadas, los puntos de corte entre las circunferencias y las perpendiculares no son sólo dos, etc.)

Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En respuesta al pedido del tutor, el alumno recurre a una verificación gráfica, y justifica la corrección de su construcción mencionando únicamente ese argumento pero sin relacionar las causas de esa corrección con los procedimientos que ha aplicado para realizarla.

En la 3ª versión, sí justifica la construcción explicitando que la misma es correcta por el hecho de utilizar perpendiculares y compás para realizarla.

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por presentar éste último cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

##### ■ Análisis Cortesía y adecuación

No se analiza en este caso

##### ■ Análisis Ortografía

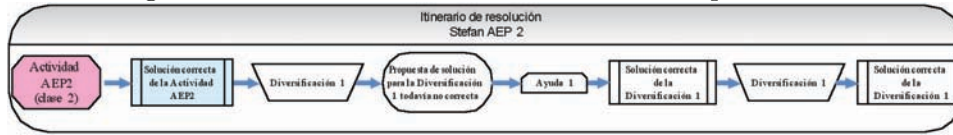
Aparecen pocos errores de ortografía, sólo relativos al uso de tildes (no se utiliza ninguna). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto.

##### ■ Análisis Vocabulario

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos geométricos están bien empleados (circunferencia, segmento, cuadrado, etc.) pero la manera en que se expresan algunas relaciones geométricas no resulta totalmente clara y da lugar a ambigüedades. Respecto a las circunferencias, por ejemplo, no se indican



Figura 4.49: Itinerario de resolución de Stefan para AEP2



las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan).

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las ambigüedades del texto

#### ■ Valoración/ponderación

- *Componente Coherencia*: 2
- *Componente Cortesía y Adecuación*: no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario*: 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

ACTIVIDAD AEP2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.49) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia; no es totalmente clara la frase “he hecho las circunferencias en A y en B”.

La ambigüedad se genera por la falta de referencia a los elementos característicos de dichas circunferencias (centro y radio). Incluso así, el texto resulta bastante claro.

Si bien en la 1ª versión se detalla con mucha claridad el procedimiento llevado a cabo; no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que las construcciones propuestas dan lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos). Para la segunda versión, ante la solicitud del profesor, el alumno justifica correctamente el proceso, recurriendo para ello a una estrategia ingeniosa que vincula su construcción con las propiedades de las diagonales del rombo.

##### ■ Análisis Coherencia extratextual

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por ser el primero de cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

##### ■ Análisis Cortesía y adecuación

No se analiza en este caso.

- **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo relativos al uso de tildes (no se utiliza ninguna). Se destaca el buen uso de la ortografía del castellano, teniendo en cuenta que la lengua madre del alumno es el rumano. En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas hubiera dado lugar a un texto más claro aún.

- **Análisis Vocabulario**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas (segmento, rombo, distancia, diagonal, perpendicular, etc.) están muy bien empleados. Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos Se evidencia creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta a través de un argumento ingenioso que relaciona la construcción con el rombo y sus propiedades. Aunque el alumno no identifica en principio la instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema; luego supera este escollo con idoneidad.

- **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: no se considera
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 1
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 2
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 5/9 (55,56%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE1: *Presentación profesor virtual alumno y propuesta de trabajo y Análisis de la Competencia Comunicativa*

***Análisis de la Competencia Comunicativa***

- **Análisis Coherencia intratextual**

El mensaje es coherente, la presentación que realiza de sí mismo es escueta pero apropiada. No justifica el porqué de la elección de la materia. La presentación de Stefan, se extenderá en el próximo correo, como respuesta al interés por parte del profesor en conocer más aspectos de su persona.

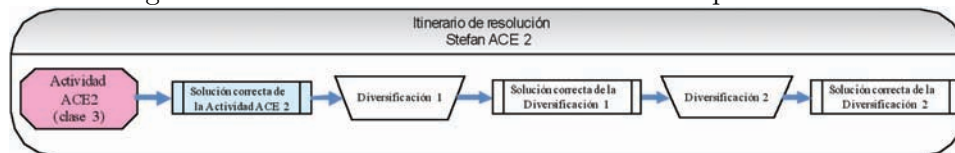
- **Análisis Coherencia extratextual**

No se analiza en este caso.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

- El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial. Al final, incorpora incluso un saludo "cordial". La formalidad en el trato, será una constante en los mensajes de Stefan (manera de saludar, trato de usted al profesor) que coincide con su trato personal que se diferencia del resto de los alumnos caracterizándose quizá por una educación anterior más rigurosa en cuanto a esas formas (en Rumania).

Figura 4.50: Itinerario de resolución de Stefan para ACE2



#### ■ Análisis Ortografía

Aparecen algunos errores de ortografía: no se utilizan tildes (sólo en el nombre del profesor, donde e ha prestado especial atención), fallos en la utilización de los signos de puntuación (faltan algunas comas en las enumeraciones), y algunos errores que son más bien de mecanografía (más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí), como la omisión de alguna letra.

#### ■ Análisis Vocabulario

El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural, la elección de palabras y expresiones es apropiada.

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso se ha resuelto parcialmente, porque el alumno pone algún reparo en extenderse; aunque se seguirá resolviendo en próximos envíos en los que el alumno irá ganando confianza y extendiendo su presentación personal.

#### ■ Valoración/ponderación

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 2
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 7/12 (58,33%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE2: *Itinerario de resolución* (Figura 4.50) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no justifica porqué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales. El alumno muestra una preocupación por describir el proceso

que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso.

Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno escribe la definición de bisectriz y la propiedad involucrada en esta resolución; ambas de manera clara y correcta (se destaca esta característica, porque a la mayor parte de los alumnos les ha costado bastante identificar esta propiedad y enunciarla con corrección).

■ **Análisis Coherencia extratextual**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (se observa un avance en la construcción de la relación e intercambio entre profesor y alumno, ante una respuesta del tutor, que muestra interés por conocer al alumno y su situación, lo que hace que Stefan se anime a contarle más cosas); esto favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición. El alumno no tutea al profesor, se dirige a él llamándolo de usted (característica común a todos los alumnos rumanos del curso), y sus mensajes presentan una formalidad mayor que la de otros alumnos.

■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, específicamente la no utilización de tildes. Para Stefan el castellano es una lengua nueva, quizá por eso pone mucho empeño en utilizarla con corrección y logra incluso superar la calidad en su uso a sus compañeros españoles (tanto en la corrección de la ortografía como en la riqueza y precisión de su vocabulario). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son muy adecuadas las notaciones empleadas para los ángulos, puntos y semirrectas.

■ **Análisis Vocabulario**

El vocabulario general y específico (geométrico) es correcto; aspecto que destacamos por el hecho de ser el alumno extranjero con lengua materna diferente al castellano. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están muy bien empleados (semirrecta, circunferencia, segmento, ángulo, centro, perpendicular, etc.).

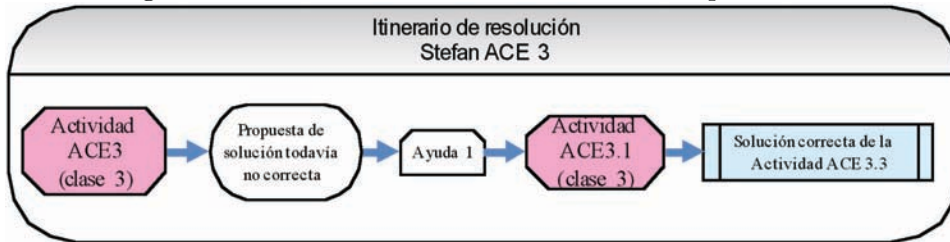
■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

No se evidencia; la resolución propuesta no ofrece para el alumno desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo se ha superado satisfactoriamente ante el pedido del profesor al igual que el análisis sobre las cuestiones planteadas por el tutor.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 3
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 8/12 (66,66 %)

Figura 4.51: Itinerario de resolución de Stefan para ACE3



- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE3: *Itinerario de resolución* (Figura 4.51) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ **Análisis Coherencia intratextual**

Como en la actividad anterior, se describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no se justifica totalmente mediante propiedades geométricas porque los procedimientos aplicados conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad.

Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

No obstante, el último apartado, se observa un esfuerzo por cumplir este requisito (justificar porqué los procedimientos geométricos aplicados son válidos para resolver la actividad); esto evidencia un avance respecto a la actividad anterior (en la que ni siquiera se evidenciaba esta necesidad y fue necesaria la intervención del tutor) pero todavía no se logra cumplir con este requisito dado que sólo justifica el procedimiento aludiendo a la coincidencia entre los centros hallados y los originales (que estaban ocultos en el gráfico) más allá de las variaciones producidas en el dibujo. No se recurre a propiedades o relaciones para dicha argumentación.

##### ■ **Análisis Coherencia extratextual**

El procedimiento descrito coincide perfectamente con el desarrollado en la construcción.

##### ■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye un saludo y mantiene su formalidad característica).

##### ■ **Análisis Ortografía**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo las tildes que siguen sin utilizarse salvo en el nombre del tutor. Se utilizan muy bien los signos de puntuación y los espacios entre párrafos (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en este caso no se han utilizado notaciones geométricas para ningún elemento.

##### ■ **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Figura 4.52: Itinerario de resolución de Stefan para ACE4



Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, etc.)

#### ■ Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece desafíos de este tipo; de hecho el alumno propone una solución que no es de las más comunes entre los alumnos.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo se ha superado con corrección. Si bien esta justificación no aparecía en la primera versión, ante la solicitud del tutor el alumno ha sido capaz de enunciar una propiedad (que incluso no recordaba o no conocía) de manera clara, correcta y contextualizada.

El avance respecto a la actividad anterior radica en el hecho de que esta instancia es ahora reconocida por el alumno como un requisito que forma parte de la resolución de las actividades.

Un aspecto más a destacar radica en el hecho de que el alumno utiliza en su construcción “cuerdas de circunferencia”; y si bien no recuerda esta expresión para denominarlas, supera esa dificultad recurriendo a una frase alternativa (“he trazado segmentos entre los puntos de las circunferencias”).

#### ■ Valoración/ponderación

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 3
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 9/12 (75%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2)

ACTIVIDAD ACE4: *Itinerario de resolución* (Figura 4.52) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

1ª versión: El alumno encuentra una solución gráfica al problema y la explica utilizando lenguaje natural de manera clara y completa. Si bien no se menciona explícitamente la propiedad que fundamenta la solución, ni se propone una justificación de la solución gráfica, aparece un intento de hacerlo (“esto sucede porque...”) que queda finalmente en una frase inconclusa.

2ª versión: Ante el pedido del tutor, respecto a explicitar porqué la solución gráfica es correcta, se incorpora una frase que explicita mejor la relación analizada para proponer la solución.

3ª versión: ante la nueva solicitud, se explicita la propiedad de la mediatriz que se relaciona con la solución propuesta de manera muy clara y contextualizada.

4ª versión: Finalmente el alumno resuelve de manera satisfactoria, gráfica y verbalmente, una diversificación que propone el análisis de un caso más general.

■ **Análisis Coherencia extratextual**

Los conceptos, relaciones, procedimientos y propiedades descritos, coinciden con los involucrados en la solución gráfica del problema.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación (incluyen saludos y conservan su formalidad característica); aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador).

■ **Análisis Ortografía**

Stefan sigue sin utilizar tildes (el tutor llama su atención sobre ello en la última intervención). Sin embargo por lo demás su ortografía en el uso del castellano es perfecta, no comete ningún fallo, utiliza muy bien los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto); aspecto que destacamos especialmente dado que se trata de un alumno extranjero que lleva cuatro años en España.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las pocas notaciones empleadas.

■ **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, cónica, distancia, etc.).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

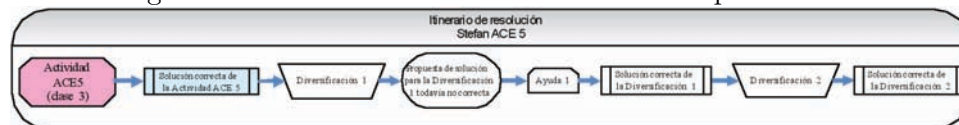
Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece desafíos de este tipo. Para la comunicación de resultados, Stefan encuentra que no conoce el nombre de la forma que tiene la órbita (elipse), pero soluciona ese problema llamándola con el nombre que aparece en las herramientas de Cabri (cónica), resultando este apropiado y solucionando así ese obstáculo en la comunicación.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien nuevamente las mismas vinieron en respuesta a una nueva demanda por parte del profesor; es muy correcto su enunciado, dado que se propone una forma adecuada a la situación del problema. En la versión final, incluso, se caracteriza el lugar geométrico de los puntos del plano más cercanos a uno u otro extremo de un segmento de manera coloquial y simple pero correcta.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 2
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2

Figura 4.53: Itinerario de resolución de Stefan para ACE5



- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 3
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 3
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 10/12 (83,33%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3)

ACTIVIDAD ACE5: *Itinerario de resolución* (Figura 4.53) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En este caso, ya no se pide la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación<sup>5</sup> geométrica, pero siempre el procedimiento debe ir acompañado de explicaciones, justificaciones, etc.

1ª versión: La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentra y se explicita la relación entre las áreas de los círculos, aunque no se menciona la propiedad que fundamenta la relación encontrada. Las ideas se presentan de forma concisa pero clara, y se acompañan de una expresión simbólica de la relación que aunque resulta un poco vaga (no queda claro que lo que se suman son las áreas), muestra un intento por escribir relaciones geométricas utilizando un lenguaje simbólico.

2ª versión: El alumno encuentra la relación pitagórica entre los radios de los círculos; escribe dicha relación y la vincula con la relación entre las áreas (a través de la multiplicación por  $\pi$ ), trabajando sobre el triángulo rectángulo que determinan, dicho triángulo aparece claramente en su gráfico, aunque recién lo mencionará de manera explícita en la siguiente versión ante la solicitud del tutor. El texto es claro, aunque lo hubiera sido más si se apoyara con una expresión simbólica de las relaciones que se enuncian.

3ª versión: En esta versión el alumno aclara en el texto que está trabajando sobre un triángulo que es rectángulo y que por ende cumple con la relación pitagórica. Incorpora además algunas expresiones simbólicas que le dan más claridad a sus comentarios; resultando un texto coherente, consistente y completo.

4ª versión: Se explicita, dentro del texto del correo electrónico, cual es la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la

<sup>5</sup>Nótese que se trata de una pregunta abierta; no se solicita establecer “qué ocurre con las áreas” sino que se formula una pregunta abierta y es el alumno quién debe establecer no sólo la relación que se cumple sino entre qué elementos (radios, perímetros, áreas, ...)



aplicación del Teorema de Pitágoras): la perpendicularidad entre la tangente a una circunferencia y el radio hasta ese punto.

■ **Análisis Coherencia extratextual**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. Existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

■ **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se observa que el alumno, que al principio tenía una actitud un tanto tímida y reservada (que es la que suele tener en todas las clases), comienza a abrirse al diálogo y al intercambio con el tutor en la medida que siente que éste se interesa no sólo en corregir sus actividades sino también en su vida personal.

■ **Análisis Ortografía**

Prácticamente no aparecen errores de ortografía, Stefan comienza a prestar atención al uso de tildes (sugerencia realizada por el tutor poco antes) y mejora mucho este aspecto de su ortografía, observándose que faltan muy pocas (en éste y área).

Se sigue apreciando el buen uso de los signos de puntuación, lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien no se utilizan notaciones para los segmentos, puntos y circunferencias, se emplea un código de colores que da lugar a un mensaje claro, sin ambigüedades, en el que las ideas se expresan con corrección.

■ **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (circunferencia, radio, área, tangente, perpendicular, hipotenusa, catetos, triángulo rectángulo, etc.); aspecto que sigue destacándose como especialmente meritorio dado que el castellano no es la lengua madre del alumno.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que suponen la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas (asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo, susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras, relación entre radios y consecuencia sobre la relación entre áreas).

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; su enunciado resulta apropiado y claro en todos los casos, proponiéndose una forma contextualizada a la situación del problema. Las afirmaciones que se realizan, se apoyan e ilustran con mediciones y cálculos que aparecen integrados en los textos y con expresiones simbólicas de las relaciones que se mencionan. Asimismo, el código de colores utilizado, termina de mejorar la comunicación de los razonamientos realizados.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 3
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 2

Figura 4.54: Itinerario de resolución de Stefan para ACE6



- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 3
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 3
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 11/12 (91,67 %)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3)

ACTIVIDAD ACE6: *Itinerario de resolución* (Figura 4.54) y *Análisis de la Competencia Comunicativa*

#### *Análisis de la Competencia Comunicativa*

##### ■ Análisis Coherencia intratextual

En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino que lo que se solicita es encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la particularidad que se cumple para el perímetro. En todos los casos, los comentarios son claros, completos y consistentes.

En la 1ª versión sólo se explicita la relación hallada para el perímetro de manera correcta y clara, pero no se justifica porqué ocurre.

En la 2ª versión, se produce un avance importante y el alumno relaciona ese perímetro constante con las medidas del triángulo inicial (aunque todavía no justifica porqué ocurre); escribe el enunciado del teorema solicitado de manera casi perfecta (incluye las condiciones iniciales que deben cumplirse y la relación que ocurrirá a partir de ellas) salvo por un pequeño fallo en la utilización de los verbos; y encuentra las circunstancias para las cuales el área del cuadrilátero se hace máxima.

En la 3ª versión, además de corregir el enunciado de su teorema, el alumno parte de la pregunta formulada por el tutor en la ayuda y explica perfectamente, proponiendo para ellos una secuencia de razonamiento que acompaña de dibujos aclaratorios, porqué el perímetro del cuadrilátero coincide con la suma de los lados iguales del triángulo ABC. En esa explicación, el alumno incluye incluso la justificación de porqué los “triángulos pequeños” resultan isósceles refiriéndose a su construcción mediante paralelas a los lados del triángulo isósceles inicial (esta justificación no suele incluida por los alumnos a menos que el tutor lo solicite a través de una diversificación que en este caso no fue necesaria). En la 4ª versión, el alumno relaciona el área máxima del cuadrilátero con la del triángulo ABC y da una explicación intuitiva de porqué el área es máxima en esas condiciones (no se pretendía una demostración de esta relación sino simplemente una explicación intuitiva).

- **Análisis Coherencia extratextual**

En todos los casos, la construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado; existiendo total coherencia entre textos y construcciones.

- **Análisis Cortesía y adecuación**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se observa un gran avance en la construcción de la relación interpersonal. Se produce un intercambio con el tutor que abarca temas culturales, religiosos, deportivos y geométricos; todos ellos de manera amena e integrada (puede notarse en los textos de correo, la manera en que el alumno se refiere a estos distintos temas, cambiando de uno a otro en los distintos párrafos en los que la geometría aparece como un tema más de conversación e intercambio).

La forma de comunicación a través del correo electrónico de Stefan, siempre respetuosa pero cada vez más extrovertida y predispuesta al intercambio, contrasta con su actitud en las clases (no sólo en las clases de esta materia sino en otras que se han observado), en las que es un alumno de lo más callado, silencioso, los profesores no conocen prácticamente nada de él más que es rumano.

Destacamos este aspecto como muy positivo, en el sentido de lograr que el alumno se sienta ante un interlocutor que lo escucha (en realidad lo lee), se interesa por los distintos aspectos de su vida permitiéndole que su cultura, sus costumbres adquieran importancia en el intercambio; sirviendo todo esto además para que el alumno logre una excelente conexión respecto a la materia y sus actividades.

- **Análisis Ortografía**

Aparecen muy pocos errores de ortografía, faltan algunas tildes (en Se, esta, solo, representara, area, este, arbitro, etc.); pero el uso de las mismas ha mejorado muchísimo.

Aparece algunas omisiones de letras o uso de unas en lugar de otras (partido en lugar de partido, ropa en vez de rompa), pero dichos errores son más de tipo mecanográfico que ortográficos. Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que contribuye a la coherencia y claridad del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros.

- **Análisis Vocabulario**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es muy correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triangulo isósceles, perímetro, área, teorema, etc.); la única observación es que hace referencia, por ejemplo, al “perímetro del amarillo” o al “perímetro de los puntos ANPM”, se supone que refiriéndose al “perímetro del polígono amarillo” o al “perímetro del cuadrilátero ANPM”.

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

Destacamos que ha sido de los poquísimos alumnos que ha propuesto un enunciado del teorema que, si bien requirió de una orientación del tutor para ser totalmente claro, resultaba claro y completo; respondiendo a las condiciones necesarias para un enunciado de teorema.

Asimismo, ante una pregunta del tutor (“¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?”); el alumno explicita sus ideas paso a paso, e incluso se ayuda de un esquema que ha improvisado utilizando Cabri, para ilustrar gráficamente su razonamiento.

■ **Valoración/ponderación**

- Componente *Coherencia*: 3
- Componente *Cortesía y Adecuación*: 3
- Componente *Ortografía y Vocabulario*: 3
- Componente *Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 3
- Máximo asignado: 12
- *Ponderación general*: 12/12 (100%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3)

*Per l de aprendizaje de Stefan en relación a la CC (Figura 4.55)*

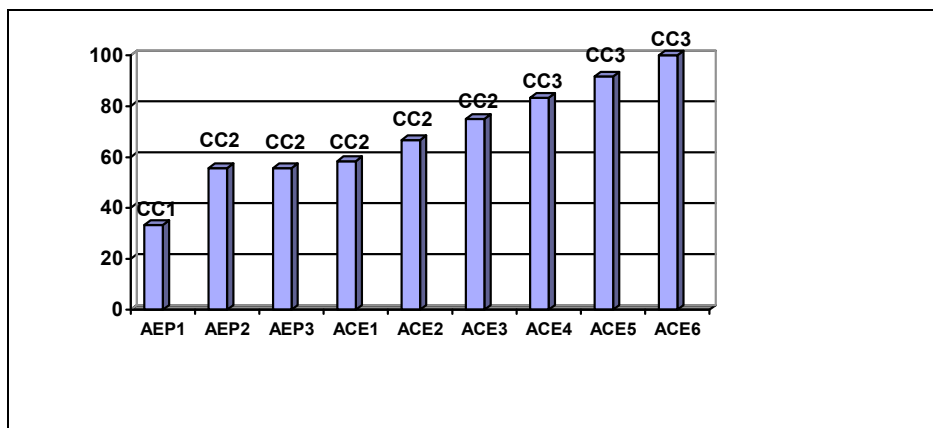
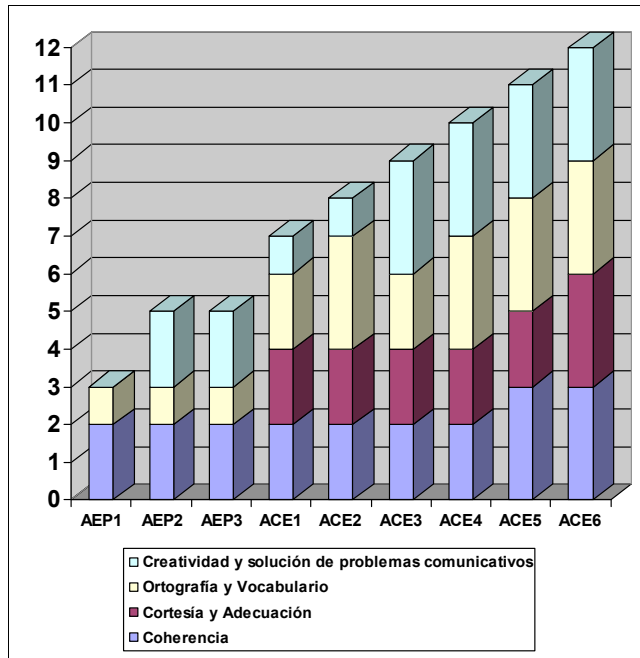


Figura 4.55: Perfil de aprendizaje de Stefan en relación a CC

*Desarrollo de la competencia comunicativa de Stefan a lo largo del proceso, teniendo en cuenta las distintas componentes analizadas (Figura 4.56)*

Figura 4.56: Desarrollo de la CC de Stefan a lo largo del proceso



#### 4.4. Estudio de las relaciones existentes entre el progreso relativo a la Competencia Comunicativa y el relativo al Aprendizaje de la Geometría

Como hemos planteado en el objetivo 6 (sección 1.2), pretendemos analizar ahora, si los progresos de los alumnos en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa y el referido al aprendizaje de la Geometría están en relación o no.

Para analizar si estas dos variables analizadas están o no correlacionadas, calcularemos el coeficiente de correlación lineal para el conjunto de resultados obtenidos para cada uno de los tres alumnos estudiados, considerando como variables  $x$  e  $y$  al nivel obtenido en cada caso para la Competencia Comunicativa y para el Aprendizaje de la Geometría.

Así, obtenemos, a partir de los valores que aparecen en los Cuadros 4.1, 4.2 y 4.3 (y que se representan en las figuras 4.57, 4.58 y 4.59, los siguientes coeficientes de correlación:

| Actividad | Nivel en relación a la CC | Nivel en relación al AG |
|-----------|---------------------------|-------------------------|
| AEP1      | 1                         | 1                       |
| AEP2      | 2                         | 2                       |
| AEP3      | 2                         | 2                       |
| ACE2      | 2                         | 2                       |
| ACE3      | 2                         | 2                       |
| ACE4      | 2                         | 3                       |
| ACE5      | 3                         | 3                       |
| ACE6      | 3                         | 3                       |

Cuadro 4.1: Valores correspondientes a Javier

| Actividad | Nivel en relación a la CC | Nivel en relación al AG |
|-----------|---------------------------|-------------------------|
| AEP1      | 1                         | 1                       |
| AEP2      | 1                         | 1                       |
| AEP3      | 1                         | 1                       |
| ACE2      | 1                         | 2                       |
| ACE3      | 1                         | 2                       |
| ACE4      | 2                         | 2                       |
| ACE5      | 2                         | 3                       |
| ACE6      | 3                         | 3                       |

Cuadro 4.2: Valores correspondientes a Blas

| Actividad | Nivel en relación a la CC | Nivel en relación al AG |
|-----------|---------------------------|-------------------------|
| AEP1      | 1                         | 1                       |
| AEP2      | 2                         | 2                       |
| AEP3      | 2                         | 2                       |
| ACE2      | 2                         | 3                       |
| ACE3      | 2                         | 3                       |
| ACE4      | 3                         | 3                       |
| ACE5      | 3                         | 3                       |
| ACE6      | 3                         | 3                       |

Cuadro 4.3: Valores correspondientes a Stefan

- Coeficiente de correlación lineal (Javier): 0,86692145
- Coeficiente de correlación lineal (Blas): 0,79259392
- Coeficiente de correlación lineal (Stefan): 0,80178373

En los tres casos, hemos obtenido valores de correlación elevada, lo que indica que existe una asociación lineal positiva bastante fuerte entre ambas

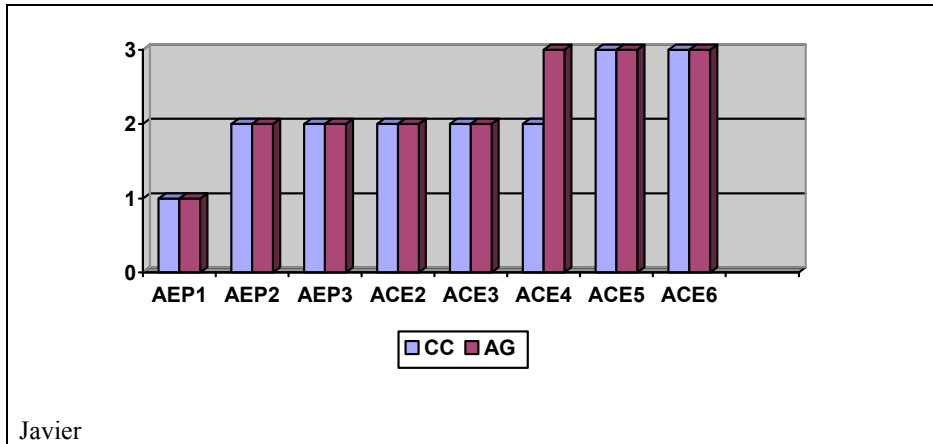


Figura 4.57: Valores correspondientes a Javier

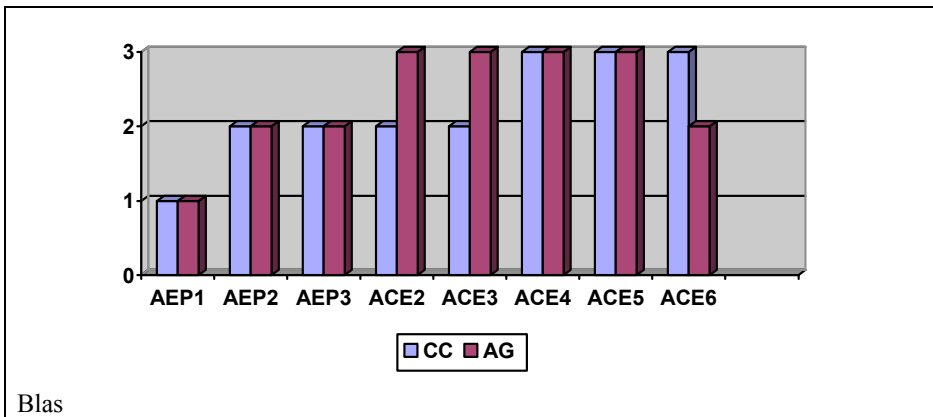


Figura 4.58: Valores correspondientes a Blas

variables en los tres casos estudiados<sup>6</sup>.

Interpretamos estas correlaciones de la siguiente manera: el desarrollo

<sup>6</sup>El coeficiente de correlación entre dos variables fluctúa entre -1.00 y + 1.00. Una puntuación de -1.00 sugiere una correlación negativa perfecta. Una puntuación de 0.00 sugiere ausencia de asociación entre las variables y una puntuación de + 1.00 sugiere una correlación positiva perfecta. Una correlación lineal positiva (si sube el valor de una variable sube el de la otra) es tanto más fuerte cuanto más se aproxime a 1 y una correlación lineal (si sube el valor de una variable disminuye el de la otra) es tanto más fuerte cuanto más se aproxime a -1

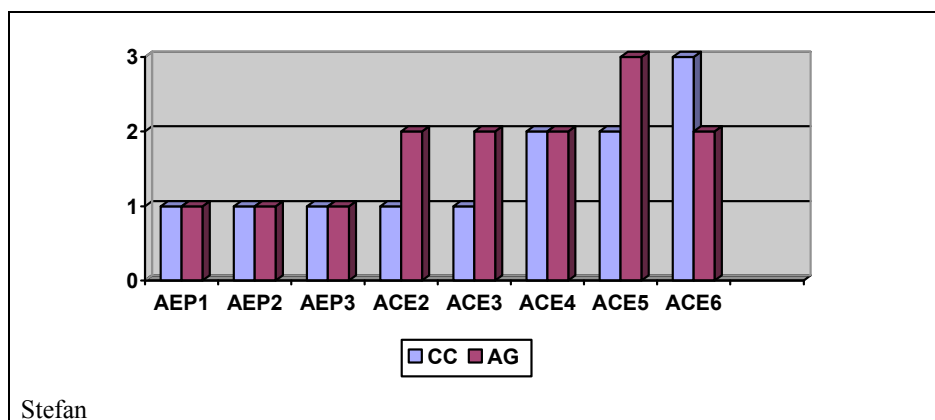


Figura 4.59: Valores correspondientes a Stefan

de la Competencia Comunicativa ha favorecido el mejor aprendizaje de la Geometría porque saber comunicar un saber, añade valor a ese saber, pero este desarrollo también se debe a las mejoras en el Aprendizaje de la Geometría en general, porque la comunicación se aprende en un contexto específico y para comunicarse es necesario compartir unas temáticas, un registro, un lenguaje común como es en este caso el geométrico que no se aprende aisladamente sino en interacción con el resto de estrategias y conceptos geométricos: los progresos generales en el aprendizaje de la geometría dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

Para los tres alumnos se han obtenido progresos notorios en relación al Aprendizaje de la Geometría y a la Competencia Comunicativa; progresos que a su vez guardan una fuerte correlación positiva entre sí.

En los tres casos, el entorno de aprendizaje utilizado ha sido determinante, especialmente teniendo en cuenta que su diseño ha contemplado aspectos comunicacionales, cognitivos e incluso afectivos; que en dicho diseño el uso de las TIC, la competencia comunicativa, el aprendizaje de la Geometría y la tutorización han funcionado como polos en permanente interacción y que se han contemplado estrategias para atender a la diversidad y de trabajo colaborativo.

En el caso de Javier, destacamos que su interés, conocimiento previo y familiaridad de uso respecto a las TIC, han contribuido a las mejoras en el Aprendizaje de la Geometría y en la Competencia comunicativa; la facilidad para el uso de los medios tecnológicos involucrados le ha dado seguridad para avanzar en los procesos comunicativos y cognitivos ofreciéndole un entorno



que le ha resultado cómodo para desarrollar dichos aspectos.

En el caso de Blas, ha resultado fundamental el sistema de ayudas progresivas y diversificaciones como estrategia para atender a la diversidad, dado que inicialmente sus conocimientos y procedimientos disponibles eran muy limitados tanto para resolver los problemas geométricos, como los tecnológicos y los comunicativos. Las interacciones producidas, las ayudas proporcionadas -que han permitido adaptar cada una de las actividades propuestas al nivel del alumno en cada momento- han favorecido los progresos producidos en Blas tanto en relación al aprendizaje de la Geometría como a la competencia comunicativa;

En el caso de Stefan, la movilización afectiva ha sido un gran motor para su compromiso en las tareas y con su propio aprendizaje; el intercambio interpersonal con el tutor en relación especialmente a temas culturales, ha acompañado y motivado el proceso de aprendizaje favoreciendo importantes avances en el aprendizaje de la Geometría y en el desarrollo de la competencia comunicativa, ésta última de especial importancia en el caso de este alumno cuyo idioma nativo no es el castellano y cuya producción de discursos escritos en este idioma ha mejorado notablemente a lo largo del proceso.

Resultados igualmente favorables se han obtenido también en el resto de los alumnos; hecho que destacamos como una ventaja del diseño del entorno virtual de aprendizaje.



## Capítulo 5

# Discusión y Conclusiones

En este apartado, presentamos una discusión sobre los resultados obtenidos y enunciamos las conclusiones correspondientes

### 5.1. En relación a la Competencia Comunicativa

Uno de los principales objetivos de nuestra investigación ha sido: *Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al desarrollo de la competencia comunicativa matemática.* (objetivo 5, sección 1.2)

La consecución de este objetivo tuvo dos etapas importantes. La primera consistió en el diseño del instrumento de análisis que utilizaríamos, con la investigación necesaria en cada caso, y la segunda en la aplicación del mismo con el consecuente análisis.

En el caso de la competencia comunicativa, para diseñar el instrumento correspondiente, hemos revisado aportes provenientes de la Didáctica de la Lengua, de la Lingüística, de los modelos comunicativos, etc.

En este caso, hemos asumido como referencia el “enfoque comunicativo”, proveniente de la Didáctica de la Lengua y de los modelos comunicativos, que puede resumirse en el axioma: “a hablar se aprende hablando” ([187], pp. 3-33), por varias razones.

Para empezar porque encontramos que era coherente con nuestro concepto de que aprender Matemáticas consiste en hacer Matemáticas<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup>El paradigma comunicativo parte de la idea de que, para los alumnos, la lengua no

Además, porque el principal interés del enfoque comunicativo consiste en el desarrollo de la competencia comunicativa<sup>2</sup>, lo cual también era adecuado para nuestro modelo de aprendizaje por competencias.

Por otro lado, el enfoque comunicativo, subraya el carácter transversal de los dominios comunicativos y en particular de los dominios lingüísticos, reconociendo la importancia de los contextos específicos en el proceso de adquisición de esas habilidades; idea con la que coincidimos y con la que coincide también el RD 1631/2006 (mec1), que establece los contenidos mínimos para la ESO<sup>3</sup>.

Al considerar la importancia del contexto específico, la comunicación ya no puede entenderse como un conjunto de contenidos aprendibles en la clase de Lengua y transferibles a otros contextos. Al aceptar que leer, entender, hablar y escribir son acciones lingüísticas, comunicativas y socioculturales, la comprensión y la producción de textos, orales o escritos, no puede aprenderse en un contexto particular y transferirse a otro cualquiera: “Se aprende a leer y a producir textos de Matemática en la clase de Matemática; se aprende a leer y a producir textos de Biología en la clase de Biología... El mejor profesor, para alcanzar la comprensión lectora y la expresión escrita en cada uno de estos contextos, serán respectivamente el profesor de Matemática, el profesor de Biología...” ([166], pp. 21-30).

---

es un objeto de estudio en sí sino un vehículo de comunicación y que, como tal, no se debe “aprender” sino que se debe “usar”, con lo cual la lengua pasa de ser un “contenido enseñable” a ser “una actividad que debe hacerse”. ([187], p.16).

<sup>2</sup>El término “Competencia comunicativa” se utiliza, para hacer referencia al conjunto de habilidades y conocimientos operativos necesarios para el manejo de una lengua, que posibilitan la capacidad de interacción comunicativa; lo que incluye diversidad de conocimientos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e interdependiente. La competencia comunicativa es una competencia cultural que hace referencia a “*el conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo lingüísticos, socio-lingüísticos, estratégicos y discursivos que el hablante/oyente escritor/lector deberá poner en juego para producir o comprender discursos adecuados a la situación y al contexto de comunicación y al grado de formalización requerido*” ([174], p. 15).

<sup>3</sup>“*Las Matemáticas contribuyen a la competencia en comunicación lingüística ya que son concebidas como un área de expresión que utiliza continuamente la expresión oral y escrita en la formulación y expresión de las ideas?. El propio lenguaje matemático es, en sí mismo, un vehículo de comunicación de ideas que destaca por la precisión en sus términos y por su gran capacidad para transmitir conjeturas gracias a un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto*” ([185], pp. 751-752)

“*Por ello, en todas las relaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y en particular en la resolución de problemas, adquiere especial importancia la expresión tanto oral como escrita de los procesos realizados y de los razonamientos seguidos, puesto que ayudan a formalizar el pensamiento.*” ([185], p. 752).

El enfoque comunicativo también resultó acorde a nuestro marco, en cuanto considera que la adquisición de los conocimientos específicos correspondientes a cada espacio curricular debe incluir la apropiación de las formas de decir de discurso en que se expresan esos conocimientos, el dominio de las habilidades de comprensión y de producción de los textos habituales en ese contexto específico: “*esperamos que nuestros alumnos y nuestras alumnas sean capaces de (re)producir o de (re)crear aquellas maneras de decir (también de hacer y de decir cómo hacen) propias del área de la que se trate*” ([190], pp. 4-6).

Destacamos los aspectos anteriores porque consideramos que este enfoque, al igual que la noción de competencia comunicativa, son nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática; es decir, nociones y modelos procedentes de otras disciplinas diferentes que se recontextualizan ([36]) en nuestra área, enriqueciendo las perspectivas de análisis y creemos que esta investigación aporta algunos elementos que contribuyen a dicho proceso de recontextualización de estas nociones.

Una vez delimitado este marco, hemos diseñado un instrumento para el análisis de la competencia comunicativa que si bien toma como punto de partida, un modelo general para el análisis de dicha competencia ([62], pp. 63-81), ha sido adaptado para un contexto de aplicación concreto como es la clase de Geometría, particularmente el proceso de producción de discursos escritos por parte de los alumnos como parte de la resolución de problemas geométricos. En esta fase hemos trabajado contrastando modelos de análisis provisorios producidos teóricamente, pero también determinado categorías provenientes del análisis de las resoluciones de los alumnos, con el objeto de perfeccionar dicho instrumento mediante aplicaciones sucesivas del mismo.

Así hemos obtenido un modelo de análisis consistente en cuatro componentes con sus correspondientes interpretaciones e indicadores y su criterio de ponderación.

Mediante la aplicación de este instrumento a resoluciones sucesivas propuestas por algunos alumnos a lo largo del Taller, hemos podido estudiar el proceso y establecer un perfil correspondiente al desarrollo de la competencia por parte de cada uno de los tres alumnos analizados, estableciendo para cada uno de ellos cuál era su nivel de competencia comunicativa en cada momento considerado y estableciendo un perfil de evolución.

Hemos obtenido así que: “*Los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su competencia comunicativa geométrica a lo largo del Taller de Matemáticas.*”

***En base a la discusión anterior, concluimos, en relación a la Competencia Comunicativa que:***

- *La comunicación matemática debe constituir un objetivo muy importante y a la vez un contenido fundamental en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría en la ESO.*

Dado que el *discurso académico geométrico* es diferente a los discursos académicos de otras disciplinas y que cumple una *función representativa* (la escritura académica como construcción del conocimiento) y una *función transaccional* (la escritura académica como demostración del conocimiento), funciones complementarias entre sí; consideramos importante tener en cuenta dicho discurso en todos los procesos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Dichos discursos están en estrecha relación con el Aprendizaje de la Geometría, dado que existe una clara conexión entre comunicación y pensamiento, por lo que a medida que los alumnos desarrollan una capacidad de comunicación matemática más clara y coherente, se van convirtiendo en mejores pensadores matemáticos.

Por esta razón, los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos deben ser considerados por las investigaciones relativas a dicho aprendizaje; pero también han de tenerse en cuenta en los procesos de enseñanza y aprendizaje relacionados con estas temáticas.

- *El “escribir de geometría”<sup>4</sup>, constituye una modalidad comunicativa que favorece el desarrollo de la competencia comunicativa matemática en particular y mejora las capacidades geométricas en general*

En el contexto de esta investigación, el proceso de producción de discursos escritos en los que los alumnos comunican sus ideas y estrategias geométricas relacionadas con la resolución de problemas geométricos, ha contribuido al desarrollo de la competencia comunicativa geométrica y por tanto al pensamiento geométrico; es decir: la producción de discursos se ha constituido en una tarea lingüística con consecuencias matemáticas.

Además, dadas las características del entorno de aprendizaje, consistente en un formato de enseñanza bimodal <sup>5</sup>, la producción de dis-

---

<sup>4</sup>Proceso de producción de discursos escritos en los que los alumnos explican, justifican, describen el procedimiento que han llevado a cabo para la resolución de problemas, empleando el lenguaje natural como metalenguaje.

<sup>5</sup>Enseñanza presencial y virtual ([267] y [268])

cursos escritos ha jugado un rol superador al de “tarea escolar” ya que ha tenido una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor - alumno y alumno alumno.

- *El modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones ha resultado beneficioso, mejorando la capacidad de comunicación tanto matemática como personal por parte de los alumnos, al darle una dimensión real al proceso.*

Cuando la comunicación entre alumnos y con el tutor es virtual, mediada por las TIC; la producción de discursos escritos juega un rol superador al de “tarea escolar” ya que adquiere una dimensión comunicativa real e imprescindible en las interacciones profesor alumno y alumno alumno.

La existencia de esta necesidad comunicativa real generada por la comunicación virtual, cuando es indispensable expresar por escrito tanto las ideas matemáticas como las interacciones personales, se producen mejoras en el proceso de comunicación por parte de los alumnos; en especial en los procedimientos relacionados con la expresión por escrito.

- *El “enfoque comunicativo” y la noción de competencia comunicativa, constituyen nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática que aportan valiosas perspectivas de análisis y potentes herramientas para contribuir a analizar y mejorar los procesos relacionados con la producción de discursos geométricos y a la vez el Aprendizaje de la Geometría.*

El enfoque comunicativo, resulta una perspectiva interesante en tanto que:

- parte del axioma de que “a hablar se aprende hablando”;
- su principal interés consiste en el desarrollo de la competencia comunicativa;
- subraya el carácter transversal de los dominios comunicativos y en particular de los dominios lingüísticos, reconociendo la importancia de los contextos específicos en el proceso de adquisición de esas habilidades; considera que cada forma de comunicación debe aprenderse en su contexto específico: la comprensión y la producción de textos, orales o escritos,

no puede aprenderse en un contexto particular y transferirse a otro cualquiera: se aprende a leer y a producir textos de Matemática en la clase de Matemática;

- considera que la adquisición de los conocimientos específicos correspondientes a cada espacio curricular debe incluir la apropiación de las formas de decir de discurso en que se expresan esos conocimientos, el dominio de las habilidades de comprensión y de producción de los textos habituales en ese contexto específico

Asimismo, la noción de competencia comunicativa, resulta una noción apropiada en tanto hace referencia al conjunto de procesos y conocimientos de diverso tipo (lingüísticos, socio lingüísticos, estratégicos y discursivos) necesarios para la interacción comunicativa, que incluye diversidad de conceptos, estrategias, destrezas cuyo carácter es integrador e interdependiente. Es decir: entiende el aprendizaje de la comunicación como el desarrollo de una competencia cultural formada por capacidades complejas; visión que resulta acorde con nuestra idea de considerar la clase de matemáticas como un sistema complejo en el que las interacciones entre los cuatro polos del sistema educativo (alumno, profesor, conocimiento y medio) producen beneficios en los alumnos que van más allá del contenido matemático en sí mismo y que conciernen dimensiones cognitivas y sociales más amplias.

## 5.2. En relación al Aprendizaje de la Geometría

Uno de los principales objetivos de nuestra investigación ha sido: *Analizar los beneficios producidos en los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría.*(objetivo 3, sección 1.2)

Nuevamente, la consecución de este objetivo tuvo dos etapas: el diseño de los instrumentos de análisis que utilizaríamos, y la aplicación de los mismos con el consecuente análisis.

Para la primera etapa, hemos revisado modelos para analizar los aprendizajes geométricos en un modelo de trabajo por competencias, hemos estudiado los modelos propuestos por diversos investigadores para el proceso de resolución de problemas matemáticos, hemos analizado el diseño propuesto por OCDE/PISA, etc. A partir de estas indagaciones, hemos podido sintetizar nuestro concepto de Aprendizaje de la Geometría en la pregunta:



“¿El alumno es capaz de poner en juego las competencias necesarias para la resolución de las actividades planteadas?”. Aunque esta pregunta puede descomponerse en algunas otras: “¿Es capaz de convertir un enunciado real en un enunciado matemático, ¿Es capaz de traducir el enunciado matemático a una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?, ¿Es capaz de aplicar y adaptar las estrategias necesarias (producción de variaciones, visualización, medición, construcción, cálculo, ...) para resolver el problema?, ¿Es capaz de identificar, seleccionar y aplicar los conceptos y relaciones construidos anteriormente para resolver el problema?, ¿Es capaz de controlar el proceso de resolución y reflexionar sobre él?, ¿Es capaz de comunicar acerca del modelo y de sus resultados dando una solución al problema propuesto?”

Con lo cual, el progreso de los alumnos en relación al Aprendizaje de la Geometría se evidencia en la mejora de los indicadores anteriores a lo largo del proceso, por eso esas cuestiones son las que se han convertido en parte del instrumento de análisis, conjuntamente con la información respecto a las ayudas recibidas y las diversificaciones resueltas, que dan cuenta de la complejidad de la tarea en cada momento.

Así hemos obtenido un modelo para el análisis del Aprendizaje de la Geometría consistente en unas componentes con sus correspondientes interpretaciones e indicadores, identificando asimismo ciertas capacidades asociadas a cada una de las componentes, y estableciendo un criterio de ponderación.

Mediante la aplicación de este instrumento, hemos analizado cada una de las resoluciones propuestas por los tres alumnos estudiados para ocho de las nueve actividades previamente determinadas. El análisis de cada una de estas resoluciones teniendo en cuenta las componentes y los indicadores propuestos por dicho instrumento, nos ha permitido establecer de qué clase ha resultado ser cada actividad para cada alumno, según las tareas involucradas en dicha resolución.

En base al análisis de cada uno de los indicadores, hemos podido establecer el nivel general del alumno en relación al Aprendizaje de la Geometría en cada momento y establecer el perfil correspondiente para cada uno de estos alumnos estudiados.

Hemos obtenido así que: “Los tres alumnos han evolucionado positivamente, en el sentido de poder resolver estratégicamente actividades cada vez más complejas según resulta del estudio de su itinerario de resolución recorrido en cada caso.”

*En base a la discusión anterior, concluimos, en relación al Aprendizaje de la Geometría que:*

- *El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría, puede organizarse a través de un modelo para organizar las actividades (modelo basado en el sistema de ayudas progresivas y diversificaciones) que permite atender a la diversidad en el aula, adaptando las actividades a cada alumno de manera que cada uno desarrolle al máximo sus potencialidades de aprendizaje y sin perder la coherencia dada por los contenidos geométricos planteados.*

A través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, hemos logrado en cada momento, proponer a los alumnos actividades asequibles pero resistentes; es decir que hemos conseguido graduar la complejidad de cada una de ellas adaptándolas al nivel de cada alumno de manera tal que cada uno pudiera resolverlas pero a la vez encontraran en ellas la resistencia necesaria para poder evolucionar en sus conocimientos anteriores.

Así, hemos conseguido dar una respuesta estratégica al problema de la atención a la diversidad, posibilitando que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, pero sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por el total de los alumnos.

- *Resulta posible y motivador organizar la enseñanza de la Geometría en la ESO a través de un entorno interactivo de aprendizaje que incluya el uso de TIC.*

En el Taller de Matemáticas, hemos podido organizar la enseñanza de la Geometría que pretendíamos abordar, a través del entorno virtual de aprendizaje, encontrando en cada caso actividades apropiadas para desarrollar los contenidos y para cumplir los objetivos que nos habíamos propuesto.

El trabajo en este tipo de entornos puede, como ha ocurrido en este caso, fomentar el interés de los alumnos, despertar su curiosidad, aumentar la confianza en ellos mismos, y generar el deseo de hacer o aprender matemáticas; actitudes indispensables para el aprendizaje.

### 5.3. En relación a la incorporación de las TIC y el diseño de entornos interactivos de aprendizaje. Aportaciones sobre investigación

Al plantear los objetivos para esta investigación, definíamos como uno de los requisitos previos el siguiente:

*Diseñar actividades que permitan atender a la diversidad en el aula (adaptables a cada interlocutor), que permitan el máximo desarrollo de las potencialidades de cada alumno.*(necesidad B, sección 1.2)

Dicho requisito venía asociado a un objetivo que nos proponíamos para los alumnos.<sup>6</sup>, (Anexo I).

Al definir este objetivo, pretendíamos que todos los alumnos tuvieran oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas, queríamos lograr que el entorno permitiera realizar adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener los mejores logros según sus posibilidades en cada momento; es decir atendiendo las necesidades especiales de algunos alumnos sin entorpecer el aprendizaje de otros. Por el contrario queríamos generar diferentes niveles de complejidad y profundidad, posibilitando así a cada uno de los alumnos desarrollar al máximo sus potencialidades.

Hemos logrado esta adaptabilidad a receptores tan diversos, a través de un sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones”.

El sistema de “ayudas progresivas” y “diversificaciones” y la idea de “itinerario de resolución”, han constituido una herramienta potente para dar una respuesta estratégica al problema de la atención a la diversidad, posibilitando que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, logrando uniformidad en las temáticas desarrolladas por el total de los alumnos sin que esto signifique uniformidad en la complejidad y permitiendo dar una respuesta a las necesidades de todos los alumnos con cierta flexibilidad.

---

<sup>6</sup>“que los alumnos desarrollen al máximo sus propias potencialidades a través de actividades adaptables a cada interlocutor, que especifiquen tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y que permitan a cada uno el máximo desarrollo de sus capacidades”

Hemos denominado “*ayudas progresivas*” a las orientaciones docentes que se administran gradualmente cuando el enunciado inicial no es asequible para el alumno, orientaciones que pretenden convertir dicho enunciado en uno abordable de tal manera que el alumno sea capaz de resolver la actividad. Una ayuda puede consistir, según el caso, en recordar una definición, realizar una sugerencia, proponer un procedimiento, formular una nueva pregunta, reformular la pregunta inicial, aportar un dibujo, etc. Estas ayudas se van aportando gradualmente porque, como hemos mencionado, pretendemos que sean las necesarias pero también las suficientes para resolver el problema. La cantidad y el tipo de ayudas, así como el momento en que se aportan, dependen de cada alumno y cada actividad.

Hemos llamado “*diversificaciones*” de la actividad inicial, a las propuestas que el docente realiza a cada alumno una vez que la actividad propuesta inicialmente, ya ha sido resuelta correctamente. Estas diversificaciones, tienden a aumentar el nivel de profundidad, complejidad y formalización de la actividad inicial; y pueden consistir en la generalización de resultados, en la demostración de la propiedad involucrada en la resolución, en el análisis de otros casos, en la expresión simbólica de algún resultado, etc. Al igual que las ayudas, las diversificaciones también se van incorporando gradualmente y la cantidad, tipo y momento en que se aportan, dependen de cada alumno.

Llamamos “*itinerario de resolución*” a la secuencia recorrida por un alumno en la resolución de una actividad dada, teniendo en cuenta las ayudas que fueron necesarias y las diversificaciones que fueron posibles en cada caso.

***En base a la discusión anterior, concluimos, en relación al diseño de entornos virtuales de aprendizaje, que:***

- *Es posible diseñar e implementar entornos virtuales de aprendizaje (EVA) que permitan atender a la diversidad en el aula, en el sentido de posibilitar el máximo beneficio cognitivo a cada alumno.*

Con el sistema de “*ayudas progresivas y diversificaciones*”, hemos logrado que en cada momento, cada alumno siga su propio itinerario de resolución; que todos cumplan con las expectativas básicas propuestas para una actividad que se vuelve asequible a cada resolutor pero también, que todos desarrollen al máximo sus potencialidades respecto a ella, de manera tal que se ha permitido a cada uno alcanzar el nivel de profundización y formalización más conveniente.

Así, si bien el enunciado inicial de las actividades se corresponde en principio con el de “problemas abiertos”, como dichos enunciados se van adaptando a las necesidades cognitivas de cada alumno a través del sistema de ayudas progresivas y diversificaciones, puede resultar que, según el itinerario de resolución recorrido, una misma actividad termine convirtiéndose en “problema de aplicación” o en “ejercicio algorítmico” para distintos alumnos<sup>7</sup>.

Logramos de esta manera que, en cada momento, todos los alumnos estuvieran trabajando sobre la misma actividad (sobre los mismos contenidos), y evitamos así que los que terminaran más rápido avanzaran hacia otras actividades o tuvieran que esperar equiparando sus tiempos al de los que trabajan un poco más lento, tiempo que también pretendíamos respetar.

La implementación de este sistema de “ayudas progresivas” y “diversificaciones” ha cobrado especial relevancia en un Instituto en el cual la diversidad en las aulas es una de las características más notorias, como se describe en el Anexo IV.

Esta propuesta para atender la diversidad en el aula que permite adaptar las actividades a cada alumno con cierta flexibilidad, se ha implementado en el marco de esta investigación, a través de un entorno virtual de aprendizaje, diseñado para trabajar con alumnos de ESO, y con contenidos geométricos; pero consideramos que es posible su adaptación y aplicación a otros contextos de aprendizaje, es decir que es transferible a otros niveles de escolaridad, a otro tipo de entornos de aprendizaje, etc. siempre que realicen las adecuaciones pertinentes.

---

<sup>7</sup> Siguiendo a Alsina y otros (1997):

**Ejercicios algorítmicos:** requieren de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, para obtener un resultado buscado.

**Problemas de aplicación:** implican la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos. El resolutor toma decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Se caracterizan porque en sus enunciados suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar, . . .

**Problemas de enunciado abierto:** sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Se diferencian de los anteriores porque en sus enunciados no suelen aparecer palabras tales como resolver, dibujar, comprobar, construir, hallar, . . .

## 5.4. Análisis de los perfiles de aprendizaje de cada uno de los alumnos y su beneficio cognitivo

A continuación, sintetizamos los resultados obtenidos en el análisis de las resoluciones propuestas por los tres alumnos analizados, y a la vez representamos los mismos a través de diferentes gráficos y tablas.

### 5.4.1. Evolución producida en relación al desarrollo de la Competencia Comunicativa

Al analizar cómo ha evolucionado los tres alumnos en relación a la competencia comunicativa (CC), hemos obtenido que:

- Los tres alumnos han progresado en relación al desarrollo de su competencia comunicativa geométrica a lo largo del Taller de Matemáticas (como muestran las figuras 4.36, 4.46 y 4.55).
- Si analizamos más minuciosamente qué ha ocurrido con cada una de las componentes de este análisis, notamos que la evolución ha sido en relación a cada una de ellas (como se desprende de los valores del cuadro 18, y como se representa en las figuras 4.37, 4.47 y 4.56; y también en las figuras 5.1, 5.2 y 5.3).

**En la figura 5.4 se presenta la evolución de la CC por componentes**

### 5.4.2. Evolución producida en relación al Aprendizaje de la Geometría

Al aplicar el instrumento diseñado para el análisis del Aprendizaje de la Geometría, hemos obtenido que:

- Los tres alumnos han evolucionado positivamente, en el sentido de poder resolver actividades cada vez más complejas según resulta del estudio de su itinerario de resolución recorrido por cada uno de los alumnos en cada caso (como muestran las figuras 4.9, 4.18 y 4.27).

Figura 5.1: Evolución de CC por componentes(Javier)

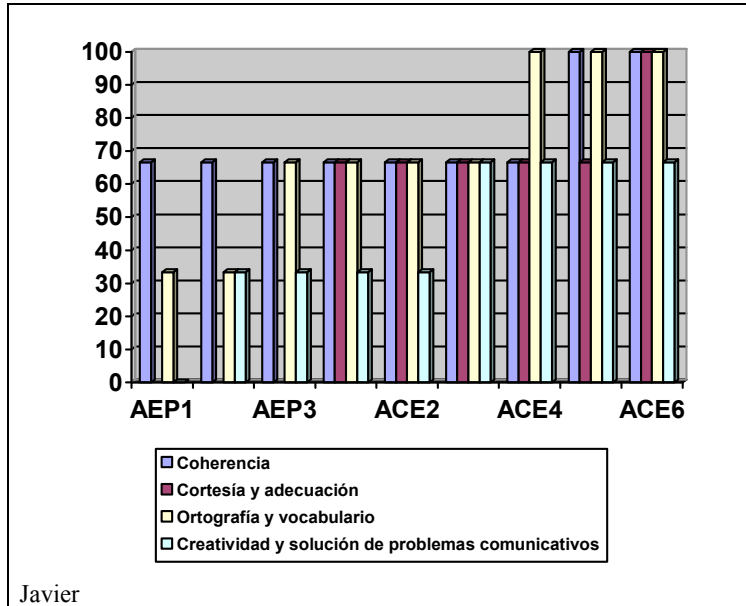


Figura 5.2: Evolución de CC por componentes(Blas)

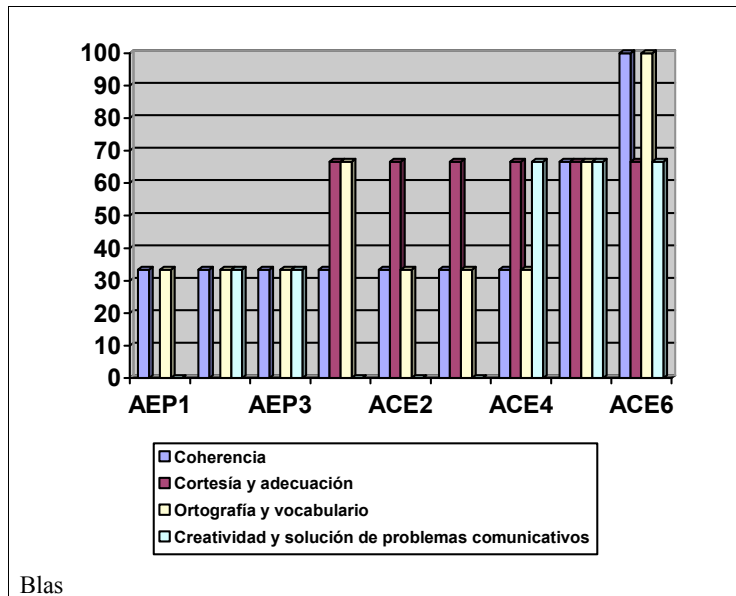


Figura 5.3: Evolución de CC por componentes(Stefan)

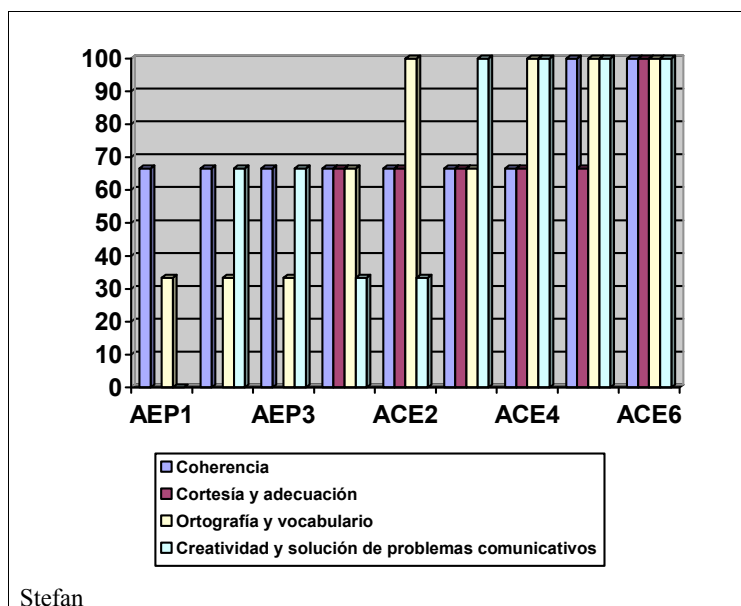


Figura 5.4: evolución de la CC por componentes

|      | Coherencia |        |        | Cortesía y adecuación |        |        | Ortografía y vocabulario |        |        | Creatividad y solución de problemas comunicativos |        |        |
|------|------------|--------|--------|-----------------------|--------|--------|--------------------------|--------|--------|---|--------|--------|
|      | Javier     | Stefan | Blas   | Javier                | Stefan | Blas   | Javier                   | Stefan | Blas   | Javier  | Stefan | Blas   |
| AEP1 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | ---                   | ---    | ---    | 33,33%                   | 33,33% | 33,33% | 0%  | 0%     | 0%     |
| AEP2 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | ---                   | ---    | ---    | 33,33%                   | 33,33% | 33,33% | 33,33%  | 66,67% | 33,33% |
| AEP3 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | ---                   | ---    | ---    | 66,67%                   | 33,33% | 33,33% | 33,33%  | 66,67% | 33,33% |
| ACE1 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | 66,67%                | 66,67% | 66,67% | 66,67%                   | 66,67% | 66,67% | 33,33%  | 33,33% | 0%     |
| ACE2 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | 66,67%                | 66,67% | 66,67% | 66,67%                   | 100%   | 33,33% | 33,33%  | 33,33% | 0%     |
| ACE3 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | 66,67%                | 66,67% | 66,67% | 66,67%                   | 66,67% | 33,33% | 66,67%  | 100%   | 0%     |
| ACE4 | 66,67%     | 66,67% | 33,33% | 66,67%                | 66,67% | 66,67% | 100%                     | 100%   | 33,33% | 66,67%  | 100%   | 66,67% |
| ACE5 | 100%       | 100%   | 66,67% | 66,67%                | 66,67% | 66,67% | 100%                     | 100%   | 66,67% | 66,67%  | 100%   | 66,67% |
| ACE6 | 100%       | 100%   | 100%   | 100%                  | 100%   | 66,67% | 100%                     | 100%   | 100%   | 66,67%  | 100%   | 66,67% |

- Desde nuestra perspectiva, que considera que aprender Geometría es hacer Geometría, a través de la resolución estratégica de problemas, podemos afirmar que los alumnos han progresado, mostrándose cada vez más competentes para la resolución de este tipo de actividades cada vez más complejas (como sintetiza el cuadro 19). Los esquemas de los itinerarios de resolución para cada una de las actividades pueden verse en el Anexo VI.

En la figura 5.5 se presenta la relación entre el itinerario recorrido, la clase de actividad resuelta por el alumno y su nivel en relación al Aprendizaje



de la Geometría.

Figura 5.5: Itinerario, actividad resuelta y nivel

|      |        | Cantidad de ayudas | Cantidad de diversificaciones | Clase de actividad resuelta por el alumno | Nivel del alumno en relación al AG |
|------|--------|--------------------|-------------------------------|---|------------------------------------|
| AEP1 | Javier | 2                  | -                             | Clase 1                                   | AG1                                |
|      | Stefan | 2                  | -                             | Clase 1                                   | AG1                                |
|      | Blas   | 4                  | -                             | Clase 1                                   | AG1                                |
| AEP2 | Javier | -                  | 1 (con 2 ayudas)              | Clase 2                                   | AG2                                |
|      | Stefan | -                  | 2 (con 1 ayuda)               | Clase 2                                   | AG2                                |
|      | Blas   | 3                  | -                             | Clase 1                                   | AG1                                |
| AEP3 | Javier | 3                  | -                             | Clase 2                                   | AG2                                |
|      | Stefan | 3                  | -                             | Clase 2                                   | AG2                                |
|      | Blas   | 4                  | -                             | Clase 1                                   | AG1                                |
| ACE2 | Javier | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | AG2                                |
|      | Stefan | -                  | 2                             | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Blas   | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | AG2                                |
| ACE3 | Javier | -                  | -                             | Clase 3                                   | AG2                                |
|      | Stefan | 1                  | -                             | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Blas   | 3                  | -                             | Clase 2                                   | AG2                                |
| ACE4 | Javier | -                  | 1 (con 1 ayuda)               | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Stefan | -                  | 3                             | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Blas   | 2                  | -                             | Clase 2                                   | AG2                                |
| ACE5 | Javier | 1                  | 2                             | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Stefan | -                  | 2 (con 1 ayuda)               | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Blas   | -                  | 3                             | Clase 3                                   | AG3                                |
| ACE6 | Javier | 1                  | 1                             | Clase 3                                   | AG3                                |
|      | Stefan | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | AG3                                |
|      | Blas   | 3                  | 1 (con 2 ayudas)              | Clase 2                                   | AG2                                |

### 5.4.3. Relaciones entre el progreso relativo a la Competencia Comunicativa y el relativo al Aprendizaje de la Geometría

Uno de nuestros objetivos de investigación era:

*Analizar la existencia o no de correlación entre los progresos en el desarrollo de la Competencia Comunicativa y los progresos en el Aprendizaje de la Geometría (objetivo 6, sección 1.2)*

Después de analizar los perfiles para cada alumno en lo que respecta al desarrollo de la Competencia Comunicativa y al Aprendizaje de la Geometría, hemos estudiado la existencia o no de correlaciones entre ambos progresos, obteniendo valores de correlación elevada, lo que indica que existe una asociación lineal positiva bastante elevada (ver Figura 5.6) entre ambas variables en los tres casos estudiados.

Figura 5.6: Coeficientes de correlación lineal entre CC y AG

| <b>Alumno</b> | <b>Coeficiente de correlación lineal</b> |
|---------------|--|
| Javier        | 0,86692145                               |
| Blas          | 0,79259392                               |
| Stefan        | 0,80178373                               |

Esto nos lleva a pensar que el desarrollo de la Competencia Comunicativa ha favorecido el mejor aprendizaje de la Geometría porque saber comunicar un saber añade valor a ese saber, pero este desarrollo también se debe a las mejoras en el Aprendizaje de la Geometría en general, porque la comunicación se aprende en un contexto específico y para comunicarse es necesario compartir unas temáticas, un registro, un lenguaje común como es en este caso el geométrico que no se aprende aisladamente sino en interacción con el resto de estrategias y conceptos geométricos: los progresos generales en el aprendizaje de la geometría dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

El cuadro de la Figura 5.7 sintetiza toda la información del proceso estudiado para cada alumno.

Figura 5.7: Síntesis de información correspondiente a cada alumno

| Actividad | Alumno | Cantidad de ayudas | Cantidad de diversificaciones | Clase de actividad resuelta por el alumno | Nivel del alumno en relación a la CC | Nivel del alumno en relación al AG |
|-----------|--------|--------------------|-------------------------------|---|--------------------------------------|------------------------------------|
| AEP1      | Javier | 2                  | -                             | Clase 1                                   | CC1                                  | AG1                                |
|           | Stefan | 2                  | -                             | Clase 1                                   | CC1                                  | AG1                                |
|           | Blas   | 4                  | -                             | Clase 1                                   | CC1                                  | AG1                                |
| AEP2      | Javier | -                  | 1 (con 2 ayudas)              | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Stefan | -                  | 2 (con 1 ayuda)               | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Blas   | 3                  | -                             | Clase 1                                   | CC1                                  | AG1                                |
| AEP3      | Javier | 3                  | -                             | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Stefan | 3                  | -                             | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Blas   | 4                  | -                             | Clase 1                                   | CC1                                  | AG1                                |
| ACE1      | Javier |                    |                               |   | CC2                                  | -                                  |
|           | Stefan |                    |                               |   | CC2                                  | -                                  |
|           | Blas   |                    |                               |   | CC2                                  | -                                  |
| ACE2      | Javier | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Stefan | -                  | 2                             | Clase 3                                   | CC2                                  | AG3                                |
|           | Blas   | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | CC1                                  | AG2                                |
| ACE3      | Javier | -                  | -                             | Clase 3                                   | CC2                                  | AG2                                |
|           | Stefan | 1                  | -                             | Clase 3                                   | CC2                                  | AG3                                |
|           | Blas   | 3                  | -                             | Clase 2                                   | CC1                                  | AG2                                |
| ACE4      | Javier | -                  | 1 (con 1 ayuda)               | Clase 3                                   | CC2                                  | AG3                                |
|           | Stefan | -                  | 3                             | Clase 3                                   | CC3                                  | AG3                                |
|           | Blas   | 2                  | -                             | Clase 2                                   | CC2                                  | AG2                                |
| ACE5      | Javier | 1                  | 2                             | Clase 3                                   | CC3                                  | AG3                                |
|           | Stefan | -                  | 2 (con 1 ayuda)               | Clase 3                                   | CC3                                  | AG3                                |
|           | Blas   | -                  | 3                             | Clase 3                                   | CC2                                  | AG3                                |
| ACE6      | Javier | 1                  | 1                             | Clase 3                                   | CC3                                  | AG3                                |
|           | Stefan | 2                  | 1                             | Clase 2                                   | CC3                                  | AG2                                |
|           | Blas   | 3                  | 1 (con 2 ayudas)              | Clase 2                                   | CC3                                  | AG2                                |



## Capítulo 6

# Implicaciones Didácticas

Consideramos que uno de los objetivos fundamentales de la Didáctica de la Matemática, consiste en mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje de la misma.

Por este motivo, en este apartado enunciaremos a modo de síntesis algunas implicaciones didácticas de esta investigación; es decir, nos permitiremos proponer algunas recomendaciones o sugerencias en lo que se refiere al Aprendizaje de la Geometría, la comunicación matemática y la implementación de entornos virtuales de aprendizaje de las Matemáticas.

Creemos que estas implicaciones didácticas, pueden constituir un aporte a tener en cuenta en la organización de las clases de Geometría, en el diseño de entornos interactivos de aprendizaje y en las orientaciones curriculares para el Aprendizaje de la Geometría en la ESO.

### 6.1. El Taller de Matemáticas en el Proyecto Clav o

Las aportaciones que se derivan del diseño, implementación y evaluación del “Taller de Matemáticas” son, a modo de síntesis, las siguientes:

1. *Las interacciones entre profesor y alumnos en el sentido del andamiaje*

Para el diseño e implementación del entorno virtual de aprendizaje, hemos planteado una metodología de trabajo en la que el alumno participa formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento

y en el desarrollo de competencias; planteando preguntas, extrayendo conclusiones, realizando críticas, llevando a cabo iniciativas personales, enunciando resultados en su propio vocabulario, formulando conjeturas, realizando y compartiendo descubrimientos que le provoquen una actividad interna, resultado de la interacción entre la reflexión, la actividad externa y la información recibida.

En este diseño, la función del profesor es la de intentar modular y guiar el proceso. Para describir esta función, emplearemos el concepto de “*andamiaje*”<sup>1</sup>; acuñado por Bruner y colaboradores ([56], 1975) y retomado por Vygostky (1978), que consideraba que “*las interacciones guiadas por adultos podían ayudar a los niños a desarrollar funcionamiento psicológico superior y que la asistencia de un adulto permitía al niño operar en la zona de “desarrollo próximo”, área situada entre el nivel de lo que un niño puede conseguir por sí solo y el nivel que el mismo niño puede alcanzar con asistencia*” ([193], p.54).

Así, el profesor es quien realiza “*parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece*” ([193], p. 55).

El entorno virtual de aprendizaje diseñado e implementado, ha contribuido a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

Así, a lo largo del Taller, los alumnos han ganado en autonomía para el aprendizaje, y aunque siempre han mantenido con el tutor interrelaciones en la resolución de cada actividad planteada; han ido desarrollando estrategias de validación propias e independizándose de la necesidad de validación permanente por parte del profesor (caracterizada por la típica pregunta “¿está bien?” que al principio formulaban ante cada nuevo paso). En la medida que han ido desarrollando estas estrategias de validación, de reflexión propia, de metacognición, han ganado autonomía y capacidad para la crítica.

---

<sup>1</sup>La definición original de andamiaje se desarrolló para analizar las situaciones en las que los padres ayudaban a sus hijos a expresarse por ellos mismos.

En este proceso, las posibilidades del entorno han sido fundamentales. Por un lado, las posibilidades de validación de Cabri, les han permitido verificar resultados y procedimientos midiendo, visualizando, produciendo variaciones en las construcciones, etc.

Pero además, las interacciones producidas a través del foro electrónico les han permitido asumir posiciones críticas, revisar las producciones propias y ajenas reflexionando sobre ellas, defender una opinión o una idea ante los demás debiendo justificarla para ello, etc.

Finalmente, los intercambios mantenidos con el tutor, han estado siempre orientados hacia la propia reflexión del alumno, a que el mismo pudiera revisar su propia producción encontrando fallos y aciertos y completar o corregir en caso de ser necesario; la tutorización se ha realizado en esa línea, tendiendo a que el alumno gane en autonomía y dependa cada vez menos del tutor.

Así, hemos obtenido, un entorno en el que las actividades desempeñadas por profesor y alumnos responden a las caracterizadas por Murillo ([193],[119]) teniendo en cuenta las respectivas interacciones; y que resumimos a continuación.

Como gestor del trabajo, el profesor lleva a cabo como mínimo las siguientes categorías de acciones:

- En relación al medio: el profesor organiza, pregunta, explica, valora y advierte
- En relación al alumno: el profesor explora significados (percepciones y concepciones de los alumnos), clarifica o solicita aclaraciones (para facilitar la comprensión), valora las ideas (toma decisiones respecto al interés de las propuestas), propone (sugerencias a los alumnos de nuevos problemas o ampliar a otras situaciones), anima (dando ánimos para continuar, reconociendo méritos y esfuerzos) y sistematiza conocimientos (institucionalización del saber)
- En relación al contenido: el profesor organiza, pregunta, concreta, valora e interviene

Respecto a los alumnos, se ha dicho ya que en el “Taller de Matemáticas”, asumen un papel activo y de progresiva responsabilidad respecto de su aprendizaje; incluyendo algunas funciones que en el modelo tradicional son exclusivas del profesor (proponer, clarificar, valorar,...) pero

que con el trabajo colaborativo también involucran a los alumnos. Como parte de este papel activo, los alumnos realizan como mínimo las siguientes categorías de acciones, tomadas de Murillo (murillo 2001):

- Categorías entre iguales: el alumno clarifica (aspectos a otro alumno o solicita aclaraciones), valora (los resultados obtenidos por otro compañero) y anima (a sus pares)
- Categorías en relación al medio: los alumnos sugieren (hacen indicaciones o propuestas), preguntan (sobre aspectos técnicos o funcionamiento del soporte), explican (informan sobre sus actuaciones o propuestas), valoran y reaccionan
- Categorías en relación al contenido: los alumnos responden (a los problemas propuestos), preguntan (para que se les facilite la comprensión de los enunciados), comprenden (y lo manifiestan a través de signos externos), valoran (enjuician los argumentos propuestos y toman posiciones al respecto), explican (establecen conclusiones, expresan sus ideas, hacen propuestas para avanzar en el contenido), conjeturan (establecen hipótesis, generalizaciones) y definen (dan enunciados e expresan en forma de teorema o proposición los resultados obtenidos como parte de la resolución de un problema o como respuesta a alguna cuestión)

2. *El modelo propuesto para el análisis de las resoluciones de los problemas geométricos*

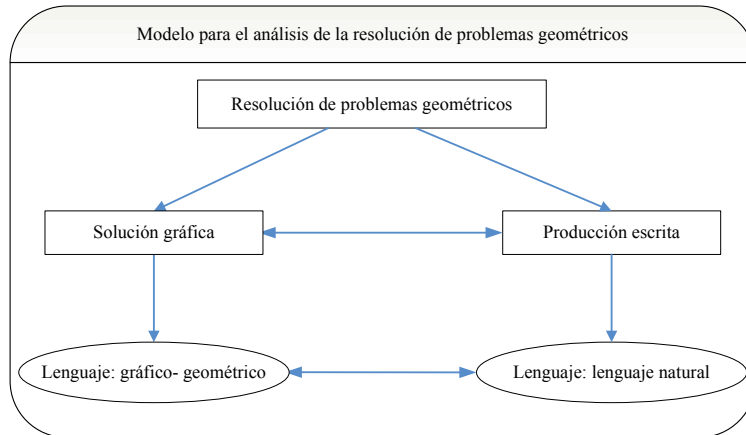
El modelo propuesto para el análisis de las resoluciones de los alumnos, que incluye como parte de las mismas, las producciones escritas, a través de las cuales los alumnos utilizan el lenguaje natural como metalenguaje para expresar ideas matemáticas discursos que suelen estar parcialmente expresados utilizando términos y notaciones geométricas ha resultado muy adecuado (Figura 6.1).

Destacamos que este modelo, que incluye como parte de la resolución de los problemas geométricos no sólo la solución gráfica sino también la producción escrita correspondiente, constituye una aportación importante en relación al aprendizaje de la Geometría, transferible también a otros campos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Dichas producciones escritas, que son parte del discurso académico (geométrico en este caso) deben ser tenidas en cuenta no sólo por el investigador, sino también por el docente de matemáticas, como han



Figura 6.1: El modelo propuesto para el análisis de las resoluciones



sido tenidas en el “*Taller de Matemáticas*”, lo que consideramos otra innovación importante.

El hecho de que el discurso académico geométrico sea diferente a los discursos académicos de otras disciplinas; su estrecha relación con el aprendizaje de la Geometría dada su función representativa (la escritura académica como construcción del conocimiento) y su función transaccional (la escritura académica como demostración del conocimiento), lo convierten en un elemento a tener en cuenta por los docentes en el proceso de enseñanza y aprendizaje: el discurso, además de dar cuenta de los conocimientos construidos, contribuye a la construcción de nuevos conocimientos geométricos.

3. *El modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones* El modelo con formato bimodal (presencial y virtual) para las interacciones según el cual hemos organizado el “*Taller de Matemáticas*” en etapas ( *etapa presencial*, “*etapa correo electrónico*” y “*etapa foro electrónico*”), que aparecen cronológicamente en ese orden; no obstante la aparición de una no supone la finalización de la anterior sino que en muchos casos coexisten.

En la primera fase, “*etapa presencial*”, se pretende que los alumnos aprendan a utilizar el programa y se familiaricen con el entorno, a través de la resolución de problemas geométricos de diversa índole (en cuanto a la complejidad y en cuanto a las temáticas geométricas abordadas). Las actividades, se proponen por escrito y las clases son

coordinadas por un “profesor presencial” que acompaña a los alumnos en el aula.

En una segunda fase, “*etapa correo electrónico*”, se incorpora a las clases, una nueva figura, la del “profesor virtual”, y con él una dinámica de trabajo diferente y la necesidad de manejar no sólo Cabri como parte del entorno de aprendizaje y la Geometría como tema, sino también una manera de comunicación e interacción diferente, mediada por las TIC.

En la tercera etapa, “*etapa foro electrónico*”, la dinámica vuelve a cambiar y las interacciones vuelven a incrementarse dado que las actividades se plantean a través de un foro en el que participan alumnos y profesor.

En estas dos últimas etapas los intercambios están mediados exclusivamente por las TIC; se producen a través del correo electrónico, del foro y de la página Web del Proyecto; lo que supone aprender a utilizar esta nueva herramienta para comunicarse

Esta modalidad comunicativa para la comunicación alumno- profesor y alumno alumno, que incluye tanto a las actividades como a sus resoluciones, las consultas de dudas o solicitudes de ayudas, las réplicas y contrarréplicas e incluso los comentarios personales, convierte el uso de las TIC, no sólo en un medio para la comunicación; sino también en un contenido a aprender; tanto en sus aspectos técnicos (¿cómo escribir un correo?, ¿cómo adjuntar un archivo?, ¿cómo participar en el foro?,...) como en los relativos a las normas comunicativas adecuadas (encontrar por ejemplo un registro apropiado para elaborar un mensaje dirigido a un profesor, explicitar por escrito las ideas, etc.).

Así, a lo largo del Taller de Matemáticas, los alumnos han aprendido a utilizar Cabri, un software que les ha facilitado en particular, el aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la competencia comunicativa matemática, incrementado a la vez las posibilidades de metacognición y reflexión, y mejorando la autonomía para el aprendizaje.

Pero además, han aprendido a utilizar el correo electrónico (sorprendentemente más del 80 % de los alumnos no sabía utilizarlo), los alumnos que lo desconocían han aprendido a utilizarlo correctamente y los que lo conocían, han profundizado en su utilización, adjuntando archivos (ninguno de los alumnos sabía hacerlo), usando opciones de corrección ortográfica, administración de carpetas, etc.

Asimismo, han participado por primera vez en un foro electrónico, aprendiendo cómo hacerlo tanto en sus aspectos técnicos como formales.

Tanto en relación al uso del correo electrónico, como en lo referido a la participación en el foro; para sostener una comunicación a través de estos medios, han debido desarrollar estrategias y aprender contenidos y procedimientos que les permitieran concretar esta comunicación; básicamente mejorando la expresión de las ideas propias por escrito de manera clara, completa y coherente, encontrando para ello un registro adecuado según el interlocutor. Interpretando los mensajes de los otros (profesores y compañeros), ya fueran opiniones, enunciados, sugerencias de resolución, etc. sobretodo, en el caso de mensajes provenientes de compañeros además de la interpretación de los mismos, ha sido necesario llevar a cabo un análisis crítico de los mismos antes de emitir una respuesta, ya que éstos podían ser acertados o equivocados, coincidentes o no con las propias ideas (trabajo colaborativo).

4. *El enfoque por competencias y el aprendizaje por resolución de problemas*

El enfoque por competencias, nos ha permitido orientar el proceso de Aprendizaje de la Geometría hacia el desarrollo por parte de los alumnos de capacidades complejas para analizar, razonar y comunicar ideas de manera efectiva mediante el planteamiento, la formulación y la resolución de problemas matemáticos; es decir, de hacer uso funcional de los conocimientos y las destrezas matemáticas.

Desde esta perspectiva, hemos entendido el “aprender Matemáticas” como “hacer Matemáticas”, con lo cual ha adquirido una gran importancia la resolución de problemas: problemas cuya resolución permite a los alumnos modelizar la situación; utilizar los recursos adecuados; organizar, planificar, utilizar la información convenientemente; arriesgar; probar procedimientos convenientes y no convenientes, útiles e inútiles, correctos e incorrectos y evaluar cada uno de ellos, tomar decisiones a lo largo de todo el proceso, formular, comunicar sus resultados y conclusiones; validar, probar, defender sus producciones.

Esta metodología, ha favorecido que los alumnos aprendan a combinar reglas, técnicas, destrezas, procedimientos y conceptos para dar solución a situaciones nuevas. A través de esta actividad creativa en la que consiste la resolución de problemas, cuya riqueza está más en el proceso que en el producto, hemos logrado que los alumnos aprendan

Geometría, entendido este aprendizaje como el desarrollo de la capacidad de hacer un uso funcional de los conocimientos y las destrezas geométricas, proceso vinculado estrechamente con la reflexión y toma de decisiones, más que a la acumulación de definiciones, terminología geométrica, aplicación mecánica de ciertos métodos y algoritmos, etc.

5. *El trabajo sobre contenidos geométricos con alumnos de ESO*

Más allá de los beneficios relativos al manejo del espacio, a los métodos de visualización, al lugar que brinda a la demostración y a los innumerables motivos que justifican la importancia de dotar a los alumnos de ESO de una cultura geométrica; el trabajo sobre Geometría desde una perspectiva de resolución de problemas, favorece la reflexión, la experimentación, la crítica, el intercambio, la creatividad y el complejo proceso de interrelaciones entre conceptos, símbolos y objetos reales; y más aún si dicho proceso se realiza en un entorno interactivo que incluye TIC.

6. *El trabajo colaborativo para favorecer el aprendizaje y la comunicación*

El trabajo colaborativo nos ha permitido fomentar el trabajo grupal, reforzar las relaciones humanas dentro del grupo participante y favorecer el desarrollo de competencias matemáticas.

Cuando los alumnos trabajan conjuntamente para alcanzar metas comunes, cuando se ayudan unos a otros para que “todos” puedan alcanzar en alguna medida el éxito, mientras el profesor participa como facilitador y guía del aprendizaje, se enriquece el proceso individual de aprendizaje a través de una construcción social del conocimiento.

La necesidad de articular y explicar al grupo las ideas propias lleva a que éstas sean más concretas y precisas y a organizar e integrar más el conocimiento y a la vez a comunicarlo mejor; los momentos de interacción permiten a los alumnos tomar conciencia del grado de dominio adquirido pero también reconocer lo que todavía no logran hacer solos y los medios de los que disponen para alcanzar ese objetivo.

Cuando el entorno de aprendizaje y la metodología de trabajo favorecen que el alumno participe formalmente y de manera activa en la adquisición del conocimiento y en el desarrollo de competencias; los alumnos asumen una progresiva responsabilidad sobre su aprendizaje, desarrollando incluso algunas funciones que en el modelo tradicional son exclusivas del profesor (proponer, ayudar, corregir, criticar, clarificar, animar, valorar, preguntar, explicar, etc.)

*7. Los alumnos como usuarios autónomos de las TIC*

El entorno virtual de aprendizaje utilizado, ha supuesto una metodología para el trabajo con los alumnos y un sistema de interacciones virtuales que han contribuido a mejorar el nivel de los alumnos en relación al uso de las TIC, favoreciendo no sólo la adquisición de conocimientos técnicos sino también de la capacidad de reflexión y crítica indispensable para formar usuarios autónomos.

Al participar en procesos comunicativos reales mediados por TIC, los alumnos han avanzado notablemente en el manejo técnico de las tecnologías involucradas en los procesos de aprendizaje y comunicación (Cabri, Internet, correo electrónico, foro electrónico, ordenadores, . . . ), mejorando sus conocimientos y habilidades específicos en relación a las TIC, pero también asumiendo actitudes críticas, tomando decisiones autónomas y reflexivas. Cuando las TIC aparecen plenamente integradas en la actividad, las mismas se comportan a la vez como un medio (para el aprendizaje y la comunicación) y como un contenido a aprender; favoreciéndose así la alfabetización tecnológica entendida como formación de alumnos competentes, de usuarios autónomos, reflexivos y críticos de dichas TIC.

En este sentido, resulta claro, que la incorporación de las TIC al diseño de entornos de aprendizaje no garantiza beneficios de por sí; sino que una vez más la clave estará en las decisiones de los profesionales (docentes, investigadores, etc.) que diseñen e implementen estos entornos.

Para la incorporación de las TIC a la clase de Matemáticas, para la implementación de innovaciones educativas que permitan su integración curricular, no alcanza con incluir los medios en sí; lo fundamental siguen siendo la reflexión constante sobre su uso (cuáles, cómo, cuándo, para qué, por qué utilizarlas) y el diseño, implementación y evaluación de estrategias convenientes y de actividades adecuadas y adaptadas; aspectos fundamentales para lograr los beneficios pretendidos.

Las TIC han sido un elemento muy importante en el diseño del entorno virtual de aprendizaje que hemos implementado y estudiado, pero ellas en sí mismas no garantizan su eficacia; que el entorno haya resultado adecuado para lograr los objetivos planteados, ha dependido en gran parte de las decisiones del equipo de investigación a la hora de diseñar, seleccionar y proponer actividades; plantear un sistema de interacciones, decidir cómo atender a la diversidad, establecer un

contrato didáctico con los alumnos, etc. Las TIC han contribuido a implementar dichas ideas y decisiones didácticas de manera interactiva, novedosa, ágil y motivadora; pero la clave ha estado en las ideas, el análisis, la discusión y la reflexión, basados en la acción y nutridos de los aportes de la Didáctica de la Matemática.

Así, hemos pretendido que la incorporación de las TIC, favoreciera la autonomía de funcionamiento, ofreciera posibilidades de experiencias concretas y descubrimientos personales, generara situaciones de aprendizaje adaptadas e interactivas y permitiera el proceso de diálogo interpersonal, incluyendo sus componentes comunicacionales, cognitivas e incluso afectivas.

Hemos aprovechado la incorporación de las TIC para fomentar la creatividad, la flexibilidad, y la descentralización de la gestión; y a la vez para redefinir un concepto de aprendizaje, más basado en la autonomía y la responsabilidad del alumno.

8. *Las TIC, desempeñando diferentes funciones: representación, comunicación y conocimiento*

Entre las diferentes clasificaciones existentes para las TIC; una de ellas las clasifica según las posibilidades que brindan o la función que desempeñan estos nuevos medios.

Así, Bettetini y Colombo (1995) proponen tres grandes categorías: la representación, la comunicación y el conocimiento. Por “*representación*” entienden la función de las intervenciones tendientes a reproducir de la mejor manera posible la realidad. La categoría “*comunicación*” incluye los medios cuya función principal, es favorecer la comunicación con el usuario o de los usuarios entre sí. La categoría “*conocimiento*” se refiere a los medios diseñados para comprender algo, para aprender, o para almacenar informaciones y conocimientos.

El diseño de un entorno interactivo de aprendizaje que incluya las TIC, debería optimizar estas posibilidades. En este caso, a través de Cabri y Cabri Java se ha favorecido la *representación*, en este caso geométrica, y se contribuido a los procesos de visualización necesarios para el Aprendizaje de la Geometría; la *comunicación* entre usuario y medio y de los usuarios entre sí (alumno profesor y alumno alumno) se ha visto enriquecida por las interacciones producidas a través del correo electrónico, de la página Web y del foro electrónico; y el “*conocimiento*” se ha potenciado a lo largo del proceso, generando nuevos y variados aprendizajes para los alumnos.

9. *El aprovechamiento de las ventajas que ofrece a alumnos y docentes el Software de Geometría Dinámica Cabri II*

Entre las numerosas ventajas que presenta el trabajo con el Software de Geometría Dinámica Cabri II, destacamos las posibilidades de:

- manipular de forma más directa los objetos matemáticos y sus relaciones, concretando así conceptos matemáticos abstractos y evidenciando propiedades (propiedades que en casos habrá que demostrar posteriormente) gracias a las posibilidades de visualización, medición y cálculo;
- construir y explorar objetos geométricos de forma interactiva;
- explorar y experimentar con objetos y relaciones geométricas a través de acciones sencillas, rápidas, reversibles e inmediatamente visibles de tal manera que el usuario tiene la sensación de estar en contacto directo con dichos objetos geométricos;
- trabajar en castellano;
- diferenciar lo particular de lo general y facilitar la formulación de conjeturas gracias a las posibilidades de exploración, observación, experimentación,...

Pero más allá de estas posibilidades concretas, destacamos su naturaleza intrínsecamente cognitiva, resultante del cruce entre las teorías constructivistas de aprendizaje y las concepciones de entorno informático derivadas de los trabajos de la escuela de Palo Alto, que favorece la puesta en funcionamiento de procesos analíticos, aspecto clave para el Aprendizaje de la Geometría. Así, las interacciones con el software, favorecen el proceso de construcción realizada por el sujeto que aprende.

Asimismo, destacamos también las posibilidades que ofrece Cabri al docente de realizar un seguimiento del quehacer geométrico de los alumnos a través de la opción “*Revisar construcción*”, que permite revisar paso a paso el recorrido seguido por cada alumno en la construcción propuesta.

10. *El uso de las TIC, el Aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la Competencia como tres dimensiones interrelacionadas*

En nuestro entorno virtual de aprendizaje, el uso de las TIC, el Aprendizaje de la Geometría y el desarrollo de la Competencia Comunicativa, no han aparecido aisladamente sino que han sido tenidos en cuenta

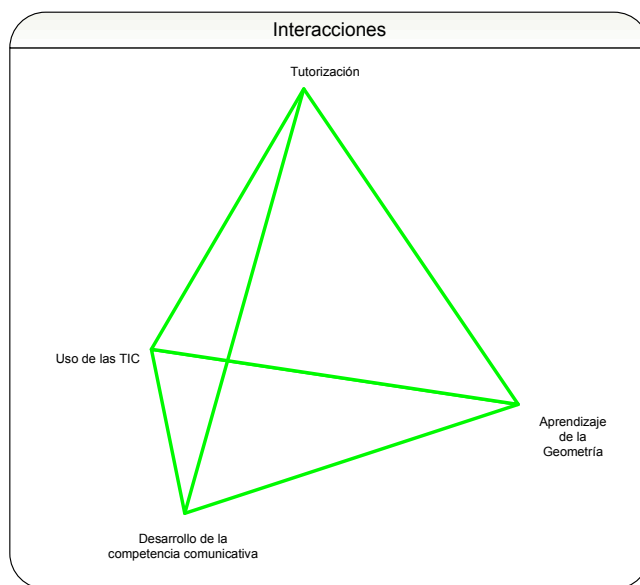


Figura 6.2: Interacciones entre los polos

de manera integrada e interrelacionada tanto para el diseño de dicho entorno como para el estudio del mismo (Figura 6.2)

A lo largo del proceso, los alumnos han asumido una posición activa y con autonomía creciente frente a sus aprendizajes: actuando como usuarios de las TIC, como usuarios de la comunicación y “*haciendo matemáticas*” que es la manera en que entendemos el aprender matemáticas.

Durante el proceso de aprendizaje, estas tres dimensiones han estado en permanente interacción; dando lugar a un progreso conjunto y contextualizado en el que las mejoras en cada dimensión han favorecido los progresos de las otras.

Así por ejemplo, los beneficios relativos al Aprendizaje de la Geometría se han debido en parte gracias al uso de las TIC; pero también este progreso en el Aprendizaje de la Geometría ha contribuido a mejorar el desempeño de los alumnos como usuarios de las TIC -por el hecho de que el proceso de aprendizaje de la Geometría los haya involucrado como usuarios reflexivos de las mismas.

Asimismo, el desarrollo de la Competencia Comunicativa, ha favorecido el mejor Aprendizaje de la Geometría porque saber comunicar



un saber añade valor a ese saber , pero este desarrollo también se ha debido a las mejoras en el Aprendizaje de la Geometría en general, porque la comunicación se aprende en un contexto específico y para comunicarse es necesario compartir unas temáticas, un registro, un lenguaje común como es en este caso el geométrico que no se aprende aisladamente sino en interacción con el resto de estrategias y conceptos geométricos: los progresos generales en el aprendizaje de la geometría dan fluidez y seguridad a los procesos de comunicación.

Con respecto a las interacciones entre el uso de las TIC y el desarrollo de la Competencia Comunicativa; el uso de las TIC ha contribuido a la mejora de la comunicación ser mejores usuarios de las TIC permite optimizar su uso comunicativo pero a la vez las mejoras en las estrategias de comunicación han optimizado el uso de las TIC , porque saber qué, a quién, cómo y porqué se quiere comunicar permite un mejor uso del medio.

11. *El sistema de “ayudas progresivas y diversificaciones” y la idea de “itinerario de resolución” para dar respuesta a la atención a la diversidad*

Con este sistema hemos conseguido un entorno que permite, estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, evolucionando a partir de su nivel inicial y optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno.

Las actividades así diseñadas posibilitan diferentes niveles de complejidad y profundidad, ya que especifican tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno permitiendo así a cada uno el máximo desarrollo de sus posibilidades; es decir que constituyen actividades adaptables a cada resolutor.

Con esta herramienta, una actividad con cierta complejidad inicial puede ir volviéndose menos compleja a través de las *ayudas* o más compleja a través de las *diversificaciones*.

12. *El criterio utilizado para la organización de las secuencias de actividades*

El criterio adoptado en relación al orden en que las actividades se presentan a los alumnos; es decir la manera en que se seleccionan y organizan a la hora de construir una secuencia didáctica de actividades ha resultado muy positivo.

Dado que los alumnos “aprenden” durante su escolaridad a tipificar las actividades, tendiendo a aplicar los conceptos y procedimientos recién aprendidos a la resolución de las actividades que se proponen a continuación; al organizar las secuencias de actividades hemos tomado la “decisión didáctica” de intercalar entre las actividades correspondientes a determinados contenidos, otras actividades que involucran otros conceptos y procedimientos geométricos.

Así, las actividades seleccionadas para el desarrollo y estudio de un núcleo temático no se presentan de manera consecutiva. Hemos evitado así, condicionar a los alumnos en relación a los conceptos y procedimientos involucrados en las resoluciones; aspecto que ha resultado fundamental si consideramos que parte de la competencia matemática se relaciona no sólo con disponer de los conceptos y procedimientos necesarios para resolver una situación, sino también, con la capacidad para seleccionar, adaptar y aplicar dichos conceptos y destrezas en contextos escolares y no escolares.

## **6.2. Análisis de la motivación producida por el entorno de aprendizaje y de las opiniones de los alumnos**

Entre los objetivos de esta investigación, proponíamos:

*Analizar la capacidad de motivación de los medios utilizados para potenciar el interés y la participación en el trabajo de los alumnos.*(objetivo 7, sección 1.2)

Si bien éste no ha sido uno de los aspectos centrales de esta investigación, hemos podido verificar a través de las observaciones de clase, que el cambio de actitud frente a la clase de Matemáticas manifestado por los alumnos fue notorio. El mismo se ha evidenciado a través de distintos indicadores: asistencia a clase, puntualidad, predisposición ante el trabajo propuesto, manifestaciones orales relativas al gusto y a la comodidad en la clase, actitud participativa, comparación con la actitud de los mismos alumnos en la clase tradicional, visión del profesorado manifestada en entrevistas informales, etc.

Hemos recurrido a la redacción de un “*diario del profesor investigador*” para registrar las observaciones y reflexiones críticas relativas a la observación de la práctica, todos los aspectos cotidianos considerados relevantes para la investigación, incluyendo las actitudes antes mencionadas<sup>2</sup>.

Asimismo, hemos propuesto a los alumnos una encuesta final, opcionalmente anónima, para que expresaran sus opiniones en relación al Taller, a la dinámica de trabajo propuesta, a la forma de aprender Matemáticas, etc.

Creemos que esta valoración personal también aporta datos relevantes, especialmente para analizar los posibles cambios de actitud respecto a las matemáticas, el interés y el gusto por la clase y la visión respecto a la materia.

El modelo de encuesta propuesto, las respuestas de los alumnos y el análisis correspondiente pueden verse en el Anexo VII.

---

<sup>2</sup>El “*diario del profesor*” es considerado por Porlán y Martín ([219]), un instrumento fundamental para la “*investigación en el aula*”, en tanto favorece la práctica reflexiva, y orienta el proceso de observación desde lo general hacia lo concreto, desde lo superficial y anecdótico a lo menos evidente pero importante, desde la descripción hacia el análisis



## Capítulo 7

# Problemas abiertos y líneas de futuro

Enunciamos finalmente, algunos problemas abiertos que han surgido a lo largo de esta investigación, y que aunque no han sido contemplados en ésta, pueden dar lugar a futuros trabajos de investigación.

*¿Es posible el desarrollo de todo el currículo de Geometría propuesto para la ESO, a través de actividades propuestas para su resolución con Cabri?*

A lo largo del Taller de Matemáticas, hemos propuesto a los alumnos más de cincuenta actividades, cuya resolución involucra conceptos y procedimientos incluidos en el currículo de la ESO.

Creemos que es posible desarrollar a través de este tipo de actividades, consistentes en problemas abiertos que apuntan al desarrollo de competencias por parte de los alumnos, y con este tipo de tecnologías dinámicas e interactivas, desarrollar gran parte de los temas de Geometría para la ESO.

Este constituiría un tema interesante para una futura investigación.

*¿Qué comparación puede establecerse entre el proceso de aprendizaje desarrollado en este tipo de entornos y los procesos tradicionales?*

Como parte de esta investigación, se han realizado observaciones de todas las clases del Taller de Matemáticas y de algunas del mismo grupo de alumnos

en la clase de Matemáticas tradicional, con el objeto de conocer la actitud de los alumnos frente al Aprendizaje de las Matemáticas, el funcionamiento de los grupos, etc. Comparar ambos contextos de aprendizaje, no ha estado entre nuestros objetivos. Pero dichas observaciones, parecen sugerir que la investigación al respecto podría resultar importante.

*¿Qué consecuencias tiene la capacidad de motivación de los medios utilizados para potenciar la participación y el interés de los alumnos sobre el aprendizaje?*

Como hemos dicho ya, el análisis de la capacidad de motivación del entorno de aprendizaje diseñado, no era uno de los objetivos centrales de nuestra investigación. Pero los resultados obtenidos en este sentido han sido tan evidentes, el cambio de actitud por parte de los alumnos tan notorio, que consideramos que sería interesante profundizar el estudio de la relación entre esta capacidad de motivación y los beneficios producidos en los alumnos.

*¿El trabajo en este entorno virtual de aprendizaje, favorece el proceso de formulación de conjeturas y la producción de demostraciones geométricas por parte de los alumnos?*

Cuando comenzamos el “*Taller de Matemáticas*”, la formulación de conjeturas y la idea de demostración matemática, era una tarea desconocida por los alumnos.

Como parte de las actividades propuestas, algunas de ellas incluían la formulación de conjeturas, y la realización de demostraciones geométricas sencillas. Aunque en esta investigación no nos hemos centrado en el análisis de los procesos de formulación de conjeturas y demostración llevados a cabo por los alumnos, destacamos que en tal sentido, y como avalan las numerosas investigaciones relacionadas con la demostración en alumnos de Educación Secundaria, en particular las dedicadas a la demostración en Geometría, han surgido las dificultades habituales.

Una de esas dificultades radica en que como la idea de demostración matemática es no sólo un concepto nuevo sino además complejo, los alumnos en principio consideran que el análisis de un caso particular, o el estudio de algunos ejemplos, la realización de mediciones y/o la visualización, son suficientes para demostrar; o bien proponen razonamientos circulares en los que utilizan la propiedad que quieren demostrar como parte de la argumentación.

Más allá de estas dificultades, esperables por cierto, los alumnos han podido resolver actividades en las cuales se les solicitaba como parte de la resolución la formulación de conjeturas y la demostración de propiedades geométricas sencillas.

En De la Torre (2003), se identifican las posibles líneas investigación en relación a la demostración en Geometría, y entre éstas se mencionan entre otras: “Buscar una percepción más clara del papel y la función de la prueba en matemáticas (análisis epistemológico). . . ; conseguir una comprensión más profunda del proceso y de las complejidades implicadas en aprender a probar (análisis empírico). . . ; desarrollar, implementar y evaluar estrategias de enseñanza efectiva, así como diseñar entornos de aprendizaje que puedan ayudar al desarrollo de la habilidad de probar en los diferentes niveles (análisis de diseño)” ([89], p. 4).

Consideramos que es viable profundizar el estudio del entorno virtual de aprendizaje diseñado, siguiendo una o varias de estas líneas de investigación relativas a la demostración en Geometría: creemos que puede resultar interesante analizar las relaciones entre estos procesos y el entorno virtual de aprendizaje, identificando diferencias y similitudes respecto al desarrollo de estas tareas en otros tipos de entornos y con medios diferentes; diseñar, implementar y evaluar actividades orientadas específicamente al desarrollo de esta habilidad, etc.





# Anexos y bibliografía

A partir de aquí se incluyen 8 anexos, un glosario y la bibliografía

- Objetivos y diversidad (Capítulo 8)
- Actividades planteadas (Capítulo 9)
- Aplicación instrumentos (Capítulo 10)
- Descripciones (Capítulo 11)
- Enunciados (Capítulo 12)
- Itinerarios (Capítulo 13)
- Modelo encuesta (Capítulo 14)
- Procesos de resolución completos (Capítulo 15)
- Glosario y esquemas (Capítulo 16)



## Capítulo 8

# Anexo I: Objetivos para los alumnos y atención a la diversidad

En este Anexo, se presentan los objetivos planteados en el Taller de matemáticas, en relación a los alumnos y algunas ideas generales sobre la atención a la diversidad en el aula.

### 8.1. Objetivos para los alumnos

En relación con los estudiantes, pretendemos que, en el marco del *“Taller de Matemáticas”* :

- Desarrollen el interés y el gusto por el aprendizaje de las matemáticas
- Adquieran técnicas de autoaprendizaje.
- Utilicen herramientas informáticas para el aprendizaje de la Geometría.
- Desarrollen habilidades de comunicación e interacción, utilizando las TIC.
- Evolucionen en el uso de estrategias de trabajo colaborativo.
- Resuelvan problemas geométricos estratégicamente.

- Formulen conjeturas y realicen demostraciones geométricas sencillas.
- Desarrollen procesos metacognitivos que permitan reflexionar sobre el propio aprendizaje y adquieran mayor autonomía.
- Desarrollen al máximo sus propias potencialidades a través de actividades adaptables a cada interlocutor, que especifiquen tanto como sea necesario (y suficiente) para cada alumno y que permitan a cada uno el máximo desarrollo de sus capacidades. Sin embargo, todos los alumnos parten de una misma actividad, planteada para poner en juego ciertos conceptos y destrezas y que tiende a desarrollar ciertas competencias; actividad que permitirá diferentes posibilidades de profundización y formalización dependiendo de cada destinatario.

## 8.2. La atención a la diversidad en el aula como objetivo

Los modelos educativos de los últimos años, suponen dos principios básicos que la educación debería garantizar: la igualdad de oportunidades y la atención a la diversidad. Así, se plantea no sólo la inserción en la escuela del total de los ciudadanos (incluidos los que el sistema escolar anterior iba cribando) sino también el respeto por las diferencias y características particulares (sociales, personales y culturales) de los alumnos. Se piensa así en una escuela que tiende a compensar desigualdades, pero respetando diferencias de toda índole.

A partir de estos principios se redefinen necesidades, metodologías, fines y objetivos; se replantean contenidos, horarios, interacciones, organización, evaluación y optatividades; se planifican e implementan estrategias (a nivel sistema educativo, a nivel centro escolar y a nivel de aula).

Siguiendo a Iguaz de Miguel ([146]), se plantean nuevos requerimientos en cuanto al perfil docente y en cuanto al currículo. Respecto a los docentes, además del conocimiento específico, es necesario un rol más amplio que incluye su papel como tutor e incluso como miembro activo de una organización. Respecto al currículo, de éste se requiere una mayor flexibilidad y adaptabilidad, que permita una programación dinámica en la cual el docente vuelve a jugar un rol determinante dado que de su evaluación y toma de decisiones permanentes dependerán las adaptaciones curriculares que hagan posible la atención a la diversidad.

Creemos que atender a la diversidad no consiste en fijar un nivel medio para desarrollar en el curso sino en plantear un entorno que permita, estratégicamente, que cada alumno desarrolle al máximo sus potencialidades, que cada uno evolucione a partir de su nivel inicial optimizando su aprendizaje; pero todo esto sin perder cierta uniformidad en las temáticas desarrolladas por cada alumno.

*“Todos los alumnos, independientemente de sus características y circunstancias personales, deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas. La igualdad no significa que todos deban recibir idéntica instrucción; por el contrario, exige que se hagan adaptaciones razonables y apropiadas para proporcionar la posibilidad a todos los estudiantes de obtener logros”. ([197], p. 11)*

Asumimos que: *“Los centros y los sistemas educativos deben tener cuidado en acomodar las necesidades especiales de algunos alumnos sin entorpecer el aprendizaje de otros.” ([197], p. 15);* y consideramos que la manera más adecuada para llevarlo a la práctica es a través de un currículo que permita diferentes niveles de complejidad y profundidad, posibilitando así a cada uno de los alumnos desarrollar al máximo sus potencialidades.

Creemos que en esto consiste el desafío de la atención a la diversidad y esta investigación lo ha tenido en cuenta a la hora de definir tanto los objetivos de investigación como los objetivos para los alumnos; así como también la metodología de trabajo



## Capítulo 9

# Anexo II: Actividades planteadas

Secuencia de actividades completa en la que se intercalan las actividades correspondientes a la Primera Secuencia de Actividades (SA1) y a la Segunda Secuencia de Actividades (SA2), sin ninguna identificación especial que permita a los alumnos distinguirlas de las restantes<sup>1</sup>

Los enunciados que se presentan son los propuestos inicialmente para cada actividad; pero, tanto para las actividades correspondientes a la SA1 y a la SA2 como para las restantes, existen diferentes “ayudas y diversificaciones” que se van aportando según el “itinerario de resolución” que recorra cada alumno. Así, para la Actividad 1 por ejemplo, las diversificaciones complejizan y profundizan el nivel inicial propuesto por la Actividad inicial llegando hasta la demostración de la propiedad involucrada (en el caso de los alumnos que así lo posibiliten) y las ayudas aportan orientaciones más precisas, comentarios, nuevas cuestiones, etc. para los alumnos que así lo necesitaran.

### 9.1. Secuencia completa de actividades.

#### *ACTIVIDAD A1: Triángulos*

---

<sup>1</sup>En este caso se han señalado las actividades de las secuencias de actividades 1 y 2 agregando en cada el comentario (SA1) o (SA2) respectivamente sólo para su mejor identificación entre las restantes; pero dicha marca no aparece en las actividades presentadas a los alumnos.

1. Construye un triángulo **ABC**. Mide los lados y los ángulos.
  2. Anota las medidas de los ángulos y súmalas.
  3. Mueve los vértices y escribe lo que observas en un Comentario.
- 

***ACTIVIDAD A2: Construcción de un cuadrado a partir de un lado***

1. Construye un cuadrado a partir de un lado AB.
  2. Mide sus lados y ángulos. Utiliza la opción *Mostrar/Ocultar* para conseguir que en el dibujo sólo se vea el cuadrado.
  3. Explica detalladamente cómo lo has conseguido. (Ya sabes que debe mantenerse cuadrado cuando muevas cualquiera de sus vértices)
  4. Dibuja sus diagonales. Mide su longitud y el ángulo que forman.
  5. Realiza las mediciones y cálculos que consideres oportunos antes de contestar en un comentario a las siguientes cuestiones:
    - a). Las dos diagonales de un cuadrado son..... entre sí.
    - b). Las dos diagonales de un cuadrado se cortan en su punto.....
    - c). Las dos diagonales de un cuadrado forman un ángulo de ..... grados.
- 

***ACTIVIDAD A3: Distancia entre un punto y una recta***

1. Dibuja una recta y llámala *r*. Dibuja un punto A exterior a ella. Traza por A la perpendicular a la recta. Marca el punto P de intersección entre ambas rectas.
  2. Oculta la recta perpendicular con la opción *Ocultar/Mostrar*. Dibuja el segmento AP y mídelo.
  3. Mueve el punto A y observa lo que ocurre. Escribe tus conclusiones en un comentario. Esa medida es lo que llamamos distancia de un punto a una recta. Intenta explicar por escrito cómo se mide esta distancia.
-



***ACTIVIDAD A4: Bisectriz de un ángulo***

1. Construye tres puntos A, B y C. Con la opción Recta por dos puntos construye dos rectas; una, que pase por A y B y otra, que pase por A y por C.
  2. Determina el ángulo BAC y mídelo.
  3. Dibuja la bisectriz de este ángulo sin utilizar la opción *Bisectriz*
  4. En el comentario explica claramente cómo lo has conseguido
  5. Mide los ángulos que determina la bisectriz en el ángulo BAC y comprueba que efectivamente lo divide en dos ángulos iguales.
  6. Escribe correctamente la definición de bisectriz de un ángulo.
- 

***ACTIVIDAD A5: Mediatriz de un segmento (SA1)***

1. Traza un segmento AB; luego traza la mediatriz de este segmento con la opción Mediatriz y llámala r.
2. Marca un punto sobre la mediatriz y llámalo P. Mide las distancias de P a cada uno de los extremos A y B del segmento. Mueve el punto P sobre r y en un comentario, escribe la propiedad que se cumple.

Si construimos un triángulo ABP; ¿qué tipo de triángulo será? Escríbelo en la pantalla y explica justificadamente porqué.

---

***ACTIVIDAD A6: Construcción de un triángulo equilátero a partir de un lado***

Con lo que ya sabes sobre este programa de Geometría, intenta idear un procedimiento para dibujar un triángulo equilátero. Ya sabes, debe serlo aún cuando movamos cualquiera de sus vértices. Escribe el procedimiento.

---

***ACTIVIDAD A7: Construcción de un paralelogramo a partir de tres vértices***

1. Construye en la pantalla tres puntos A, B y C y busca un punto D, de forma que al polígono ABCD sea un paralelogramo. En un comentario escribe el procedimiento que has utilizado para encontrar el punto D.

2. Con la opción Polígono, construye sobre los puntos ABCD un paralelogramo. Oculta las líneas que te estorben. Comprueba que sigue siendo paralelogramo, al mover los puntos A, B y C.

3. Mide los lados y los ángulos.

Comienza un nuevo comentario y analiza estas cuestiones:

- ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos?
- ¿Cuántos suman los cuatro ángulos de cualquier paralelogramo? Encuentra una demostración de lo que dices.
- ¿Qué ocurre con la medida de los ángulos?
- ¿Sabrías dibujar la altura del paralelogramo? ¿Cuánto mide?
- Calcula el área del paralelogramo. Comprueba que tus cálculos están bien hechos, midiendo el área con la opción Área.

---

***ACTIVIDAD A8: Trazado de mediatriz sin opción mediatriz (SA1)***

1. Construye un segmento de extremos A y B.
  2. Te proponemos el siguiente desafío: trazar la mediatriz del segmento sin utilizar las opciones Mediatriz ni punto medio. Una vez que hayas conseguido trazarla, llama r a dicha recta.
  3. Explica mediante un comentario el procedimiento empleado.
  4. Oculta todos los trazos auxiliares de forma que en la pantalla sólo se vean el segmento y su mediatriz.
-

***ACTIVIDAD A9: Mediatrices de un triángulo (SA2)***

1. Dibuja un triángulo ABC y traza las mediatrices correspondientes a los tres lados, ¿en cuántos puntos se cortan? (puedes realizar variaciones sobre el triángulo para ver qué ocurre).
  2. Enuncia la propiedad correspondiente.
- 

***ACTIVIDAD A10: El circuncentro (SA2)***

Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llamaremos circuncentro O al punto de intersección entre ellas. ¿El punto de intersección de las mediatrices pertenece siempre al interior del triángulo? ¿Puede estar fuera del triángulo? ¿Puede pertenecer a un lado?

---

***ACTIVIDAD A11: Recta tangente a una circunferencia***

1. Dibuja una circunferencia y marca un punto P sobre ella.
  2. Dibuja una recta que sea tangente a la circunferencia por el punto P (ya sabes que una recta es tangente a una circunferencia cuando sólo tienen un punto en común).
  3. Explica el procedimiento que has utilizado para construirla.
- 

***ACTIVIDAD A12: Alturas de un triángulo***

1. Dibuja un triángulo ABC y traza las alturas de ese triángulo desde cada uno de los vértices. Observa lo que ocurre con estas tres rectas y escríbelo en un comentario.
  2. Etiqueta con O al punto de corte de las alturas. Recuerda que se llama ortocentro. 3. Mueve los vértices y observa lo que ocurre.
  4. Anota en un comentario lo que observas cuando mueves los vértices del triángulo. ¿Qué clases de triángulos tienen el ortocentro fuera? ¿Y dentro? ¿Y en el triángulo?
-

---

**ACTIVIDAD A13: Construcción de un rectángulo a partir de un lado**

1. Construye un rectángulo a partir de un segmento de extremos A y B, nombra los otros dos vértices con las letras C y D (recuerda que no tendrás definido el rectángulo hasta que no dibujes un polígono cuyos vértices sean A, B, C, y D).

2. Oculta todos los elementos auxiliares de forma que en la pantalla sólo quede visible el rectángulo. 3. Mueve los vértices. ¿Sigue siendo un rectángulo?

4. ¿Se pueden mover todos los vértices?. Intenta mover los lados también. ¿Cómo puede moverse el rectángulo entero?

5. Con la opción *Comentario* explica el procedimiento seguido para la construcción.

6. Observa y explica la diferencia en cuanto a posibilidades de movimiento del rectángulo si ocultas el segmento AB.

7. Mide los lados del rectángulo y calcula su área y perímetro. Compara los resultados calculados para el área y el perímetro con los valores que se obtienen al medirlos.

8. ¿Qué diferencia hay entre ocultar el segmento AB y suprimirlo?

---

**ACTIVIDAD A14: Construcción de un rombo a partir de un lado**

1. Construye un rombo a partir de un lado AB.

2. Mide sus lados y ángulos. Utiliza la opción *Mostrar/Ocultar* para conseguir que en el dibujo sólo se vea el rombo.

3. Explica detalladamente cómo lo has conseguido. (Ya sabes que debe seguir siendo un rombo cuando muevas cualquiera de sus vértices)

4. Dibuja sus diagonales. Mide su longitud y el ángulo que forman.

5. Realiza las mediciones y cálculos que consideres oportunos antes de contestar en tu comentario a las siguientes cuestiones:

- Las dos diagonales de un rombo son ..... entre sí

- Las dos diagonales de un rombo se cortan en su punto .....
- 

***ACTIVIDAD A15: Circunferencia circunscrita (SA2)***

1. Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llama O al circuncentro.
2. Traza la circunferencia de centro O y que pase por un vértice del triángulo. ¿Qué ocurre? Explica porqué. La circunferencia que has trazado es la circunferencia circunscrita al triángulo.
3. ¿Dónde se encuentra el circuncentro de un triángulo rectángulo?

Justifica la siguiente afirmación: *Dado un triángulo cualquiera, siempre es posible trazar una circunferencia que pase por sus tres vértices*”

---

***ACTIVIDAD A16: Propiedad de la bisectriz***

1. Traza dos rectas r y s que se corten en un punto A y construye la bisectriz del ángulo formado por las dos rectas.
  2. Marca un punto M sobre la bisectriz y mide la distancia de M a cada una de las rectas r y s.
  3. Mueve el punto M y anota lo que sucede.
  4. Escribe ahora otra definición de bisectriz distinta a la que escribiste en la actividad A10. Podría empezar así: La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos del plano .....
- 

***ACTIVIDAD A17: Bisectrices de un triángulo***

1. Construye un triángulo ABC y traza las bisectrices de sus tres ángulos. ¿En cuántos puntos se cortan? Anota en un comentario lo que ocurre.
2. Recuerda que llamamos incentro al punto de intersección entre las bisectrices de un triángulo (lo denotaremos con la letra I). ¿Puede ocurrir que I sea un punto exterior al triángulo o que pertenezca a alguno de los lados?

3. Mide la distancia entre  $I$  y cada uno de los lados del triángulo y anota lo que ocurre
  4. Construye la circunferencia inscrita en el triángulo y escribe tus conclusiones en un comentario
- 

***ACTIVIDAD A18: Encuentra la circunferencia (SA2)***

Dibuja una recta  $r$  y sobre ella marca un punto  $P$ . Marca otro punto  $A$  fuera de la recta. Encuentra una circunferencia que pase por  $A$  y sea tangente a la recta  $r$  por el punto  $P$ . Explica justificadamente en tu comentario el procedimiento que has utilizado para encontrar la circunferencia.

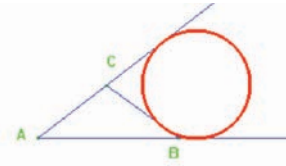
---

***ACTIVIDAD A19: Medianas de un triángulo***

1. Construye un triángulo  $ABC$  y dibuja sus medianas. ¿En cuántos puntos se cortan?
  2. Llama  $G$  al punto de intersección. Recuerda que se llama Baricentro porque es el centro de gravedad del triángulo. Explica, qué significa esto.
  3. Analiza si es posible que  $G$  sea un punto exterior al triángulo o si podría pertenecer a uno de los lados de  $ABC$ .
  4. Mide la distancia del baricentro  $G$  al vértice  $A$  y de  $G$  al punto medio del lado opuesto al vértice  $A$ . Observa lo que ocurre y anótalo en forma de conjetura. ¿Sucede lo mismo con las otras dos medianas?
-

**ACTIVIDAD A20: Circunferencia tangente**

Dadas las semirrectas **AB** y **AC** y el segmento **BC**, construye una circunferencia que sea a la vez tangente al segmento **CB** y a las semirrectas **AC** y **AB**. Estará bien construida cuando al mover los puntos A, B y C la circunferencia siga siendo tangente.

**ACTIVIDAD A21: Gatos y ratones (SA2)**

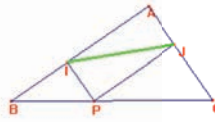
El gato Tom, espera que el ratón Jerry salga por alguna de los tres puertas de su ratonera (puertas **A**, **B** o **C**), cercanas al final de un pasillo. Una de las puertas está en una de las paredes del pasillo y la otras dos en la otra, como indica la figura. Sabiendo que Jerry puede salir con igual probabilidad de cada una de las puertas, Tom decide ubicarse en un punto que esté a igual distancia de las tres ¿existe tal punto? ¿hay varios puntos que cumplen esa condición, hay uno solo o no existe ninguno? Si existe tal punto, ¿cómo ayudarías a Tom a encontrarlo? Justifica tus respuestas.

**ACTIVIDAD A22: El Teorema de Pitágoras**

1. Construye un triángulo rectángulo ABC y mide sus ángulos.
2. Explica cómo lo has construido.
3. Mide ahora la longitud de los tres lados y escríbela sobre cada uno de ellos.
4. Comprueba con la opción calcular que se cumple el teorema de Pitágoras. Prueba a tabular las longitudes de los lados y a calcular el valor de la hipotenusa en función de los otros lados. Mueve los vértices y anota cuatro

**ACTIVIDAD A23: Segmento de longitud mínima**

Sean  $ABC$  un triángulo rectángulo en  $A$  y  $P$  un punto móvil en la hipotenusa  $BC$ . Si  $I$  es un punto que está en  $AB$  y  $J$  es otro punto que está en  $AC$ , de tal manera que  $PI$  es perpendicular a  $AB$  y  $PJ$  es perpendicular a  $AC$ , ¿existe una posición del punto  $P$  en la que la longitud del segmento  $IJ$  tenga un valor mínimo?



veces más los valores en la tabla.

**ACTIVIDAD A24: Construcción de un hexágono regular**

1. Construye un hexágono regular sin usar la opción polígono regular. Dibuja la circunferencia circunscrita e inscrita a dicho hexágono.

2. Dibuja en el hexágono un ángulo central y mídelo. Mide también un ángulo interior cualquiera.

3. Mueve el dibujo y contesta: a). El ángulo central de un hexágono regular siempre mide..... grados. b). El ángulo interior de un hexágono regular siempre mide .....grados.

4. ¿Qué tipo de triángulo es el que forman dos radios consecutivos con el lado correspondiente del hexágono? 5. Explica en un comentario como obtendrías las medidas de los ángulos interior y central, si no los hubieras podido medir.

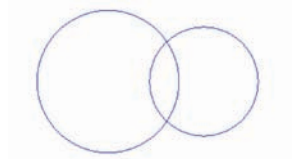
**ACTIVIDAD A26: Circunferencia inscrita**

1. Dibuja un triángulo  $ABC$  y busca un punto dentro del triángulo que sirva de centro a la circunferencia inscrita en el triángulo. ¿Cómo se llama ese punto?

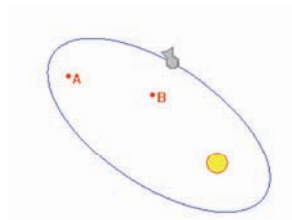


**ACTIVIDAD A25: En busca de los centros perdidos**

En la figura se muestran 2 circunferencias secantes. Los centros de ambas han desaparecido. Investiga un procedimiento para hallarlos y descríbelo. Razona el porqué de este procedimiento.

**ACTIVIDAD A27: Estudiando un cometa (SA1)**

Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura. En el mismo plano de la órbita, hay *dos satélites artificiales fijos A y B* encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es *estudiado por el satélite que está más próximo a él*. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite **A** estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite **B**? Razona tus respuestas.



2. Completa: El ..... es el punto donde se cortan las tres .....del triángulo. Es además el .....de la circunferencia inscrita al triángulo **ABC**.

3. Traza la circunferencia inscrita en el triángulo.
4. Explica el procedimiento en un comentario.

**ACTIVIDAD A29: Construcción de un octógono regular**

1. Construye un octógono regular sin usar la opción polígono regular y dibuja las circunferencias circunscrita e inscrita a dicho polígono.

2. Dibuja en el octógono un ángulo central y mídelo. Mide también un ángulo interior cualquiera. Completa: a). El ángulo central de un octógono regular siempre mide .....grados. b). El ángulo interior de un octógono regular siempre mide .....grados. c). El triángulo que forman dos radios consecutivos con el lado correspondiente del octógono es siempre .....

3. Explica en el comentario como obtendrías las medidas de los ángulos interior y central, si no los hubieras podido medir.

---

***ACTIVIDAD A30: Encuentra el triángulo***

1. Dibuja un segmento AB y un punto exterior H. Analiza las posibles ubicaciones del circuncentro O de cualquier triángulo ABC.

2. Construye un triángulo ABC tal que O sea su circuncentro y H sea su ortocentro. Justifica tu construcción.

---

***ACTIVIDAD A32: El tesoro escondido 2 (SA1)***

Teniendo todas las instrucciones y encontrando el sitio en el que se encuentran los tres árboles resulta bastante sencillo encontrar la posición del tesoro.

Sin embargo, cuenta la historia que un experto buscador de tesoros llegó al sitio indicado y sólo encontró el roble y el pino (el abedul debería haberse secado hace tiempo y no quedaba ningún rastro respecto a cuál había sido su posición).

Dicen que aunque al principio el buscador se desanimó un poco, finalmente logró encontrar exactamente la posición del tesoro.

Surge la pregunta, ¿Cómo habrá logrado hacerlo? Explica y razona cómo crees que lo consiguió.

---

**ACTIVIDAD A31: El tesoro escondido 1 (SA1)**

Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro hay solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Se sabe que al situarse junto al abedul (A), y mirar hacia la línea recta que une el roble y el pino (R y P), el roble queda a la derecha y el pino a la izquierda, como muestra la figura.



Para encontrar el tesoro es necesario caminar desde el abedul hacia el roble contando los pasos y al llegar al roble girar en ángulo recto hacia la derecha y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar una estaca (E1).

Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde éste hacia el pino, contando los pasos; al llegar al pino hay que girar en ángulo recto hacia la izquierda y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto es preciso detenerse y clavar otra estaca (E2).

El tesoro T está enterrado precisamente en el punto medio del segmento que une las dos estacas.

Con estas instrucciones tan detalladas, encuentra a partir de las posiciones de los tres árboles, la ubicación del tesoro. Describe el procedimiento que has desarrollado para encontrar la posición de T.

**ACTIVIDAD A33: El tesoro escondido 3 (SA1)**

Cuentan también por ahí que el buscador decidió dejar el tesoro escondido en el mismo punto para volver a buscarlo con ayuda de otras personas debido a que la cantidad y el peso del mismo le hacían imposible manipularlo solo.

Decidió entonces confeccionar un nuevo mapa de referencias para orientarse la siguiente vez de una forma más simple, contando con que el abedul ya no existía.

¿Podrías escribir las indicaciones que habrá dado en esta nueva referencia para encontrar el tesoro conociendo solamente las posiciones del roble y del pino?

***ACTIVIDAD A34: Circunferencia por dos puntos***

1. Señala en la pantalla dos puntos A y B y busca una circunferencia que pase por los dos puntos. Explica el procedimiento que has utilizado.
  2. ¿Puedes encontrar más de una circunferencia que pase por A y B? Explica tus conclusiones.
- 

***ACTIVIDAD A35: Alturas de un triángulo***

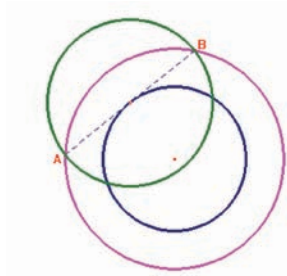
1. Dibuja un triángulo de vértices A, B y C y traza sus tres alturas. Marca, usando la opción Punto de intersección y nombra su punto de corte, el ortocentro O. Colorea las alturas con algún color que elijas.
  2. Traza las tres medianas del triángulo, utilizando un color diferente y nombra su punto de corte, el baricentro G.
  3. Traza las mediatrices de los lados del triángulo con un nuevo color y marca su punto de intersección, el circuncentro C.
  4. Traza sus tres bisectrices con otro color, y marca su punto de corte, el incentro I.
  5. Comprueba que tres de los puntos que has marcado están alineados utilizando la opción de Alineado en el icono de comprobar propiedades. Traza la recta que determinan: se llama recta de Euler. Define entonces la recta de Euler para un triángulo cualquiera.
- 

***ACTIVIDAD A37: Circunferencia inscrita y circunscrita respecto a un cuadrado***

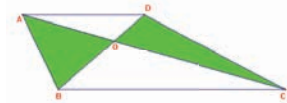
1. Dibuja una circunferencia y coloca un punto P sobre ella.
2. Construye un cuadrado inscrito en la circunferencia, tal que uno de sus vértices sea P.
3. Construye un cuadrado circunscrito a la circunferencia, tal que P pertenezca a uno de los lados.
4. ¿Cuál es la razón entre las áreas de los dos cuadrados? ¿Podrías demostrar por qué?

**ACTIVIDAD A36: De tres círculos**

Supongamos dos círculos concéntricos. Trazamos una tangente al círculo interior, que naturalmente cortará al exterior en dos puntos A y B. Construimos el círculo que tiene como diámetro AB. ¿Puedes encontrar alguna relación entre los tres círculos de la figura? Expresa el resultado correctamente

**ACTIVIDAD A39: Investigando sobre trapecios**

En un trapecio cualquiera ABCD, de bases AD y BC, donde E es la intersección de la diagonales (ver figura) ¿Existe alguna relación los triángulos AEB y DEC? Razona y justifica tu respuesta

**ACTIVIDAD A38: Investigando sobre un triángulo**

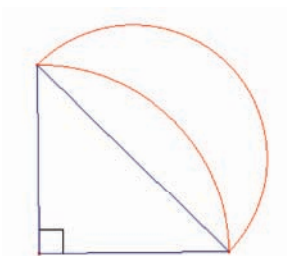
En un triángulo isósceles ( $AB = AC$ ), se traza la mediatriz  $m$  del lado  $AC$  y la bisectriz  $b$  del ángulo  $C$  y ocurre que  $m$ ,  $b$  y  $AB$  se cortan en un sólo punto, ¿cuánto mide el ángulo  $A$ ?

**ACTIVIDAD A42: En busca del vértice perdido (SA2)**

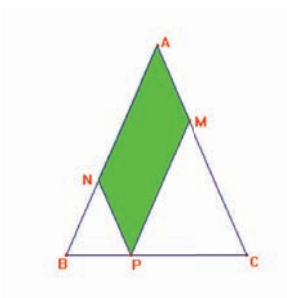
**ACTIVIDAD A40: Las lunas de Hipócrates**

En la siguiente figura se representan las denominadas lunas de Hipócrates. Dichas lunas se construyen a partir de un triángulo isósceles y rectángulo: una de ellas generando el medio círculo cuyo diámetro es la hipotenusa del triángulo y la otra generando un cuarto de círculo cuyo radio se corresponde con cada uno de los catetos.

Construye la figura y analiza qué relación existe entre las áreas de las lunas de Hipócrates y la del triángulo a partir del cual se generan. Enuncia dicha relación en forma de teorema y demuéstrala

**ACTIVIDAD A41: Un cuadrilátero muy particular**

Por un punto del lado desigual BC de un triángulo isósceles ABC traza paralelas a los lados iguales. Se forma así un cuadrilátero PMAN. Toma medidas en el cuadrilátero formado y mueve el punto P. ¿Qué puedes decir del perímetro de PMAN cuando se mueve el punto P? Expresa en forma de teorema lo que observes sobre el perímetro y muestra un razonamiento que lo demuestre. ¿En qué posición del punto P es máxima el área del cuadrilátero? ¿Cuánto vale esa área máxima? Muestra tu razonamiento.



Dados dos vértices de un triángulo (A y B), ¿Dónde podrá ubicarse el circuncentro O de dicho triángulo? Analiza cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

a). Existe una única ubicación posible para O. b). Existen infinitas ubicaciones posibles para el punto O, pero no es válida cualquier posición. c). O puede ser cualquier punto del plano

Piensa ahora, ¿en qué lugar podrá estar ubicado el vértice C del triángulo? ¿Dónde ubicarías C para que el área del triángulo ABC sea lo mayor posible?

---

**ACTIVIDAD A43: Cuánto miden los ángulos?**

En el interior de un cuadrado ABCD hay un punto E que es un vértice del triángulo equilátero ABE.

a) Demostrar que el triángulo DEC es isósceles. b) Determinar la medida de los ángulos ADE y CDE, razonando la solución.

---

**Nota 1:** Si bien las actividades propuestas a los alumnos a lo largo del curso continúan; presentamos sólo las anteriores para mostrar la manera en la que se intercalan las actividades correspondientes a una misma temática.

**Nota 2:** De la misma manera que en esta secuencia larga de actividades se intercalan las actividades correspondientes a las secuencias SA1 y SA2; también aparecen intercaladas otras actividades correspondientes a otros contenidos.

**Nota 3:** Aunque en esta presentación no aparecen clasificadas, las actividades anteriores corresponden a distintas etapas (etapa presencial, etapa correo electrónico, etapa foro electrónico) y presentan distintos grados de complejidad (desde algunas que consisten en simples ejercicios algorítmicos hasta problemas abiertos).





## Capítulo 10

# Anexo III: Aplicación de los instrumentos de análisis a las actividades.

En este anexo III, se presenta la aplicación de los instrumentos de análisis a las actividades de la Primera Secuencia de Actividades (SA1), de la Segunda Secuencia de Actividades (SA2) y a una de las actividades propuestas en el foro electrónico (AFE).

### 10.1. Análisis de la Primera Secuencia de Actividades (SA1) mediante el Primer instrumento de análisis de actividades

*ACTIVIDAD 1: Mediatriz de un segmento.*

Problema N° 1

▪ *Enunciado:*

1. Traza un segmento AB; luego traza la mediatriz de este segmento con la opción Mediatriz y llámala  $r$ .
2. Marca un punto sobre la mediatriz y llámalo P. Mide las distancias de P a cada uno de los extremos A y B del segmento. Mueve el punto P sobre  $r$  y en un comentario, escribe la propiedad que se cumple.

3. Si construimos un triángulo ABP; ¿qué tipo de triángulo será? Escríbelo en la pantalla y explica justificadamente porqué.

- **Tipo:** Ejercicio de reestructuración/reconocimiento/aplicación
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 20 a 30 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, extremos de un segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, clasificación de triángulos según sus lados, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento
  - b) *Destrezas:*
    - Trazado de segmentos.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento con la opción mediatriz.
    - Determinación de un punto sobre una recta.
    - Medición de distancia entre dos puntos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.
  - c) *Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (la distancia entre un punto P perteneciente a la mediatriz y un extremo del segmento correspondiente puede variar pero cada punto P equidista de dichos extremos, igualdad que se mantiene invariante para todo punto sobre la mediatriz; el triángulo puede adoptar distintas formas, pero todo el tiempo se mantiene isósceles).
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
    - Clasificación del triángulo determinado, especificando el criterio aplicado.

- Justificación del proceso propuesto.
- Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos (la mediatriz depende del segmento, la distancia entre P y los extremos del segmentos depende de la posición de P sobre la mediatriz, aunque el hecho de que resulte en todos los casos la misma es independiente de la elección de P sobre r).
- Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
- Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
- Formulación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas.
- Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

■ **Posibles errores:**

- *Errores de construcción* (ejemplo: trazar una perpendicular cualquiera en vez de la mediatriz).
- *Errores de medición* (ejemplo: medir mal las distancias pedidas).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad, etc.).
- *Errores de argumentación:* no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de la propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

- *Términos:* segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, triángulo, nombre de los triángulos de acuerdo a la clasificación según sus lados, distancia, extremo de un segmento.
- *Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

**ACTIVIDAD 2: Trazado de mediatriz sin opción mediatriz.**  
**Problema N° 2**

- **Enunciado:**
  1. Construye un segmento de extremos A y B.
  2. Te proponemos el siguiente desafío: trazar la mediatriz del segmento sin utilizar las opciones Mediatriz ni punto medio. Una vez que hayas conseguido trazarla, llama r a dicha recta . 3. Explica mediante un comentario el procedimiento empleado.
  4. Oculta todos los trazos auxiliares de forma que en la pantalla sólo se vean el segmento y su mediatriz.
- **Tipo:** Ejercicio de reestructuración/aplicación
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 15 a 25 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, mediatriz, extremos de un segmento, distancia entre dos puntos, perpendicularidad, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento, circunferencia, triángulos isósceles, triángulo equilátero
  - b) *Destrezas:*
    - Trazado de segmentos.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento a partir de su definición y sus propiedades.
    - Determinación de un punto sobre una recta.
    - Medición de distancia entre dos puntos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Construcción de un triángulo isósceles a partir del lado no necesariamente igual y de un triángulo equilátero.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada
  - c) *Estrategias generales:*

- Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)). Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (al variar la longitud y/o posición del segmento, varía la posición de la mediatriz, de tal manera que se mantienen invariantes las condiciones de perpendicularidad y equidistancia a los extremos del segmento).
- Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
- Justificación del proceso propuesto.
- Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos (la mediatriz depende del segmento, aunque no depende de las distintas maneras de construirla).
- Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
- Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
- Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

■ ***Posibles errores:***

- *Errores de construcción* (ejemplo: trazar una perpendicular que aparente ser la que pasa por el punto medio del segmento, pero que se deforma al cambiar las condiciones del segmento inicial).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad, etc.).
- *Errores de argumentación:* no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).

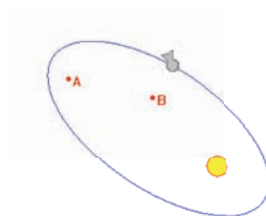
■ ***Conocimientos lingüísticos y semánticos:***

- *Términos:* segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, triángulo, triángulo isósceles, triángulo equilátero, circunferencia, radio, centro, distancia, extremo de un segmento.
- *Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, circunferencias, etc

**ACTIVIDAD 3: Estudiando un cometa.**

**Problema N° 3**

- **Enunciado:** Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura. En el mismo plano de la órbita, hay dos satélites artificiales fijos A y B encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es estudiado por el satélite que está más próximo a él. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite A estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite B? Razona tus respuestas.



- **Tipo:** problema de enunciado abierto
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 25 a 35 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, mediatriz, extremos de un segmento, distancia entre dos puntos, perpendicularidad, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento), circunferencia, triángulos isósceles, triángulo equilátero.
  - b) *Destrezas:*

- El planteamiento inicial de la actividad debería permitir que, contando con los conceptos y estructuras conceptuales mencionados, y aplicando las estrategias generales que se mencionarán más abajo; los alumnos resuelvan esta actividad sólo con destrezas muy simples que permiten activar la simulación propuesta a través de Cabri Java (ubicar el ratón sobre el satélite y pinchar, . . . ).  
Es decir que no sería necesaria la reproducción de las condiciones de la actividad a través de Cabri. No obstante, como se analizará más adelante, muchos alumnos prefieren (más bien necesitan) para poder resolver el problema dicha reproducción (para internalizar el proceso, para recurrir a otras posibilidades de Cabri más allá de las que vienen incorporadas en la presentación Cabri Java propuesta, etc.).
- En ese caso, las destrezas necesarias son:
  - Trazado de segmentos, puntos, elipses.
  - Trazado de la mediatriz de un segmento.
  - Determinación de un punto sobre una elipse.
  - Medición de distancia entre dos puntos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir la operación.
  - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada para analizar la relación de las distancias.
- *c) Estrategias generales:*
  - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
  - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos). Identificación en el problema geométrico planteado de los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica suele ser tenido en cuenta al principio como un elemento relevante del problema, cuando en realidad es sólo un elemento distractor).
  - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
  - Justificación del proceso propuesto.

- Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites).
- Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
- Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
- Formulación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas.
- Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano

• **Posibles errores:**

- *Errores de construcción/modelización* ejemplo: dificultades al trazar la elipse, al ubicar un punto sobre ella, al situar las posiciones correspondientes a los satélites).
- *Errores de medición* (ejemplo: al determinar las distancias que se pretenden analizar).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de conceptualización:* (ejemplo: dificultades para describir las condiciones bajo las cuales la distancia se hace menor respecto a uno de los satélites o cuando es la misma, dificultades para reconocer el lugar geométrico que corresponde a cada caso, incluso cuando se han aproximado a esas condiciones aplicando procedimientos de medición a veces surgen dificultades para justificarlo o bien para identificar las propiedades involucradas<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Estas dificultades frecuentes a la hora de identificar los conceptos y propiedades clave para la resolución del problema mediatriz y propiedades se deben posiblemente a que los mismos no se mencionan en el problema, ya que el problema- intencionalmente- no está incluido en una secuencia de “*actividades de mediatriz*” en la que todas se involucran con dicho concepto. Se trata de un problema abierto (aparece la elipse como elemento distractor, no se indican instrucciones para su resolución, la modelización es parte del



- *Errores de estratégicos*: (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, medición, variación del dibujo, etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de la propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).
- ***Conocimientos lingüísticos y semánticos***:
  - *Términos*: segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, triángulo, triángulo isósceles, extremo de un segmento, elipse.
  - *Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc

#### ***ACTIVIDAD 4: El tesoro escondido 1.***

##### **Problema N° 4**

- ***Enunciado***: Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro hay solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Se sabe que al situarse junto al abedul (A), y mirar hacia la línea recta que une el roble y el pino (R y P), el roble queda a la derecha y el pino a la izquierda, como muestra la figura. Para encontrar el tesoro es necesario caminar desde el abedul hacia el roble contando los pasos y al llegar al roble girar en ángulo recto hacia la derecha y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar una estaca (E1). Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde éste hacia el pino, contando los pasos; al llegar al pino hay que girar en ángulo recto hacia la izquierda y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto es preciso detenerse y clavar otra estaca (E2).

El tesoro T está enterrado precisamente en el punto medio del segmento que une las dos estacas.

---

trabajo del alumno en su resolución, al igual que la selección de conceptos y estrategias a utilizar).

Con estas instrucciones tan detalladas, encuentra a partir de las posiciones de los tres árboles, la ubicación del tesoro. Describe el procedimiento que has desarrollado para encontrar la posición de T.

- **Tipo:** ejercicio algorítmico
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 20 a 30 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, extremos de un segmento, distancia entre dos puntos, perpendicularidad, giros, circunferencia, equidistancia de los puntos de una circunferencia respecto al centro, punto medio..
  - b) *Destrezas:*
    - Trazado de segmentos, puntos, circunferencias, perpendiculares.
    - Trazado del punto medio entre dos puntos.
    - Medición de distancia entre dos puntos. Medición de ángulos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir la operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada para analizar la relación de las distancias
  - c) *Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación en el problema geométrico planteado de los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: la posición de A, resulta finalmente irrelevante, pero en esta instancia de la actividad, este hecho pasa inadvertido para los alumnos sin que eso impida la correcta resolución).
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
    - Justificación del proceso propuesto.
    - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

- Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos (la posición de A, resulta finalmente irrelevante, de tal manera que la posición de T resulta independiente de la de A; si bien en esta instancia de la actividad, este hecho suele pasar inadvertido para los alumnos y no es imprescindible para la resolución de problema, a veces sí es manifestada esta particularidad encontrada).
  - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
  - Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado
- **Posibles errores:**
    - *Errores de modelización* (ejemplo: dificultades para traducir las condiciones del enunciado en un modelo geométrico apropiado).
    - *Errores de construcción* (ejemplo: dificultades para encontrar las posiciones de E1 y E2 a partir de las condiciones planteadas por el enunciado, ya sea por errores al determinar la perpendicularidad o la equidistancia; al encontrar la ubicación del punto medio, al girar sin tener en cuenta el sentido indicado o confundiéndolo, etc.).
    - *Errores de medición* (ejemplo: al determinar las distancias o los ángulos).
    - *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
    - *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).
  - **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**
    - *Términos*: segmento, recta, punto, punto medio, distancia entre dos puntos, equidistancia, circunferencia, giro.
    - *Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, etc.

**ACTIVIDAD 5: El tesoro escondido 2.****Problema N° 5**

- **Enunciado:** Teniendo todas las instrucciones y encontrando el sitio en el que se encuentran los tres árboles resulta bastante sencillo encontrar la posición del tesoro.

Sin embargo, cuenta la historia que un experto buscador de tesoros llegó al sitio indicado y sólo encontró el roble y el pino (el abedul debería haberse secado hace tiempo y no quedaba ningún rastro respecto a cuál había sido su posición).

Dicen que aunque al principio el buscador se desanimó un poco, finalmente logró encontrar exactamente la posición del tesoro.

Surge la pregunta, ¿Cómo habrá logrado hacerlo? Explica y razona cómo crees que lo consiguió.

- **Tipo:** problema de enunciado abierto
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 30 a 40 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, mediatriz, extremos de un segmento, distancia entre dos puntos, perpendicularidad, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento, circunferencia, equidistancia de los puntos de la circunferencia respecto al centro, triángulos isósceles, triángulos rectángulos, punto medio de un segmento, ángulos.
  - b) *Destrezas:*
    - Trazado de segmentos, puntos, circunferencias.
    - Trazado de la mediatriz y del punto medio de un segmento.
    - Medición de distancia entre dos puntos y de ángulos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir la operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada para analizar la relación de las distancias.
  - c) *Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones detallados en a) .

- Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (con R y P fijos, al variar la posición de A, los puntos E1 y E2 varían su ubicación, pero no varía la posición de T, que resulta independiente de A; en esta instancia de la actividad, este hecho debe ser identificado por los alumnos como clave para la resolución del problema).
  - Identificación en el problema geométrico planteado de los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: la posición de A, resulta finalmente irrelevante, y en esta instancia de la actividad, este hecho debe ser detectado como tal para la correcta resolución).
  - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
  - Justificación del proceso propuesto.
  - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
  - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
  - Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
  - Formulación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas.
  - Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.
- **Posibles errores:**
- *Errores de modelización* (ejemplo: dificultades para traducir las condiciones del enunciado en un modelo geométrico apropiado, que en este caso no es más que el propuesto para la resolución de la actividad anterior).
  - *Errores de medición* (ejemplo: al determinar las distancias o los ángulos).
  - *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
  - *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para describir las relaciones entre los elementos del problema, para distinguir elementos variables de elementos invariantes, etc.)

- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, medición, variación del dibujo generado para la resolución del problema anterior, etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad, de las características del lugar geométrico en que se encuentra T, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).
- ***Conocimientos lingüísticos y semánticos***
  - *Términos*: segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, triángulo, triángulo isósceles, extremo de un segmento, elipse.
  - *Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

### ***ACTIVIDAD 6: El tesoro escondido 3.***

#### **Problema N° 6**

- ***Enunciado***: Cuentan también por ahí que el buscador decidió dejar el tesoro escondido en el mismo punto para volver a buscarlo con ayuda de otras personas debido a que la cantidad y el peso del mismo le hacían imposible manipularlo solo.

Decidió entonces confeccionar un nuevo mapa de referencias para orientarse la siguiente vez de una forma más simple, contando con que el abedul ya no existía.

¿Podrías escribir las indicaciones que habrá dado en esta nueva referencia para encontrar el tesoro conociendo solamente las posiciones del roble y del pino?

- ***Tipo***: problema de enunciado abierto
- ***Bloque temático***: Geometría
- ***Tiempo estimado a emplear***: 30 a 40 minutos

■ **Conocimientos matemáticos que exige:**

- a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, mediatriz, extremos de un segmento, distancia entre dos puntos, perpendicularidad, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento, circunferencia, equidistancia de los puntos de la circunferencia respecto al centro, triángulos isósceles, triángulos rectángulos, punto medio de un segmento.
- b) *Destrezas:*
  - Trazado de segmentos, puntos, circunferencias, perpendiculares.
  - Trazado de la mediatriz de un segmento y de su punto medio.
  - Medición de distancia entre dos puntos y de ángulos. Reconocimiento de los elementos necesarios para definir la operación.
  - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada para analizar la relación de las distancias y de los ángulos e identificar el lugar geométrico de T.
- c) *Estrategias generales:*
  - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
  - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (con R y P fijos, al variar la posición de A, los puntos E1 y E2 varían su ubicación, pero no varía la posición de T, que resulta independiente de A; en esta instancia de la actividad, este hecho debe ser identificado por los alumnos como clave para la resolución del problema).
  - Identificación en el problema geométrico planteado de los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: la posición de A, resulta finalmente irrelevante, y en esta instancia de la actividad, este hecho debe ser detectado como tal para la correcta resolución).
  - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad.
  - Identificación y caracterización del lugar geométrico correspondiente a T, en relación a R y P (utilizando los conceptos y las relaciones más adecuadas: mediatriz, perpendicularidad, triángulo rectángulo, ángulos de  $45^\circ$ , etc.).

- Determinación y descripción del lugar geométrico de T, en función de las posiciones de P y de R utilizando los conceptos y las relaciones adecuadas (mediatriz, perpendicular, relación de ángulos y distancias, etc.).
- Justificación del proceso propuesto.
- Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos (la ubicación del tesoro sí depende de las posiciones de P y de R, aunque no de la posición de A).
- Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
- Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.
- Formulación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas.
- Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

● ***Posibles errores:***

- *Errores de modelización* (ejemplo: dificultades para traducir las condiciones del enunciado en un modelo geométrico apropiado, que en este caso no es más que el propuesto para la resolución de las actividades anteriores).
- *Errores de medición* (ejemplo: al determinar las distancias o los ángulos).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para describir las relaciones entre los elementos del problema, para distinguir elementos variables de elementos invariantes, y elementos dependientes de independientes, para caracterizar el lugar geométrico de t, etc.).
- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias medir distancias, ángulos, etc. para el análisis de la relación del lugar de T en función de la ubicación de R y P).



- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad, del lugar geométrico en que se encuentra T respecto a R y P, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).
- ***Conocimientos lingüísticos y semánticos***:
  - *Términos*: segmento, recta, punto, mediatriz, distancia entre dos puntos, triángulo, triángulo isósceles, extremo de un segmento, elipse.
  - *Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

## 10.2. Análisis de la Primera Secuencia de Actividades (SA1) mediante el Segundo instrumento de análisis de actividades

### *ACTIVIDAD 1: Mediatriz de un segmento*

- ***Actividad***: 1 de SA1. “Mediatriz de un segmento”
- ***Etapas***: *Presencial*
- ***Interacciones principales***: Alumno Profesor presencial
- ***Carácter de las interacciones***: Presencial
- ***Modalidad comunicativa***: Oral y escrita
- ***Interacciones y comunicación***: Las interacciones profesor- alumno están marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:
  - Interacción directa, sucesiva, reversible
  - Inmediatez interlocutiva

- Se comparte el contexto situacional.
- Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.
- Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.

La comunicación escrita aparece como parte de la “actividad escolar”: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar el enunciado que se plantea por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados.

La comunicación oral interviene en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos: las dudas que se plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas progresivas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a “atender a la diversidad”, se realizan oralmente.

- **Preguntas más frecuentes:** Preguntas generales (¿está bien? ¿cómo se hace?, no entiendo, ¿cómo escribo lo que ocurre?), preguntas relacionadas con el uso de software (¿cómo mido las distancias?, ¿cómo trazo la mediatriz?)
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** ¿qué es la mediatriz? ¿cómo se traza? ¿por qué no alcanza con trazar una perpendicular? ¿qué ocurre con la distancia de P a cada uno de los extremos del segmento? ¿cómo se clasifican los triángulos? ¿qué tipo de triángulo en ABP? ¿por qué?
- **Diversi caciones posibles:** ¿qué puedes decir de la distancia de P a los extremos para las distintas posiciones de P sobre r?, ¿por qué puedes asegurar que ABP es isósceles?, ¿cómo podrías demostrar que ABP es isósceles? ¿podrías escribir lo que ocurre en forma de propiedad? ¿podrías redefinir “mediatriz” teniendo en cuenta esta propiedad?
- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:**  
“actividad escolar tradicional

### **ACTIVIDAD 2: Trazado de mediatriz sin opción mediatriz**

- **Actividad:** 2 de SA. Trazado de mediatriz sin opción mediatriz
- **Etapa:** *Presencial*
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor presencial
- **Carácter de las interacciones:** Presencial
- **Modalidad comunicativa:** Oral y escrita
- **Interacciones y comunicación:** Las interacciones profesor- alumno están marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:
  - Interacción directa, sucesiva, reversible
  - Inmediatez interlocutiva
  - Se comparte el contexto situacional.
  - Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.
  - Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.

La comunicación escrita aparece como parte de la “actividad escolar”: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar el enunciado que se plantea por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados.

La comunicación oral interviene en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos: las dudas que se plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas progresivas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a “atender a la diversidad”, se realizan oralmente.

- **Preguntas más frecuentes:** Preguntas generales (¿está bien? ¿cómo se hace?, no entiendo, ¿cómo escribo lo que hice?), preguntas relacionadas con el uso de software (¿cómo trazo la mediatriz sin usar la opción mediatriz?)
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** ¿qué es la mediatriz? ¿cómo se traza? ¿por qué punto corta al segmento AB? ¿cómo encontrarías ese punto? ¿por qué no sirve trazar una perpendicular que parezca

que ¿corta al segmento por la mitad?? ¿qué ocurre si modificamos el segmento, sigue siendo la mediatriz?

- ***Diversificaciones posibles:*** ¿¿cómo verificarías usando Cabri que el procedimiento que has propuesto es correcto? ¿cómo puedes justificar de forma general que el procedimiento que propones es correcto?
- ***Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:*** “actividad escolar tradicional

### ***ACTIVIDAD 3: Estudiando un cometa***

- **Actividad:** 3 de SA1. Estudiando un cometa
- **Etapas:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri Java)
- **Interacciones principales:** Alumno- Profesor virtual, Alumno- Alumno
- **Carácter de las interacciones:** A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico

Ventaja: no es necesario disponer de Cabri II para acceder a la actividad (basta con un navegador que soporte Java), y tampoco es necesario saber utilizar el software. Además, tampoco se pierde “lo dinámico”, las posibilidades de analizar el proceso y sus variaciones que ofrece Cabri II.

Desventaja: el alumno recorre un proceso propuesto y, aunque puede producir variaciones, no es él quien realiza la traducción del enunciado a la construcción geométrica ni tampoco quien decide qué variaciones hacer sobre el modelo, sólo elige entre las propuestas en las instrucciones que vienen con la actividad.

Nota: en general, los alumnos de 3° de ESO con los que se ha realizado la experiencia, aun disponiendo del modelo geométrico en Cabri Java, recurren a la construcción propia del mismo para su posterior manipulación, recurriendo a las estrategias que consideran pertinentes (medición, visualización, variaciones sobre el dibujo, etc.).

Creemos que esta particularidad, que no se ha observado en otros alumnos, se debe a dos razones. Por un lado el hecho de que los alumnos no sólo cuentan con el software instalado en sus ordenadores sino que además ya lo saben utilizar y conocen sus posibilidades y ventajas, lo

que les da no sólo seguridad sino además un marco en el que realizar una modelización personal del problema.

Por otra parte, la realización de este proceso de modelización paso a paso, les permite ir asumiendo las condiciones planteadas, las cuestiones propuestas, lo que pide, plantea o pregunta la actividad; es decir, favorece los procesos de conversión del enunciado real en un enunciado matemático y de traducción de éste último en una estructura geométrica, procesos imprescindibles para la resolución del problema.

Esta particularidad no se ha observado en alumnos de Magisterio y de Bachillerato; los que son capaces de tomar como modelo para la resolución el presentado en “Cabri Java” por la misma actividad y resolver a partir del mismo (aplicando estrategias, conceptos, relaciones, ... sobre el modelo, asumido como propio, sin necesidad de un modelo generado por ellos mismos).

Pero en este caso, ninguno de los alumnos de 3º de ESO con los que hemos trabajado ha sido capaz de apropiarse del modelo propuesto por la actividad, y todos han tenido que comenzar el proceso de resolución con la modelización y traducción que hemos mencionado.

- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica
- **Interacciones y comunicación:** La comunicación escrita se convierte en ¿la única forma de comunicación?, dejando de ser un ¿ejercicio escolar?. La recepción se basa en la comprensión lectora y el mensaje producido en la expresión escrita. Se diferencian claramente los momentos de producción y de recepción: contacto en diferido. No se comparte el contexto situacional aunque sí el contexto referencial (saberes consensuados): los mensajes (enunciado de la actividad, resoluciones propuestas, formulación de dudas, respuestas, etc.) deben referirse a ese contexto y especificarlo hasta el nivel que requiera su comprensión.

Nota (ventaja): el alumno como emisor, puede (y debe) reconsiderar su producción, organizar, corregir, modificar, etc.; siguiendo las fases de la producción escrita: conceptualización + textualización + revisión (etapas no necesariamente secuenciales). Este proceso, favorece los procesos metacognitivos y reflexivos en el alumno tanto en lo referente al trabajo sobre la actividad en sí como en lo relativo a las solicitudes de ayuda y formulación de dudas o dificultades, que ahora deben realizarse por escrito.

- **Preguntas más frecuentes:** “profesor, he hecho el dibujo y he medido las distancias y he encontrado que a veces está más cerca de A y a veces más cerca de B pero no sé cómo explicarlo ¿me darías una ayuda?”, “he encontrado que el triángulo que forman debe ser isósceles para que estén a la misma distancia pero no sé porqué”, “he hecho el dibujo y creo que la respuesta debe tener que ver con la elipse pero no sé porqué”, etc.
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** “Analiza en qué posiciones el cometa es analizado por cada satélite”, “analiza qué ocurre con las distancias”, “estudia qué tipo de triángulo forman los dos satélites con el cometa”, “encuentra en qué casos el cometa equidista de ambos satélites”, etc.

Estaba previsto que la última de las ayudas, después de todas las anteriores fuera: “¿podrías realizar en Cabri una construcción que responda a las condiciones del problema? ¿cómo analizarías en tu construcción lo que ocurre?”.

Al diseñar la actividad pensábamos que la construcción en Cabri sería el último recurso, la última ayuda sugerida por el profesor; sin embargo, como se ha explicado más arriba, los alumnos han recurrido a esta posibilidad como primer recurso, sin necesidad de la orientación docente y sin probar antes otras posibilidades de resolución sobre el modelo propuesto.

Creemos que el diseño de actividades para los alumnos debe ser un proceso dinámico, reflexivo, crítico; en el cual el ciclo diseño aplicación evaluación reformulación va dando como resultado actividades cada vez más ricas a la vez que brinda informaciones importantes sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje.

- **Diversificaciones posibles:** ¿cómo puedes justificar de forma general que el procedimiento que propones es correcto? ¿qué propiedad justifica tu resolución? ¿la respuesta que das sirve solamente para los puntos situados sobre la elipse? ¿podrías dar una conclusión más general?
- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

#### **ACTIVIDAD 4: El tesoro escondido 1**

- **Actividad:** 4 de SA1. El tesoro escondido 1
- **Etapas:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri)
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor virtual, Alumno Alumno
- **Carácter de las interacciones:** A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico.

Por tratarse de una actividad “Versión Cabri”, una vez que los alumnos acceden a su enunciado, resuelven en un archivo Cabri en el cual incorporan la comunicación sobre el proceso que han llevado a cabo y envían dicho archivo adjuntándolo a un correo electrónico.

También pueden utilizar este medio para solicitar ayuda o preguntar cuestiones puntuales y recibir así orientaciones por parte del profesor. También será a través del correo la manera en que se planteen las diversificaciones propuestas para esta actividad.
- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica
- **Interacciones y comunicación:** La comunicación escrita se convierte en “la única forma de comunicación”, con idénticas características a las planteadas para Actividad 3.
- **Preguntas más frecuentes:** Por tratarse de un ejercicio algorítmico (es decir que su resolución requiere de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos, secuencia que viene perfectamente detallada en el enunciado), las preguntas o dificultades suelen ser escasas: “¿cómo hago un giro en ángulo recto?”, “¿cómo hacia la derecha?”, “¿cómo hago para caminar los mismos pasos?”, ...
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** “Piensa que el que debe girar es el buscador de tesoros, ubícate mentalmente en su posición y establece cómo haría para girar a la izquierda (derecha)”, “analiza cómo deben ser las rectas AR y RE1 entre sí”, “¿dónde se encuentran todos los puntos que están a la misma distancia de R que el punto A?”, ...
- **Diversificaciones posibles:** En este caso, preferimos que las diversificaciones se planteen a partir de la siguiente actividad.
- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “actividad escolar tradicional”

*ACTIVIDAD 5: El tesoro escondido 2*

- **Actividad:** 5 de SA1. El tesoro escondido 2
- **Etapas:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri)
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor virtual, Alumno Alumno
- **Carácter de las interacciones:** A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico.

Por tratarse de una actividad “Versión Cabri”, una vez que los alumnos acceden a su enunciado, resuelven en un archivo Cabri en el cual incorporan la comunicación sobre el proceso que han llevado a cabo y envían dicho archivo adjuntándolo a un correo electrónico.

También pueden utilizar este medio para solicitar ayuda o preguntar cuestiones puntuales y recibir así orientaciones por parte del profesor.

También será a través del correo la manera en que se planteen las diversificaciones propuestas para esta actividad.

- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica
- **Interacciones y comunicación:** La comunicación escrita se convierte en la única forma de comunicación?, con idénticas características a las planteadas para Actividad 3.
- **Preguntas más frecuentes:** Para resolver esta actividad, casi todos los alumnos empiezan solicitando ayuda; a menos que en la validación de la actividad anterior hayan producido variaciones que les permitieran detectar que la ubicación de A no condiciona la posición de T. De no haber sido así, ante el primer pedido de ayuda (para empezar la resolución), se les sugiere que produzcan dichas variaciones.
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** Se sugiere para empezar, producir variaciones en la construcción realizada para resolver la Actividad 4 para encontrar algún tipo de regularidad: “Analiza qué ocurre con la ubicación de T al cambiar las posiciones de cada uno de los tres árboles y explica lo que sucede”, “¿se podría haber encontrado el tesoro si hubiese faltado el roble o si lo hubiesen cambiado de sitio? ¿y si hubiese faltado el pino o hubiera estado en otra ubicación? ¿y si faltara el abedul o cambiara de ubicación?, ¿por qué?”



- **Diversificaciones posibles:** En las resolución de esta actividad, los alumnos encuentran que como la posición de T es independiente de la ubicación de A, el buscador de tesoros, al darse cuenta de esta característica, habrá tomado una supuesta posición de A (cualquiera) y habrá seguido la secuencia (el algoritmo) que indicaba el mapa original (descrito en la Actividad 4).

A algunos alumnos que llegan a esta solución (que es correcta) se les propone: “Dicen que el buscador de tesoros encontró una relación directa entre el la ubicación de T y las posiciones de R y P; intenta encontrar esa relación”.

Como ayudas progresivas para resolver esta diversificación se proponen: “oculta en tu construcción todos los datos iniciales y deja a la vista sólo las ubicaciones de R, P y T; y analiza qué relación guarda la posición de T respecto a las de R y P”, “produce variaciones en el dibujo para ayudarte a descubrir esas regularidades”, “analiza las medidas que creas conveniente”, “esa relación es cumplida por un solo punto o por más de uno”, “analiza qué ocurre con los ángulos” (esta ayuda se sugiere en caso de que los alumnos hubieran medido sólo distancias o encontrado que T está sobre la mediatriz del segmento RP)

- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

### **ACTIVIDAD 6: El tesoro escondido 3**

- **Actividad:** 6 de SA1. El tesoro escondido 3
- **Etapas:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri)
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor virtual, Alumno Alumno
- **Carácter de las interacciones:** A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico.

Por tratarse de una actividad “Versión Cabri”, una vez que los alumnos acceden a su enunciado, resuelven en un archivo Cabri en el cual incorporan la comunicación sobre el proceso que han llevado a cabo y envían dicho archivo adjuntándolo a un correo electrónico.

También pueden utilizar este medio para solicitar ayuda o preguntar cuestiones puntuales y recibir así orientaciones por parte del profesor.

También será a través del correo la manera en que se planteen las diversificaciones propuestas para esta actividad.

- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica
- **Interacciones y comunicación:** La comunicación escrita se convierte en “la única forma de comunicación”, con idénticas características a las planteadas para Actividad 3.
- **Preguntas más frecuentes:** Una vez resuelta la Actividad 5, ésta no suele presentar dificultades más que para describir el “algoritmo” a partir de un punto A cualquiera (algoritmo que les resulta fácil de describir recurriendo como ayuda al enunciado de la Actividad 4).

Pero una vez lograda esta primera versión de la resolución se les sugiere una primera diversificación que sí provocará preguntas y pedidos de ayuda por parte de varios alumnos.

- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:** En general, no suelen ser necesarias en esta primera parte; si hace falta, se sugiere a los alumnos revisar el concepto de “mapa de referencias para orientarse” tal como aparece en la Actividad 4 y se realizan sugerencias sobre la manera en que expresan dicho algoritmo que puede presentar errores en su redacción (no ser clara, dar lugar a ambigüedades, estar incompleta, etc.)
- **Diversificaciones posibles:** Los alumnos suelen proponer como solución, un algoritmo similar al propuesto en la Actividad 4, partiendo de las posiciones de R, P y un punto A cualquiera.

Se les sugiere entonces que formulen unas indicaciones que permitan hallar la posición de T, a partir de la relación directa que guarda respecto a R y a P.

Se exigen distintos grados de formalización y generalización, según las posibilidades de cada alumno.

Una segunda diversificación, que se propone una vez superada la primera en su máximo nivel de complejidad, consiste en la demostración de la propiedad encontrada, utilizando un sistema de coordenadas adecuado y formalizando aún más el modelo; pero esta “demostración” resulta bastante compleja; no sólo por la noción de demostración que

es sabido que por sí misma resulta difícil de trabajar, sino por el procedimiento que esta demostración implica incluso en sus versiones más sencillas en relación al manejo simbólico, procedimientos, etc.

- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

### 10.3. Análisis de la Primera Secuencia de Actividades (SA1) mediante el Tercer instrumento de análisis de actividades

#### *ACTIVIDAD 1: Mediatriz de un segmento*

- **Enunciado:** ACTIVIDAD 1. Mediatriz de un segmento
  1. Traza un segmento AB; luego traza la mediatriz de este segmento con la opción Mediatriz y llámala r.
  2. Marca un punto sobre la mediatriz y llámalo P. Mide las distancias de P a cada uno de los extremos A y B del segmento. Mueve el punto P sobre r y en un comentario, escribe la propiedad que se cumple.
  3. Si construimos un triángulo ABP; ¿qué tipo de triángulo será? Escríbelo en la pantalla y explica justificadamente porqué.
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**
  - Contextos familiares.
  - Conocimientos ya practicados.
  - Aplicación de algoritmos estándar.
  - Realización de operaciones sencillas.
- **Categoría:** Reproducción y procedimientos rutinarios
- **Clase de actividad:** Primera clase

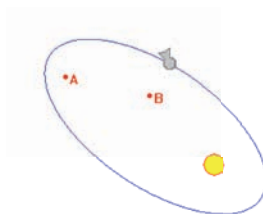
#### *ACTIVIDAD 2: Trazado de mediatriz sin opción mediatriz*

- **Enunciado** ACTIVIDAD 2. Trazado de mediatriz sin opción mediatriz
  1. Construye un segmento de extremos A y B.
  2. Te proponemos el siguiente desafío: trazar la mediatriz del segmento sin utilizar las opciones Mediatriz ni punto medio. Una vez que hayas conseguido trazarla, llama r a dicha recta.
  3. Explica mediante un comentario el procedimiento empleado.
  4. Oculta todos los trazos auxiliares de forma que en la pantalla sólo se vean el segmento y su mediatriz.
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**

Contextos menos familiares.  
Interpretar y explicar.  
Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.
- **Categoría:** Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados
- **Clase de actividad** Segunda clase

### **ACTIVIDAD 3: Estudiando un cometa**

- **Enunciado** ACTIVIDAD 3: Estudiando un cometa Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura.



En el mismo plano de la órbita, hay dos satélites artificiales fijos A y B encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es estudiado por el satélite que está más próximo a él. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite A estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite B? Razona tus respuestas.

- **Indicadores de la complejidad de la tarea**

Tareas que requieren comprensión y reflexión.

Creatividad.

Ejemplificación y uso de conceptos.

Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.

Generalizar y justificar resultados obtenidos.

- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.

- **Clase de actividad:** Tercera clase

**ACTIVIDAD 4: El tesoro escondido 1**

- **Enunciado ACTIVIDAD 4:** El tesoro escondido 1<sup>2</sup>

Cierta persona se enteró de que en el lugar donde hay enterrado un tesoro hay solamente tres árboles: un roble, un pino y un abedul. Se sabe que al situarse junto al abedul (A), y mirar hacia la línea recta que une el roble y el pino (R y P), el roble queda a la derecha y el pino a la izquierda, como muestra la figura:



Para encontrar el tesoro es necesario caminar desde el abedul hacia el roble contando los pasos y al llegar al roble girar en ángulo recto hacia la derecha y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el roble. En este punto es necesario detenerse y clavar una estaca (E1).

Después hay que regresar al abedul y dirigirse desde éste hacia el pino, contando los pasos; al llegar al pino hay que girar en ángulo recto hacia

---

<sup>2</sup>Las actividades 4, 5 y 6 de esta secuencia han sido adaptadas a partir de la versión del problema de “La búsqueda del tesoro” que aparece en el libro *Métodos matemáticos de investigación de las operaciones*, Ed. Voenizdat de T. Saati (1963), quien a su vez lo rescata de las obras de de Conan Doyle y Stevenson.

la izquierda y dar la misma cantidad de pasos que se dio entre el abedul y el pino. En este punto es preciso detenerse y clavar otra estaca (E2). El tesoro T está enterrado precisamente en el punto medio del segmento que une las dos estacas.

Con estas instrucciones tan detalladas, encuentra a partir de las posiciones de los tres árboles, la ubicación del tesoro. Describe el procedimiento que has desarrollado para encontrar la posición de T.

- **Indicadores de la complejidad de la tarea**

Contextos familiares.

Conocimientos ya practicados.

Aplicación de algoritmos estándar.

Realización de operaciones sencillas.

- **Categoría:** Reproducción y procedimientos rutinarios.

- **Clase de actividad** Primera clase

### **ACTIVIDAD 5: *El tesoro escondido 2***

- **Enunciado** ACTIVIDAD 5: El tesoro escondido 2

Teniendo todas las instrucciones y encontrando el sitio en el que se encuentran los tres árboles resulta bastante sencillo encontrar la posición del tesoro.

Sin embargo, cuenta la historia que un experto buscador de tesoros llegó al sitio indicado y sólo encontró el roble y el pino (el abedul debería haberse secado hace tiempo y no quedaba ningún rastro respecto a cuál había sido su posición).

Dicen que aunque al principio el buscador se desanimó un poco, finalmente logró encontrar exactamente la posición del tesoro. Surge la pregunta, ¿Cómo habrá logrado hacerlo? Explica y razona cómo crees que lo consiguió.

- **Indicadores de la complejidad de la tarea:**

Tareas que requieren comprensión y reflexión.

Creatividad.

Ejemplificación y uso de conceptos.

Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.

Generalizar y justificar resultados obtenidos.

- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.
- **Clase de actividad** Tercera clase

### ***ACTIVIDAD 6: El tesoro escondido 3***

- **Enunciado:** Cuentan también por ahí que el buscador decidió dejar el tesoro escondido en el mismo punto para volver a buscarlo con ayuda de otras personas debido a que la cantidad y el peso del mismo le hacían imposible manipularlo solo.

Decidió entonces confeccionar un nuevo mapa de referencias para orientarse la siguiente vez de una forma más simple, contando con que el abedul ya no existía.

¿Podrías escribir las indicaciones que habrá dado en esta nueva referencia para encontrar en tesoro conociendo solamente las posiciones del roble y del pino?

- **Indicadores de la complejidad de la tarea:**
  - Tareas que requieren comprensión y reflexión.
  - Creatividad.
  - Ejemplificación y uso de conceptos.
  - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
  - Generalizar y justificar resultados obtenidos.
- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.
- **Clase de actividad** Tercera clase

## **10.4. Análisis de la Segunda Secuencia de Actividades (SA2) mediante el Primer instrumento de análisis de actividades**

### ***ACTIVIDAD 1. Mediatrices de un triángulo***

- **Problema N°: 1**
- **Enunciado:** ACTIVIDAD 1. Mediatrices de un triángulo
  1. Dibuja un triángulo ABC y traza las mediatrices correspondientes a los tres lados, ¿en cuántos puntos se cortan? (puedes realizar variaciones sobre el triángulo para ver qué ocurre).
  2. Enuncia la propiedad correspondiente.
- **Tipo:** ejercicio de reestructuración/reconocimiento/aplicación
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 15 a 20 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - *a) Conceptos y estructuras conceptuales:* triángulo, recta, punto, mediatriz, circuncentro, propiedad de las mediatrices de un triángulo.
  - *b) Destrezas:*
    - Trazado de triángulos.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento con la opción mediatriz.
    - Determinación de un punto sobre una recta.
    - Determinación del punto de intersección entre dos o más rectas.
    - Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.
  - *c) Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (la intersección de las tres mediatrices en un mismo punto no depende de las características del triángulo)
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.
    - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización e intentos de variaciones sobre la construcción.



Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.

Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado. Formulación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas.

Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

▪ **Posibles errores:**

- *Errores de construcción* (ejemplo: trazar una perpendicular cualquiera en vez de la mediatriz).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado o de la propiedad).

▪ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos:* segmento, recta, punto, mediatriz, circuncentro, triángulo, punto de intersección.

*Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos.

**ACTIVIDAD 2: El circuncentro**

▪ **Problema N°: 2**

▪ **Enunciado:** ACTIVIDAD 2: El circuncentro

1. Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llamaremos circuncentro O al punto de intersección entre ellas.
2. ¿El punto de intersección de las mediatrices pertenece siempre al interior del triángulo? ¿Puede estar fuera del triángulo? ¿Puede pertenecer a un lado?

▪ **Tipo:** Ejercicio de reestructuración/aplicación

▪ **Bloque temático:** Geometría

▪ **Tiempo estimado a emplear:** 20 a 30 minutos

- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - **a) Conceptos y estructuras conceptuales:** segmento, recta, punto, mediatriz, circuncentro, triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, elementos de los triángulos (lados, vértices, hipotenusa, ángulos, catetos, etc.).
  - **b) Destrezas:**
    - Trazado de segmentos y triángulos.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento.
    - Determinación del punto de intersección entre dos o más rectas.
    - Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.
  - **c) Estrategias generales:**
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (al variar el triángulo, el hecho de que las tres mediatrices se cortan en un punto no varía; aunque sí lo hace la ubicación de ese circuncentro respecto al triángulo dependiendo del tipo de triángulo).
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.
    - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
    - Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.
    - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
    - Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y de las relaciones encontradas.
    - Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.
- **Posibles errores:**

- *Errores de construcción/modelización* (ejemplo: trazar un triángulo particular, como puede ser un equilátero mediante la utilización de la opción polígono regular)
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para describir las condiciones para las cuales el circuncentro se encuentra dentro, sobre o fuera del triángulo).
- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, variación del dibujo, etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad encontrada, etc.).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos:* segmento, recta, punto, mediatriz, circuncentro, triángulos acutángulos, rectángulos y obtusángulos, lados, vértices, hipotenusa, ángulos, catetos, etc.

*Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

**ACTIVIDAD 3: Circunferencia circunscrita**

■ **Problema N°: 3**

■ **Enunciado:** ACTIVIDAD 3: Circunferencia circunscrita

1. Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llama O al circuncentro.
2. Traza la circunferencia de centro O y que pase por un vértice del triángulo. ¿Qué ocurre? Explica porqué. La circunferencia que has trazado es la circunferencia circunscrita al triángulo.
3. ¿Dónde se encuentra el circuncentro de un triángulo rectángulo?
4. Justifica la siguiente afirmación: “Dado un triángulo cualquiera, siempre es posible trazar una circunferencia que pase por sus tres vértices”

■ **Tipo:** ejercicio de reconocimiento/ algorítmico

- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 20 a 30 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - *a) Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, recta, punto, mediatriz, circuncentro, triángulo, vértice, circunferencia, centro, circunferencia circunscrita, triángulos rectángulos, elementos de los triángulos rectángulos (lados, vértices, hipotenusa, ángulos, catetos, etc.).
  - *b) Destrezas:*
    - Trazado de segmentos y triángulos.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento.
    - Determinación del circuncentro.
    - Trazado de una circunferencia con un centro dado y pasando por un punto.
    - Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.
  - *c) Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (al variar el triángulo, el hecho de que las tres mediatrices se cortan en un punto no varía; al igual que el hecho de que la circunferencia trazada siga circunscribiendo al triángulo; aunque sí varía la ubicación de ese circuncentro respecto al triángulo dependiendo del tipo de triángulo).
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.
    - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, e intentos de variaciones sobre la construcción.
    - Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.
    - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.

Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y de las relaciones encontradas.

Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

■ **Posibles errores:**

- *Errores de construcción/modelización* (ejemplo: trazar un triángulo particular, como puede ser un equilátero mediante la utilización de la opción polígono regular, identificar erróneamente el circuncentro, etc.)
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para describir las condiciones para el circuncentro de un triángulo rectángulo).
- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, variación del dibujo, etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad encontrada, etc.).
- *Errores de argumentación:* no justificar correctamente la validez de la afirmación propuesta o de la propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos:* segmento, recta, punto, mediatriz, circuncentro, triángulo, vértice, circunferencia, centro, circunferencia circunscrita, triángulos rectángulos, lados, vértices, hipotenusa, ángulos, catetos, etc.

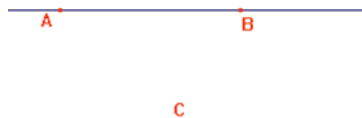
*Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

**ACTIVIDAD 4: Gatos y ratones**

■ **Problema N°: 4**

■ **Enunciado:** ACTIVIDAD 4: Gatos y ratones

El gato Tom, espera que el ratón Jerry salga por alguna de los tres puertas de su ratonera (puertas A, B o C), cercanas al final de un pasillo. Una de las puertas está en una de las paredes del pasillo y la otras dos en la otra, como indica la figura. Sabiendo que Jerry puede salir con igual probabilidad de cada una de las puertas, Tom decide ubicarse en un punto que esté a igual distancia de las tres ¿existe tal punto? ¿hay varios puntos que cumplen esa condición, hay uno solo o no existe ninguno? Si existe tal punto, ¿cómo ayudarías a Tom a encontrarlo? Justifica tus respuestas.



■ **Tipo:** problema de enunciado abierto

■ **Bloque temático:** Geometría

■ **Tiempo estimado a emplear:** 25 a 35 minutos

■ **Conocimientos matemáticos que exige:**

- a) *Conceptos y estructuras conceptuales:* segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, triángulo, vértice, circunferencia, centro, circunferencia circunscrita, etc.

- b) *Destrezas:*

Trazado de segmentos y triángulos.

Trazado de las mediatrices de un triángulo.

Determinación del circuncentro.

Trazado de una circunferencia con un centro dado y pasando por un punto.

Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.

Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.

- *c) Estrategias generales:*

Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).

Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables.

Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.

Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, e intentos de variaciones sobre la construcción.

Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.

Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.

Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y de las relaciones encontradas.

Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

- **Posibles errores:**

- *Errores de construcción/modelización* (ejemplo: ubicar erróneamente los puntos A, B y C, por no considerar alguna de las condiciones iniciales como puede ser el paralelismo de las rectas que representan las paredes)

- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad, no identificar las condiciones que debe cumplir el punto que se busca).

- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para identificar las condiciones que cumple el punto que es necesario encontrar, relacionando las características de dicho punto con la definición y propiedades del circuncentro y de la circunferencia circunscrita).

- *Errores de medición* (ejemplo: al analizar las distancias).

- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, trazado de la circunferencia circunscrita, etc.).

- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad aplicada, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez del procedimiento propuesto o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación)

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos*: segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, triángulo, vértice, circunferencia, centro, circunferencia circunscrita, etc.

*Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, distancias, etc.

**ACTIVIDAD 5: En busca del vértice perdido**

■ **Problema N°: 5**

■ **Enunciado:** ACTIVIDAD 5: En busca del vértice perdido

Dados dos vértices de un triángulo (A y B), ¿Dónde podrá ubicarse el circuncentro O de dicho triángulo? Analiza cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:

Existe una única ubicación posible para O.

Existen infinitas ubicaciones posibles para el punto O, pero no es válida cualquier posición. puede ser cualquier punto del plano

Piensa ahora, ¿en qué lugar podrá estar ubicado el vértice C del triángulo? ¿Dónde ubicarías C para que el área del triángulo ABC sea lo mayor posible?

■ **Tipo:** problema de enunciado abierto

■ **Bloque temático:** Geometría

■ **Tiempo estimado a emplear:** 25 a 35 minutos

■ **Conocimientos matemáticos que exige:**

- a) *Conceptos y estructuras conceptuales*: segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, circunferencia circunscrita, centro, recta, triángulo, vértice, área, base, altura, etc.



- *b) Destrezas:*

Trazado de segmentos, puntos y triángulos.

Trazado de la mediatriz de un segmento.

Trazado de la circunferencia circunscrita a un triángulo, a partir de su circuncentro y dos de los vértices.

Determinación del tercer vértice de un triángulo a partir de los dos vértices y el circuncentro.

Identificación de la posición del vértice para que el área del triángulo resulte máxima.

Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.

Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.

- *c) Estrategias generales:*

Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).

Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables.

Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.

Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, e intentos de variaciones sobre la construcción.

Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.

Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.

Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y de las relaciones encontradas.

Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

- **Posibles errores:**

- *Errores de construcción/modelización* (ejemplo: ubicar erróneamente los tres puntos iniciales, A, B y O, dado que la posición inicial para O es dependiente de las posiciones de A y B)

- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad, no identificar las condiciones que debe cumplir el punto que se busca).
- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para identificar las condiciones que cumple el punto que es necesario encontrar, relacionando las características de dicho punto con la definición y propiedades del circuncentro y de las mediatrices de un triángulo).
- *Errores de medición* (ejemplo: al analizar las variaciones del área del triángulo).
- *Errores estratégicos* (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: errores en construcción inicial, no recurrir al trazado de la mediatriz o de la circunferencia circunscrita, etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad aplicada, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez del procedimiento propuesto o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos*: segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, circunferencia circunscrita, centro, recta, triángulo, vértice, área, base, altura.

*Notaciones*: notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

**ACTIVIDAD 6: Encuentra la circunferencia**

■ **Problema N°: 6**

■ **Enunciado:** ACTIVIDAD 6. Encuentra la circunferencia

Dibuja una recta  $r$  y sobre ella marca un punto  $P$ . Marca otro punto  $A$  fuera de la recta. Encuentra una circunferencia que pase por  $A$  y sea tangente a la recta  $r$  por el punto  $P$ . Explica justificadamente en tu comentario el procedimiento que has utilizado para encontrar la circunferencia.

- **Tipo:** problema de enunciado abierto
- **Bloque temático:** Geometría
- **Tiempo estimado a emplear:** 25 a 35 minutos
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - *a) Conceptos y estructuras conceptuales:* recta, segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, circunferencia circunscrita, centro, recta tangente, recta perpendicular, radio, etc.
  - *b) Destrezas:*
    - Trazado de segmentos, puntos y rectas.
    - Trazado de la mediatriz de un segmento.
    - Trazado de la recta perpendicular a una recta dada pasando por un punto.
    - Determinación del circuncentro a partir de la intersección de las rectas trazadas.
    - Trazado de la circunferencia circunscrita a un triángulo, a partir de su circuncentro y dos de los vértices.
    - Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
    - Producción de variaciones convenientes sobre la construcción realizada.
  - *c) Estrategias generales:*
    - Reconocimiento de conceptos, propiedades, regularidades y relaciones (detallados en a)).
    - Identificación de los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables.
    - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por la actividad. Justificación del proceso propuesto.
    - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, e intentos de variaciones sobre la construcción.
    - Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.
    - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.

Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y de las relaciones encontradas.

Utilización de métodos inductivos para la obtención de propiedades y relaciones geométricas en el plano.

■ **Posibles errores:**

- Errores de construcción/modelización (ejemplo: ubicar erróneamente los elementos iniciales, cambiando en casos el orden de la construcción y encontrando o bien la recta, o bien el punto A, después de la circunferencia)
- Errores de interpretación (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad, no identificar las condiciones que debe cumplir la circunferencia que se busca).
- Errores de conceptualización (ejemplo: dificultades para identificar las condiciones que cumple la circunferencia que es necesario encontrar, relacionando las características de la misma con la definición y propiedades del circuncentro, de las mediatrices de un triángulo y de la recta tangente).
- Errores estratégicos (ejemplo: imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: trazado de la mediatriz del segmento, de la perpendicular a la recta por P y determinación del punto de intersección; o bien otra secuencia de procedimientos que constituyan otra estrategia de solución).
- Errores de comunicación (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad aplicada, etc.).
- Errores de argumentación: no justificar correctamente la validez del procedimiento propuesto o de las propiedades involucradas (argumentos insuficientes, razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

*Términos:* recta, segmento, punto, distancia, mediatriz, circuncentro, circunferencia circunscrita, centro, recta tangente, recta perpendicular, radio, etc.

*Notaciones:* notación habitual para rectas, puntos, segmentos, triángulos, etc.

## 10.5. Análisis de la Segunda Secuencia de Actividades (SA2) mediante el Segundo instrumento de análisis de actividades

### *ACTIVIDAD 1: Mediatrices de un triángulo.*

- **Actividad:** Actividad 1 de SA2. Mediatrices de un triángulo
- **Etapas:** Presencial
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor presencial
- **Carácter de las interacciones:** Presencial
- **Modalidad comunicativa:** Oral y escrita
- **Interacciones y comunicación:**

Las interacciones profesor alumno están marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio- temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:

- Interacción directa, sucesiva, reversible
- Inmediatez interlocutiva
- Se comparte el contexto situacional.
- Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.
- Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.

La comunicación escrita aparece como parte de la “actividad escolar”: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar el enunciado que se plantea por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados.

La comunicación oral interviene en los procesos de recepción y producción escritos realizados por los alumnos: las dudas que se plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas progresivas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a atender a la diversidad?, se realizan oralmente

- **Preguntas más frecuentes:**

Preguntas generales (¿está bien? ¿cómo se hace?, no entiendo, ¿cómo escribo lo que ocurre?, ¿qué significa escribir la propiedad?), preguntas relacionadas con el uso de software (¿cómo trazo la mediatriz?)

- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

¿qué son las mediatrices de un triángulo? ¿cómo se trazan? ¿qué ocurre con ellas? ¿sólo en ese triángulo o en todos?

- **Diversificaciones posibles:**

“¿Podrías demostrar la propiedad que has enunciado? ? ¿Podrías explicar justificadamente porqué se cumple esa propiedad?” “Con qué otra propiedad se relaciona la propiedad enunciada?”

- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “Actividad escolar tradicional”

*ACTIVIDAD 2: El circuncentro.*

- **Actividad:** Actividad 2 de SA2. El circuncentro

- **Etapas:** Presencial

- **Interacciones principales:** Alumno Profesor presencial

- **Carácter de las interacciones:** Presencial

- **Modalidad comunicativa:** Oral y escrita

- **Interacciones y comunicación:**

Las interacciones profesor alumno están marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio- temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:

- Interacción directa, sucesiva, reversible
- Inmediatez interlocutiva
- Se comparte el contexto situacional.
- Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.
- Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.

La comunicación escrita aparece como parte de la ?actividad escolar?: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar el enunciado que se plantea por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados.

La comunicación oral interviene en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos: las dudas que se plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas progresivas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a ?atender a la diversidad?, se realizan oralmente

■ **Preguntas más frecuentes:**

Preguntas generales (¿está bien? ¿cómo se hace?, no entiendo, ¿cómo escribo lo que ocurre?), preguntas conceptuales (¿cómo se llama “éstos triángulos”? refiriéndose a los acutángulos, rectángulos u obtusángulos), preguntas relacionadas con el uso de software (¿cómo trazo las mediatrices? ¿cómo marco el circuncentro?)

■ **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

“Mueve los vértices del triángulo y observa qué ocurre”, “¿qué particularidad tienen los ángulos de los triángulos en cada caso?”, “¿cómo se clasifican los triángulos según sus ángulos?”

■ **Diversificaciones posibles:**

“¿Podrías demostrar la propiedad que has enunciado? ¿Podrías explicar justificadamente por qué se cumple esa propiedad?” “Con qué otra propiedad se relaciona la propiedad enunciada?”

■ **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “Actividad escolar tradicional”

**ACTIVIDAD 3: Circunferencia circunscrita.**

■ **Actividad:** Actividad 3 de SA2. Circunferencia circunscrita

■ **Etapas:** Presencial

■ **Interacciones principales:** Alumno Profesor presencial

■ **Carácter de las interacciones:** Presencial

- **Modalidad comunicativa:** Oral y escrita
- **Interacciones y comunicación:** Las interacciones profesor alumno están marcadas por la oralidad, dada la coincidencia espacio-temporal de emisor y receptor, y por tanto por las características de la comunicación oral:
  - Interacción directa, sucesiva, reversible
  - Inmediatez interlocutiva
  - Se comparte el contexto situacional.
  - Los roles de emisor y receptor se alternan rápidamente y a veces hasta son simultáneos.
  - Intervienen expresiones no verbales como la entonación, los gestos, los indicativos referidos al contexto situacional.

La comunicación escrita aparece como parte de la “actividad escolar”: los alumnos deben recurrir a su comprensión lectora para interpretar el enunciado que se plantea por escrito y a los procedimientos de producción escrita para describir, comentar, explicar, fundamentar los procedimientos geométricos desarrollados.

La comunicación oral interviene en los procesos de recepción y producción escrita realizados por los alumnos: las dudas que se plantean, las consultas se realizan oralmente, las aclaraciones, ayudas progresivas y/o modificaciones de la actividad inicial por parte del profesor, tendientes en casos a “atender a la diversidad”, se realizan oralmente

- **Preguntas más frecuentes:**

Preguntas generales (¿está bien? ¿cómo se hace?, no entiendo, ¿cómo escribo lo que ocurre?), preguntas conceptuales (¿cuáles eran los triángulos rectángulos?, ¿cómo se construyen?, ¿cómo se llama este lado?), preguntas relacionadas con el uso de software (¿cómo trazo las mediatrices?, ¿cómo marco el circuncentro?, ¿cómo dibujo la circunferencia?)

- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

“mueve los vértices del triángulo y observa qué ocurre con la circunferencia, ¿sigue pasando por el vértice?”, “¿qué particularidad tiene la circunferencia que has trazado?”, “mueve un vértice de manera de que el triángulo se haga rectángulo, ¿qué ocurre con el circuncentro?”



- **Diversificaciones posibles:**

“Dibuja en la pantalla dos puntos: A y O; ¿en qué lugar podrán ubicarse los vértices B y C de un triángulo ABC de circuncentro O?”

- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:** “Actividad escolar tradicional”

**ACTIVIDAD 4: Gatos y ratones .**

- **Actividad:** Actividad 4 de SA2. Gatos y ratones

- **Etapa:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri)

- **Interacciones principales:** Alumno Profesor virtual, Alumno Alumno

- **Carácter de las interacciones:**

A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico. Por tratarse de una actividad “Versión Cabri”, una vez que los alumnos acceden a su enunciado, resuelven en un archivo Cabri en el cual incorporan la comunicación sobre el proceso que han llevado a cabo y envían dicho archivo adjuntándolo a un correo electrónico.

Además, pueden utilizar este medio para solicitar ayuda o preguntar cuestiones puntuales y recibir así orientaciones por parte del profesor.

También será a través del correo la manera en que se planteen las diversificaciones propuestas para esta actividad

- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica

- **Interacciones y comunicación:**

La comunicación escrita se convierte en “la única forma de comunicación”, dejando de ser un “ejercicio escolar”. La recepción se basa en la comprensión lectora y el mensaje producido en la expresión escrita. Se diferencian claramente los momentos de producción y de recepción: contacto en diferido. No se comparte el contexto situacional aunque sí el contexto referencial (saberes consensuados): los mensajes (enunciado de la actividad, resoluciones propuestas, formulación de dudas, respuestas, etc.) deben referirse a ese contexto y especificarlo hasta el nivel que requiera su comprensión.

**Nota (ventaja):** el alumno como emisor, puede (y debe) reconsiderar su producción, organizar, corregir, modificar, etc.; siguiendo las fases de la producción escrita: conceptualización + textualización + revisión (etapas no necesariamente secuenciales). Este proceso, favorece los procesos metacognitivos y reflexivos en el alumno tanto en lo referente al trabajo sobre la actividad en sí como en lo relativo a las solicitudes de ayuda y formulación de dudas o dificultades, que ahora deben realizarse por escrito.

■ **Preguntas más frecuentes:**

“he hecho el dibujo, he puesto el punto y he medido las distancias pero no sé cómo escribirlo ¿me darías una ayuda?”, “¿cómo justifico?”, “¿cómo sé si hay más puntos?”

■ **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

“piensa en A, B y C como vértices de un triángulo e intenta hallar un punto que equidiste de los tres”, “¿podrías encontrar una circunferencia que pase por las tres ratoneras ?, ¿cómo la harías?”, “¿podrías encontrar otra circunferencia que pase por A, B y C a la vez?”, “¿qué ocurre con la distancia del centro de la circunferencia hasta cada una de ellas?”

■ **Diversificaciones posibles:**

¿cómo puedes justificar de forma general que el procedimiento que propones es correcto? ¿qué propiedad justifica tu resolución?

■ **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:**

“actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

**ACTIVIDAD 5: En busca del vértice perdido .**

- **Actividad:** Actividad 5 de SA2. En busca del vértice perdido
- **Etapas:** Etapa correo electrónico (Versión Cabri)
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor virtual, Alumno Alumno

- **Carácter de las interacciones:**

A distancia (mediada por el ordenador y TIC): Navegador de Internet y correo electrónico. Por tratarse de una actividad “Versión Cabri”, una vez que los alumnos acceden a su enunciado, resuelven en un archivo Cabri en el cual incorporan la comunicación sobre el proceso que han llevado a cabo y envían dicho archivo adjuntándolo a un correo electrónico. Además, pueden utilizar este medio para solicitar ayuda o preguntar cuestiones puntuales y recibir así orientaciones por parte del profesor. También será a través del correo la manera en que se planteen las diversificaciones propuestas para esta actividad

- **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica

- **Interacciones y comunicación:**

La comunicación escrita se convierte en “la única forma de comunicación”, con idénticas características a las planteadas para Actividad 4.

- **Preguntas más frecuentes:**

“¿cómo encontraré O si no sé donde está C?, ¿el vértice C me lo invento?”, “primero dibujo C y luego O, porque ese es el orden. . .”, “¿cómo veo lo del área?”

- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

“Recuerda qué es el circuncentro y cómo se obtiene”, “¿Qué relación existe entre el circuncentro y las mediatrices del triángulo?”, “ahora que ya sabes que O está sobre la mediatriz de AB, piensa que esta fijo y para esa posición piensa dónde podrá estar C”, “¿qué es la circunferencia circunscrita?, ¿qué características tiene?, ¿cuál es su centro?, ¿cuál es su radio?”

- **Diversificaciones posibles:**

“Analiza para qué posición de C se tiene el mayor perímetro para ABC”, “Analiza para qué posiciones de C sobre la circunferencia circunscrita, el triángulo resulta acutángulo, rectángulo y obtusángulo”

- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:**

“actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

**ACTIVIDAD 6: Encuentra la circunferencia.**

- **Actividad:** Actividad 6 de SA2. Encuentra la circunferencia
- **Etapa:** Etapa presencial
- **Interacciones principales:** Alumno Profesor presencial
- **Carácter de las interacciones:** Presencial
- **Modalidad comunicativa:** Oral y escrita
- **Interacciones y comunicación:** Las mismas características que las Actividades 1, 2 y 3
- **Preguntas más frecuentes:**

“¿Cómo hago para que quede tangente?”, “¿El triángulo pasa por P?”, “¿Cómo encuentro el circuncentro si tengo una sola mediatriz”
- **Ayudas o sugerencias más frecuentes:**

“¿Qué ocurre si mueves el centro de la circunferencia? Debes lograr que la circunferencia siga cumpliendo las condiciones por más que modifiquemos el dibujo.”, “Analiza qué relación tiene la ubicación del centro respecto a P; piensa qué ocurre cuando una recta es tangente a una circunferencia en un punto”, “Has encontrado correctamente la circunferencia, ¿podrías explicitar las propiedades que justifican tu construcción?”, “Piensa cómo debe ser las distancias entre el centro de la circunferencia que buscas y los puntos A y P respectivamente”, “Lo que dices es correcto, buscamos un centro C que debe equidistar de A y de P; ¿recuerdas cómo encontrar los puntos que cumplen esa condición?” *Más ayuda:* “si es necesario revisa la Actividad 5”
- **Diversificaciones posibles:**

“Encuentra el vértice C de manera que APC resulte un triángulo rectángulo en A”, “¿Qué particularidad tiene la medida de la hipotenusa de APC?, explica por qué.”
- **Tipo de actividad según el segundo instrumento de análisis de las actividades:**

“actividad adaptable al resolutor” (se adapta a cada alumno mediante las ayudas progresivas y diversificaciones que hacen que cada alumno recorra el itinerario de resolución más conveniente)

## 10.6. Análisis de la Segunda Secuencia de Actividades (SA2) mediante el Tercer instrumento de análisis de actividades

### *ACTIVIDAD 1: Mediatrices de un triángulo.*

- **Enunciado:** Dibuja un triángulo ABC y traza las mediatrices correspondientes a los tres lados, ¿en cuántos puntos se cortan? (puedes realizar variaciones sobre el triángulo para ver qué ocurre. Enuncia la propiedad correspondiente.)
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**
  - Contextos familiares.
  - Conocimientos ya practicados.
  - Aplicación de algoritmos estándar.
  - Realización de operaciones sencillas
- **Categoría:** Reproducción y procedimientos rutinarios
- **Clase de actividad:** Primera clase

### *ACTIVIDAD 2: El circuncentro.*

- **Enunciado:** Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llamaremos circuncentro O al punto de intersección entre ellas. ¿El punto de intersección de las mediatrices pertenece siempre al interior del triángulo? ¿Puede estar fuera del triángulo? ¿Puede pertenecer a un lado?
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**
  - Contextos familiares.
  - Conocimientos ya practicados.
  - Aplicación de algoritmos estándar.
  - Realización de operaciones sencillas.
- **Categoría:** Reproducción y procedimientos rutinarios
- **Clase de actividad:** Primera clase

**ACTIVIDAD 3: Circunferencia circunscrita.**

- **Enunciado:** Dibuja un triángulo ABC y traza sus mediatrices. Llama O al circuncentro. Traza la circunferencia de centro O y que pase por un vértice del triángulo. ¿Qué ocurre? Explica porqué. La circunferencia que has trazado es la circunferencia circunscrita al triángulo. ¿Dónde se encuentra el circuncentro de un triángulo rectángulo? Justifica la siguiente afirmación: “Dado un triángulo cualquiera, siempre es posible trazar una circunferencia que pase por sus tres vértices”
  - Contextos menos familiares.
  - Interpretar y explicar.
  - Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios.
- **Categoría:** Conexiones e integración para resolver problemas estandarizados
- **Clase de actividad:** Segunda clase

**ACTIVIDAD 4: Gatos y ratones.**

- **Enunciado:** El gato Tom, espera que el ratón Jerry salga por alguna de las tres puertas de su ratonera (puertas A, B o C), cercanas al final de un pasillo. Una de las puertas está en una de las paredes del pasillo y la otras dos en la otra, como indica la figura. Sabiendo que Jerry puede salir con igual probabilidad de cada una de las puertas, Tom decide ubicarse en un punto que esté a igual distancia de las tres ¿existe tal punto? ¿hay varios puntos que cumplen esa condición, hay uno solo o no existe ninguno? Si existe tal punto, ¿cómo ayudarías a Tom a encontrarlo? Justifica tus respuestas.
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**
  - Tareas que requieren comprensión y reflexión.
  - Creatividad.
  - Ejemplificación y uso de conceptos.
  - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
  - Generalizar y justificar resultados obtenidos.

- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.
- **Clase de actividad:** Tercera clase

**ACTIVIDAD 5: En busca del vértice perdido.**

- **Enunciado:** Dados dos vértices de un triángulo (A y B), ¿Dónde podrá ubicarse el circuncentro O de dicho triángulo? Analiza cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas:
  - Existe una única ubicación posible para O.
  - Existen infinitas ubicaciones posibles para el punto O, pero no es válida cualquier posición.
  - O puede ser cualquier punto del plano. *Piensa ahora, ¿en qué lugar podrá estar ubicado el vértice C del triángulo? ¿Dónde ubicarías C para que el área del triángulo ABC sea lo mayor posible?.*
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**
  - Tareas que requieren comprensión y reflexión.
  - Creatividad.
  - Ejemplificación y uso de conceptos.
  - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
  - Generalizar y justificar resultados obtenidos.
- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.
- **Clase de actividad:** Tercera clase

**ACTIVIDAD 6: Encuentra la circunferencia.**

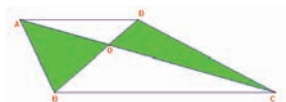
- **Enunciado:** Dibuja una recta  $r$  y sobre ella marca un punto P. Marca otro punto A fuera de la recta. Encuentra una circunferencia que pase por A y sea tangente a la recta  $r$  por el punto P. Explica justificadamente en tu comentario el procedimiento que has utilizado para encontrar la circunferencia.
- **Indicadores de la complejidad de la tarea**

- Tareas que requieren comprensión y reflexión.
  - Creatividad.
  - Ejemplificación y uso de conceptos.
  - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
  - Generalizar y justificar resultados obtenidos.
- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales.
  - **Clase de actividad:** Tercera clase

### 10.7. Análisis de la actividad propuesta en el foro electrónico (AFE) mediante el Primer instrumento de análisis de actividades

**ACTIVIDAD AFE : Relación en el trapecio.**

- **Enunciado:** En un trapecio cualquiera  $ABCD$ , de bases  $AD$  y  $BC$ , donde  $E$  es la intersección de la diagonales (ver figura) ¿Existe alguna relación los triángulos  $AOB$  y  $DOC$ ? Razona y justifica tu respuesta
- **Tipo:** problema de enunciado abierto.



- **Tiempo estimado a emplear:** 2 horas
- **Conocimientos matemáticos que exige:**
  - a). *Conceptos y estructuras conceptuales:*
    - El trapecio como cuadrilátero. Su definición, sus elementos y propiedades.
    - Área de un triángulo. Cálculo y medida.
    - Base y altura de un triángulo.
    - Triángulos distintos con áreas iguales.
    - Descomposición y composición de áreas.



- Relación de paralelismo, perpendicularidad e incidencia.
- Reconocimiento, uso y notación de algunos elementos geométricos en el plano: puntos, rectas, segmentos.
- Punto de intersección.
- *b). Destrezas:*
  - Trazado de rectas paralelas o perpendiculares e incidentes y de rectas determinadas por dos puntos.
  - Reconocimiento de los elementos necesarios para definir cada operación.
  - Construcción de un trapecio.
  - Medición de longitudes.
  - Medición de áreas.
  - Identificación de la base y la altura de un triángulo.
  - Reconocimiento de la aparición de figuras con igual área.
  - Descomposición y composición de áreas de triángulos.
- *c) Estrategias generales:*
  - Elección de las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas por el problema.
  - Reducción del problema geométrico planteado a otros más sencillos para facilitar su comprensión y resolución (por ejemplo: analizar qué ocurre con algunos trapecios especiales).
  - Formulación y comprobación de conjeturas respecto a propiedades y relaciones geométricas (en este caso: demostración, a través de la descomposición de las áreas a comparar, de la igualdad de las mismas).
  - Validación de la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
  - Identificación y diferenciación de las propiedades y relaciones que deben permanecer invariantes y cuales pueden variar.
  - Identificación de la dependencia o independencia existente entre objetos.
  - Aplicación correcta de las propiedades, relaciones y procesos geométricos.
  - Descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.

- Empleo de la terminología y notación adecuadas para describir, a través del lenguaje verbal el proceso de resolución del problema geométrico planteado.

■ **Conocimientos matemáticos que exige:**

- *Errores de modelización* (ejemplo: dificultades al reproducir las condiciones del enunciado en un modelo geométrico apropiado, que en este caso no es más que el propuesto para la resolución de la actividad, pero aun así pueden surgir errores).
- *Errores de construcción* (por ejemplo que se trabaje con un caso particular de trapecio y el problema pierda generalidad)
- *Errores de medición* (ejemplo: al determinar las áreas de los triángulos).
- *Errores de interpretación* (ejemplo: no interpretar o interpretar parcialmente el enunciado de la actividad).
- *Errores de conceptualización* (ejemplo: dificultades para determinar qué áreas -de qué triángulos- comparar, etc.).
- *Errores estratégicos* (imposibilidad de definir las estrategias para el análisis y la solución del problema: construcción, medición, variación del dibujo generado, dificultades para plantear la descomposición de áreas, con sus correspondientes conservaciones y propiedades aditivas etc.).
- *Errores de comunicación* (ejemplo: fallos en la expresión en lenguaje natural del procedimiento realizado, de la propiedad encontrada, de la justificación de tal relación, etc.).
- *Errores de argumentación*: no justificar correctamente la validez de la construcción propuesta o de la propiedades involucradas (dar argumentos insuficientes o inconsistentes, realizar razonamiento circular: utilización de lo que se quiere justificar como razón para dicha justificación, dar respuestas provenientes de simples mediciones o de la visualización).

■ **Conocimientos lingüísticos y semánticos:**

- *Términos*: trapecio, lado, segmento, diagonal, intersección, vértice, área, triángulo.
- *Notaciones*: notación habitual para puntos, segmentos, polígonos, diagonales, áreas.

## 10.8. Análisis de la actividad propuesta en el foro electrónico (AFE) mediante el Segundo instrumento de análisis de actividades

1. **Etapa:** no presencial (foro electrónico)
2. **Interacciones principales:** Alumno alumno; Alumno Profesor virtual
3. **Carácter de la comunicación/interacción:** A distancia (mediada por TIC): foro electrónico
4. **Modalidad comunicativa:** Escrita asincrónica
5. **Interacciones y comunicación:** En el foro electrónico se da una forma de interacción “mixta”, en el sentido de que si bien la modalidad es escrita, comparte algunas características con la comunicación oral:
  - Se produce en tiempo casi real
  - Se pueden negociar los significados de manera más inmediata.
6. **Roles que genera:** La interacción entre pares, hace a los alumnos posicionarse críticamente frente a los intervenciones de los demás: de un par sí es esperable un mensaje erróneo, la posibilidad de que se equivoque, de disentir, etc.

Se produce un análisis crítico de los mensajes y la corrección de los mismos en caso de no coincidir<sup>3</sup>:

### **Ejemplos:**

#### **Ejemplo 1.**

Enviado por Sandra en fecha Junio 07, 2004 a las 08:45:45:

*: los triangulos verdes son iguales porque restandoles a los dos triangulos grandes que son iguales el blanco se quedan dos mas pequeños con el mismo area*

Enviado por Fernando en fecha Junio 07, 2004 a las 08:55:33:

*: :Los triángulos no son iguales,pero si lo son sus áreas.*

---

<sup>3</sup>En todos los casos se ha respetado la ortografía y la redacción de los originales.

**Ejemplo 2.**

Enviado por Saúl en fecha Junio 03, 2004 a las 13:09:28:

*: las areas de los tiangulos grandes ABC y BCD son iguale porque tienen la misma base y la altura es la misma*

Enviado por Sandra en fecha Junio 03, 2004 a las 13:14:17:

*: te has olvidado decir que las alturas son iguales porque las bases son paralelas y cada vértice de la altura esta en un extremo de la base menor.y ahora que pasa?*

7. **Tipo de actividad:** problema abierto (en este caso, a diferencia de la “etapa correo electrónico”, casi siempre son las interacciones entre pares las que funcionan como “ayudas progresivas” y/o diversifican el itinerario por el que se discurre)

No obstante, el profesor, tiene la posibilidad de intervenir en el foro; con lo que la actividad tiene un formato susceptible de intervenciones docentes que se irán graduando según el proceso y tendrán diferentes funciones, entre otras:

- proponer la actividad;
- proponer ayudas (“Recordad la fórmula para hallar el área del triángulo.”);
- plantear nuevas cuestiones e interrogantes;
- institucionalizar la solución (en este caso la institucionalización ha sido realizada por la última intervención en el foro de uno de los alumnos y luego por parte del profesor presencial).

8. **Tipos de interacciones producidas:**

A través del foro se generan diferentes tipos de interacciones. Los alumnos preguntan, plantean dudas, aportan respuestas a las preguntas formuladas por otros alumnos, asumen una posición crítica frente a las intervenciones de los compañeros, en algunos casos refutando o proponiendo modificaciones o correcciones a la sugerencia del otro y en otros aceptándola e incorporándola al proceso propio de resolución de la actividad. De esta manera, a través del trabajo colaborativo, se llega a la solución de la actividad.

A través del análisis de las intervenciones de los alumnos que dan lugar a la resolución de esta actividad, encontramos distintos tipos de interacciones que presentamos y ejemplificamos a continuación:

**Ejemplo 1:**

***Comunicación de avance y solicitud de ayuda:***

Enviado por Álvaro en fecha Mayo 31, 2004 a las 13:28:45:

*: he medido las areas de los triángulos ABC y BCD y tambien miden lo mismo a alguien se le ocurre por que???*

***Ayuda sugerida por el profesor:***

Enviado por JOSÉ FCO. en fecha Mayo 31, 2004 a las 22:22:34:

*: Recordad la fórmula para hallar el área del triángulo.*

***Nuevo avance y respuesta a la intervención de Álvaro:***

Enviado por Saúl en fecha Junio 03, 2004 a las 13:09:28:

*: las areas de los tiangulos grandes ABC y BCD son iguale porque tienen la misma base y la altura es la misma*

**Ejemplo 2:**

***Comunicación de nueva idea:***

Enviado por Saúl en fecha Junio 03, 2004 a las 13:09:28:

*: las areas de los tiangulos grandes ABC y BCD son iguale porque tienen la misma base y la altura es la misma*

***Respuesta crítica a la intervención anterior, propuesta de avance y solicitud de ayuda:***

Enviado por Sandra en fecha Junio 03, 2004 a las 13:14:17:

*: te has olvidado decir que las alturas son iguales porque las bases son paralelas y cada vértice de la altura esta en un extremo de la base menor.y ahora que pasa?*

***Respuesta a la intervención de Sandra:***

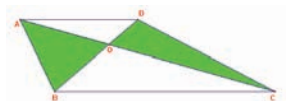
Enviado por BOBBY en fecha Junio 04, 2004 a las 13:24:33:

*: Las areas de los TRIángulos ABE Y DCE don iguales por que el ABC esta formado por los triángulos ABE Y BCE Y el triangulo BCD esta formado por los triangulos BCE Y DCE.*

## 10.9. Análisis de la actividad propuesta en el foro electrónico (AFE) mediante el Tercer instrumento de análisis de actividades

### *Actividad 1. Investigando sobre trapecios*

- **Enunciado:** En un trapecio cualquiera  $ABCD$ , de bases  $AD$  y  $BC$ , donde  $E$  es la intersección de la diagonales (ver figura) ¿Existe alguna relación los triángulos  $AOB$  y  $DOC$ ? Razona y justifica tu respuesta.



- **Indicadores de la complejidad de la tarea:**
  - Tareas que requieren comprensión y reflexión.
  - Creatividad.
  - Ejemplificación y uso de conceptos.
  - Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos.
  - Generalizar y justificar resultados obtenidos
- **Categoría:** Razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales
- **Clase de actividad:** Tercera clase

## Capítulo 11

# Anexo IV: Descripción de Instituto, del curso y de los alumnos

En este anexo se describe de forma breve las características del Instituto, del curso y de los alumnos.

### 11.1. Descripción del Instituto

El Instituto de Enseñanza Secundaria en el que se realiza esta experiencia, está ubicado en Logroño, muy cerca del centro. En él se imparten, además de Educación Secundaria Obligatoria, dos modalidades de bachillerato (Humanidades y Ciencias Sociales y Tecnológico) y dos ciclos formativos de grado superior (Desarrollo y aplicación de proyectos de construcción y Educación Infantil); así como también Formación Profesional.

Se trata de un Instituto bastante nuevo, que inició su funcionamiento en el curso 1993/94, en una zona de recientes cambios urbanísticos. Si bien se trata de un barrio en el que se observan gran cantidad de viviendas de nueva construcción (adosados y pisos); coexisten con ellas algunas edificaciones antiguas ocupadas en general por familias inmigrantes y gitanas.

Esa diversidad se traslada a las aulas del IES, en la que existe una gran cantidad de alumnos extranjeros (mayormente marroquíes, rumanos y latinoamericanos), y muchos de familias gitanas (que en muchos casos asisten

a clase ante la imposición de los servicios sociales). Como se reconoce en el propio Proyecto Educativo, esto hace que las características socioeconómicas y culturales de los alumnos sean muy diversas; al igual que las expectativas de futuro, los intereses, etc: mientras algunos asisten a clase obligados por los servicios sociales y lo hacen con total discontinuidad, y otros lo hacen con la única expectativa de esperar a cumplir los 16 años y poder empezar a trabajar, algunos pocos reconocen en la escolaridad aportes a su formación y a sus posibilidades futuras y manifiestan su intención de continuar estudiando después de finalizar la ESO.

En cuanto al profesorado del Instituto, el mismo se caracteriza por su alto nivel de compromiso con el mismo y su comunidad educativa. Se involucran en proyectos escolares y extraescolares; se comprometen con las propuestas, generan gran diversidad de iniciativas; y realizan importantes tareas de contención, integración y atención a la diversidad.

## 11.2. Descripción del curso en el que se ha realizado la experiencia

Como hemos dicho anteriormente, el entorno de aprendizaje diseñado se ha implementado en el marco de la materia optativa “*Taller de Matemáticas*” que, destinada a alumnos de ESO de un Instituto de Logroño, se imparte desde 1999. Dicho ámbito, se ha constituido desde entonces en un espacio para la innovación pedagógica y la investigación acción en Didáctica de la Matemática, produciéndose una retroalimentación entre las innovaciones producidas y las investigaciones realizadas.

En particular, en esta investigación, se han tenido en cuenta para el análisis, el grupo de alumnos que ha cursado el Taller durante el curso 2004/2005.

Dicho grupo, formado por 17 alumnos; 6 alumnas y 11 alumnos. De ese total, 11 son españoles y 6 extranjeros (3 marroquíes, un latinoamericano, una china y un rumano). De los 11 españoles, tres son de familias gitanas. Asimismo, 6 de los alumnos son repetidores del curso actual; es decir que están cursando 3º de ESO por segunda vez.

Hemos solicitado a varios profesores que clasifiquen a los alumnos en tres clases definidas según el rendimiento de los mismos; clases que hemos definido como: “alumnos de rendimiento alto”, “alumnos de rendimiento



medio” y “alumnos de rendimiento bajo”. Y así hemos obtenido 3 categorías de alumnos formadas por:

- alumnos de rendimiento alto: tres alumnos
- alumnos de rendimiento medio: cinco alumnos
- alumnos de rendimiento bajo: nueve alumnos

Si bien hemos observado, y analizado el desenvolvimiento en clase y en particular las resoluciones propuestas para las actividades planteadas de todos los alumnos; hemos seleccionado un alumno de cada grupo para realizar un estudio exhaustivo del proceso de Aprendizaje de la Geometría y de Desarrollo de la Competencia Comunicativa.



## Capítulo 12

# Anexo V: Enunciados de las actividades analizadas

Se presentan los enunciados de las actividades cuyas resoluciones se han analizado

### 12.1. Enunciados de las actividades cuyas resoluciones se han analizado

Los siguientes son los enunciados iniciales de las actividades cuyas resoluciones han sido estudiadas a través de los instrumentos propuestos para el análisis del desarrollo de la Competencia Comunicativa (CC) y del Aprendizaje de la Geometría (AG) de los alumnos.

Tres de ellas corresponden a las etapa presencial (actividades que denotamos con AEP1, AEP2 y AEP3, las mismas son resueltas por los alumnos en ese orden aunque no son correlativas dado que entre ellas se resuelven otras) y las otras seis corresponden a la etapa correo electrónico (actividades que denotamos con ACE1, ACE2, ACE3, ACE4, ACE5 y ACE6).

Para cada una de ellas, indicamos de qué tipo resulta la actividad, según su enunciado inicial:

- Las actividades de *Primera clase* (Clase 1) consisten en ejercicios algorítmicos: su resolución requiere de la aplicación de algoritmos, es decir de una secuencia de etapas aplicadas en cierto orden a ciertos datos,

para obtener un resultado buscado. Involucran por tanto, tareas de reproducción y procedimientos rutinarios.

- Las actividades de *Segunda clase* (Clase 2) consisten en problemas de aplicación: su resolución implica la aplicación de algoritmos y procedimientos pero requieren además, usar simbólicamente el problema y manipular los símbolos aplicando varios algoritmos; el resolutor debe tomar decisiones, pero las mismas pueden considerarse mínimas frente al grado con que las toma al resolver un problema abierto. Para resolverlas es necesario entonces, realizar las conexiones y la integración de conceptos y procedimientos.
- Las actividades de *Tercera clase* (Clase 3) consisten en problemas de enunciado abierto: sus enunciados no contienen instrucciones para su resolución, ni tienen explícitamente una única respuesta ya que ésta dependerá de las decisiones que tome el resolutor. Su resolución involucra tareas de reflexión, en las que serán fundamentales el razonamiento, la argumentación, la intuición y la generalización.

Cabe recordar que una actividad cuyo enunciado inicial es de Clase  $n$ , podrá convertirse en otra de Clase  $n-1$  y posteriormente, si fuera necesario y posible, en otra de Clase  $n-2$  a través de las ayudas ofrecidas por el tutor; posibilitando así que una actividad resulte de diferentes clase para diferentes alumnos, según el “itinerario de resolución” recorrido por cada uno de ellos.

Las actividades cuyas respuestas y/o resoluciones se analizarán son las siguientes:

**Actividad AEP1:** *Construcción de un cuadrado a partir de un lado* (Clase 2)

Dibuja un segmento AB. Con lo que ya sabes sobre este programa de Geometría, intenta idear un procedimiento para construir un cuadrado de lado AB. Escribe el procedimiento utilizado en un comentario y explica porqué es un procedimiento correcto.

**Actividad AEP2:** *Trazado de mediatriz sin opción mediatriz* (Clase 2)

Construye un segmento de extremos A y B. Traza la mediatriz del segmento sin utilizar las opciones Mediatriz ni punto medio y llama  $r$  a dicha recta. Explica mediante un comentario en el dibujo el procedimiento empleado justificando tu construcción. Oculta todos los trazos auxiliares de forma que en la pantalla sólo se vea el segmento y su mediatriz. Una vez obtenida la mediatriz dibuja el punto

medio de AB y llámalo P. Marca AB con trazo grueso y la mediatriz en color rojo y trazo discontinuo.

**Actividad AEP3:** Encuentra la circunferencia (Clase 3)

Dibuja una recta  $r$  y sobre ella marca un punto P Marca otro punto A fuera de la recta. Encuentra una circunferencia que pase por A y sea tangente a la recta  $r$  por el punto P. Explica justificadamente en tu comentario el procedimiento que has utilizado para encontrar la circunferencia.

**Actividad ACE1:** Presentación profesor virtual- alumno y propuesta de trabajo

En el primer correo electrónico recibido por los alumnos, el profesor virtual realiza su presentación, invita a cada alumno a hacer lo propio y expone la nueva manera de trabajo para esta etapa (etapa correo electrónico).

De José Francisco <jose-francisco@dmc.unirioja.es>Enviado Martes, Marzo 1, 2005 7:37 pm A: ALUMNOS Asunto: BIENVENIDOS AL PROYECTO CLAV O

Hola a todos:

*Bienvenidos al Proyecto Clavo. Mi nombre es José Fco. Martín Olarte y soy un profesor de vuestro Instituto, aunque en este momento estoy en otro destino, con el que a partir de ahora tendréis mucha relación a través del medio electrónico.*

*Nuestro objetivo es que, además de conocernos y de compartir esfuerzos, aprendáis a manejar los medios electrónicos, a colaborar a través de ellos con vuestros compañeros y conmigo para que, con los esfuerzos de todos, surja la chispa que hace que una actividad sea fácil porque nos divertimos al intentar resolverla.*

*Para empezar, primero os pido que me enviéis un correo de respuesta en el que me contéis un poco qué esperáis de este Proyecto y, sobre todo, que me digáis algo de vuestras aficiones, porque tenemos que empezar a conocernos.*

*Por mi parte os diré que tengo dos horas mayores que vosotros (de 23 y 27 años) y que me gusta la informática, el cine y la música que no sea muy chillona, también tengo obligación de pasear bastante cada día para estar un poco en forma. Por otra parte me gusta mucho viajar, aunque se tienen pocas oportunidades de hacerlo. Desde hace poco, estoy empezando a aficionarme a conocer cómo va la liga de fútbol, nunca es tarde. Espero que, poco a poco nos vayamos conociendo más a fondo, como ha ocurrido otros años.*

*Para empezar no tenéis más que picar con el ratón en el enlace que hay al final del escrito. Al hacerlo OS PEDIRÁ EL NOMBRE DE USUARIO Y LA CONTRASEÑA dos veces son los mismos que los de la cuenta de correo y se abrirá una ventana del navegador con la primera actividad del correo en la que hay una figura que se mueve. En ella os pido que hagáis con Cabri una construcción, que expliquéis cómo la habéis construido y que razonéis por qué hay que hacerla así.*

*Todas las explicaciones me las hacéis en un COMENTARIO EN LA PANTALLA en el archivo de Cabri y me lo enviáis por correo. Yo procuraré corregirlo y contestaros lo antes posible, haciendo indicaciones y comentarios a la construcción y a la forma de explicarlas y, a veces, os la mandaré repetir. No importa que al principio cueste un poco, lo que cuesta esfuerzo es lo que tiene valor.*

*En sucesivos correos os enviaré más actividades y, después, os diremos la manera de entrar en la página web del Proyecto.*

*Espero vuestros correos.*

*Un saludo a todos.*

*José Fco.*

**Actividad ACE2:** *Circunferencia tangente*(Clase 3)

Dadas las semirrectas AB y AC y el segmento BC, construye una circunferencia que sea a la vez tangente al segmento CB y a las semirrectas AC y AB. Estará bien construida cuando al mover los puntos A, B y C la circunferencia siga siendo tangente. Debes explicar cómo las has construido y razonar por qué la has hecho así.

**Actividad ACE3:** *En busca de los centros perdidos* (Clase 3)

En la figura se muestran 2 circunferencias secantes. Los centros de ambas han desaparecido. Investiga un procedimiento para hallarlos y descríbelo. Razona el porqué de este procedimiento

**Actividad ACE4:** *Estudiando un cometa* (Clase 3)

Un cometa describe una órbita alrededor del Sol como la de la figura. En el mismo plano de la órbita, hay dos satélites artificiales fijos A y B encargados de estudiar al cometa. En cada momento el cometa es estudiado por el satélite que está más próximo a él. ¿Podrías decirnos en qué zona de la órbita el satélite A estudia al cometa y en qué zona lo hace el satélite B? Razona tus respuestas.

**Actividad ACE5:** *De tres círculos* (Clase 3)

Supongamos dos círculos concéntricos. Trazamos una tangente al círculo interior, que naturalmente cortará al exterior en dos puntos A y B. Construimos el círculo que tiene como diámetro AB ¿Puedes encontrar alguna relación entre los tres círculos de la figura? Expresa el resultado correctamente.

**Actividad ACE6:** *Un cuadrilátero muy particular* (Clase 3)

Por un punto del lado desigual BC de un triángulo isósceles ABC traza paralelas a los lados iguales. Se forma así un cuadrilátero PMAN. Toma medidas en el cuadrilátero formado y mueve el punto P. ¿Qué puedes decir del perímetro de PMAN cuando se mueve el punto P? Expresa en forma de teorema lo que

observes sobre el perímetro y muestra un razonamiento que lo demuestre ¿En qué posición del punto P es máxima el área del cuadrilátero? ¿Cuánto vale esa área máxima? Muestra tu razonamiento.





## Capítulo 13

# Anexo VI: Itinerarios de resolución recorridos

Se presentan en este Anexo los itinerarios de resolución recorridos por cada uno de los tres alumnos analizados en la resolución de las nueve actividades.

Los tres primeros corresponden a Javier, a continuación los de Blas y seguidamente los de Stefan.

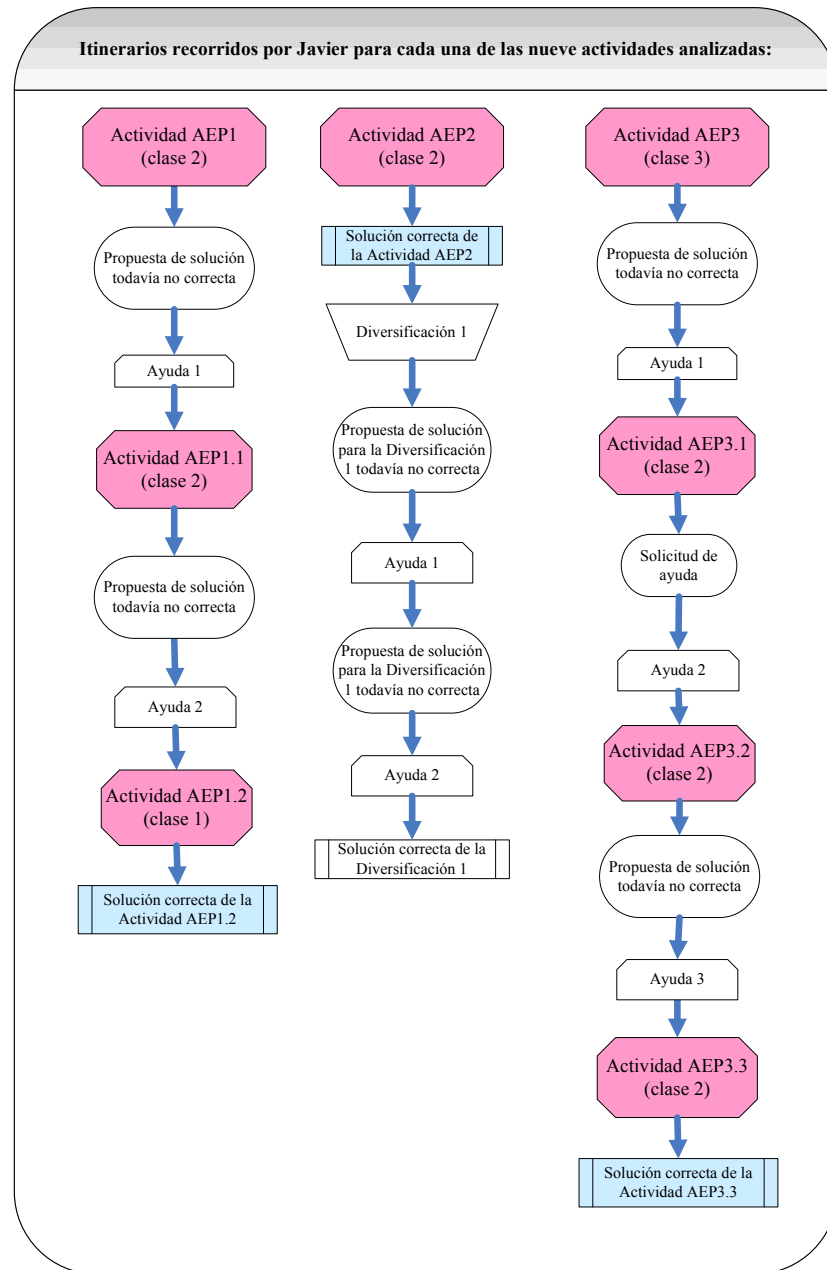


Figura 13.1: Itinerario 1 de Javier

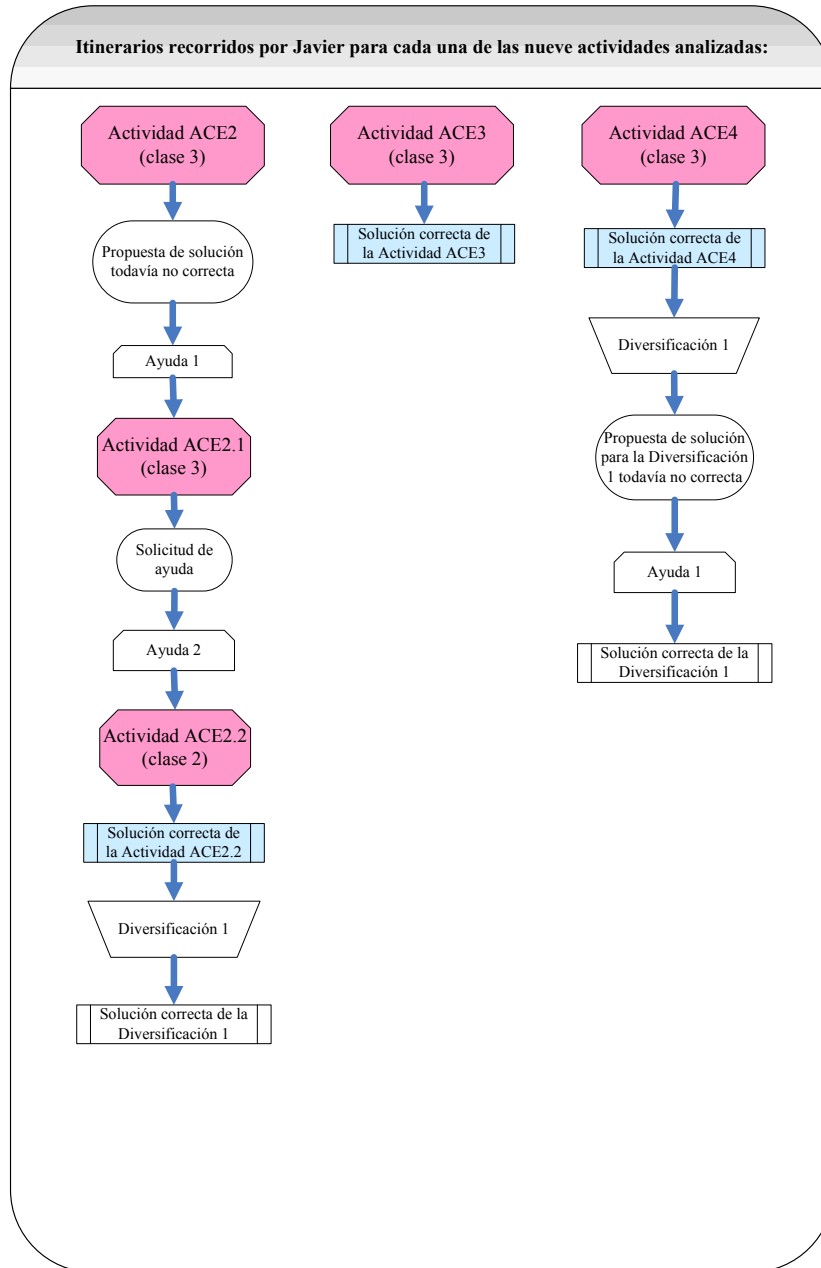


Figura 13.2: Itinerario 2 de Javier

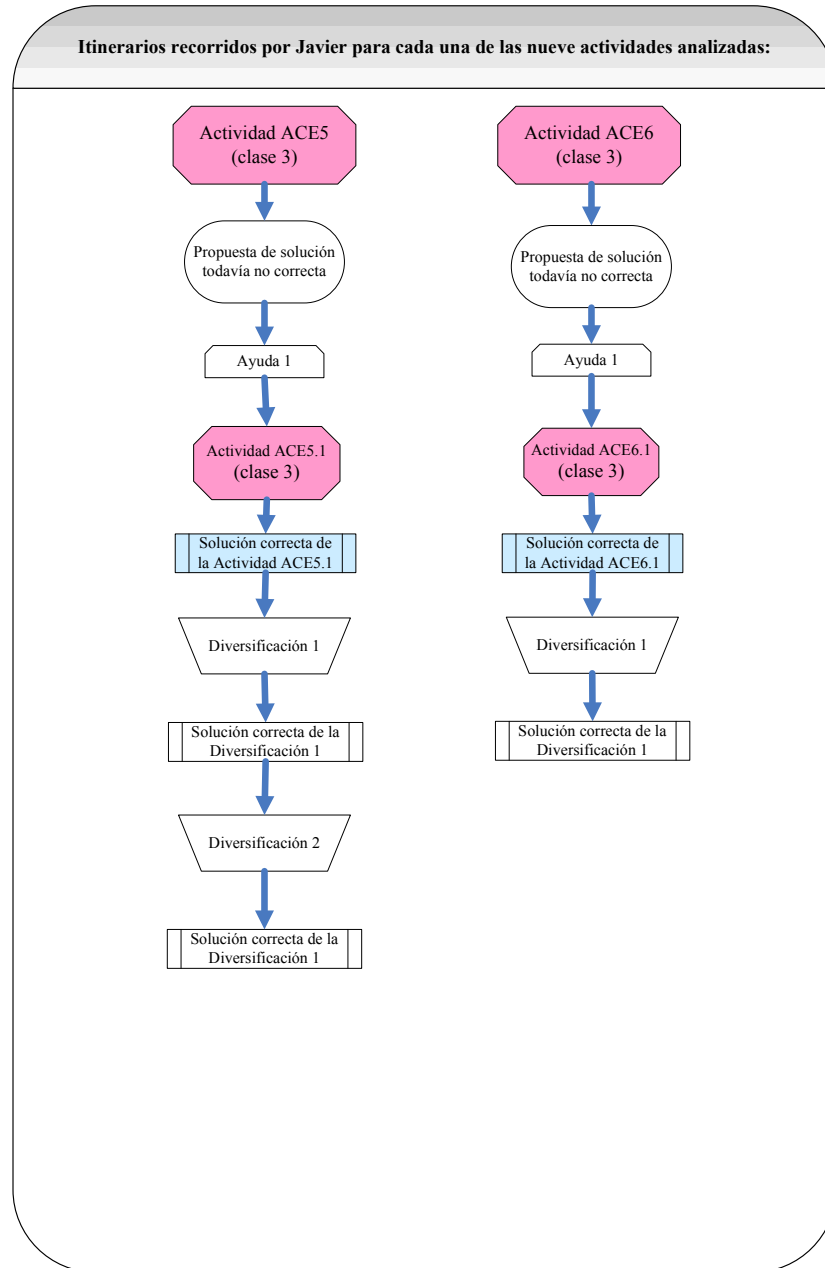


Figura 13.3: Itinerario 3 de Javier

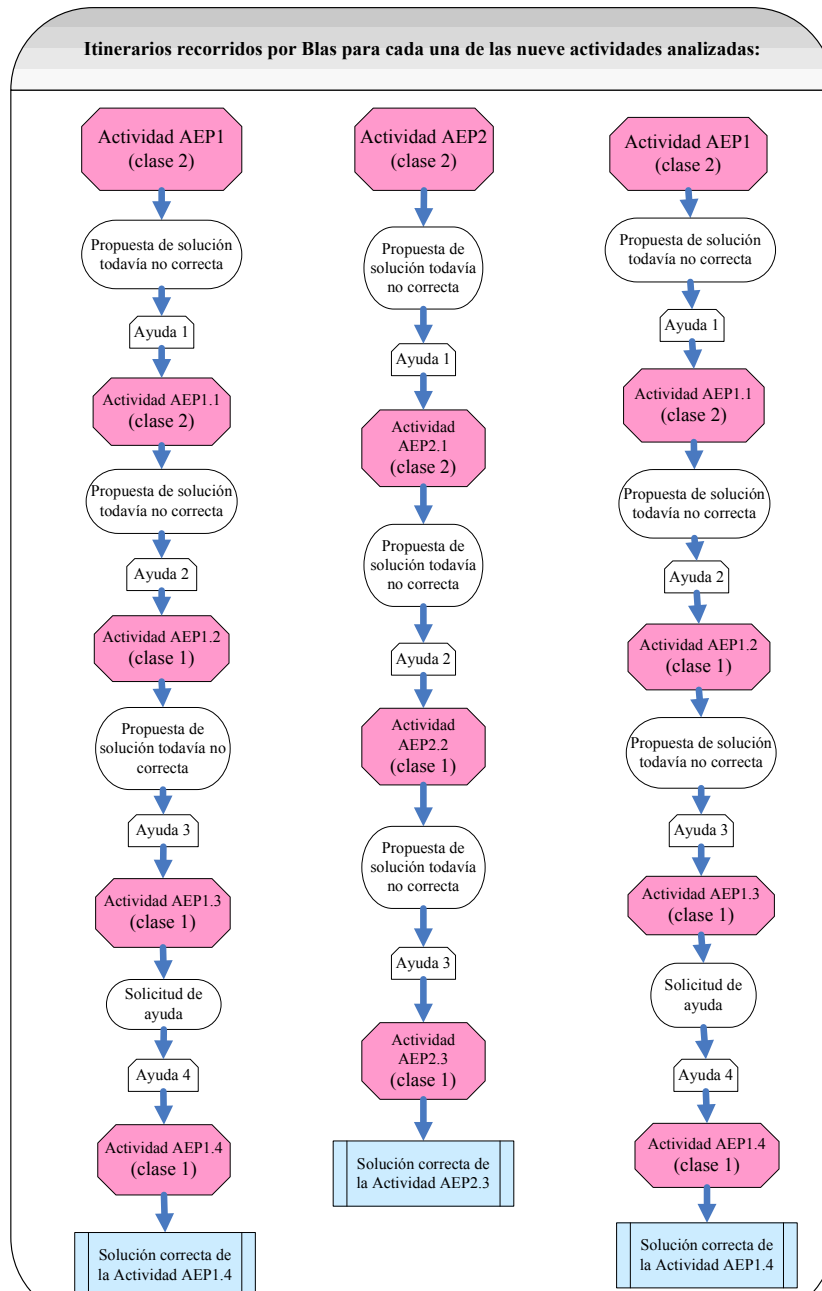


Figura 13.4: Itinerario 1 de Blas

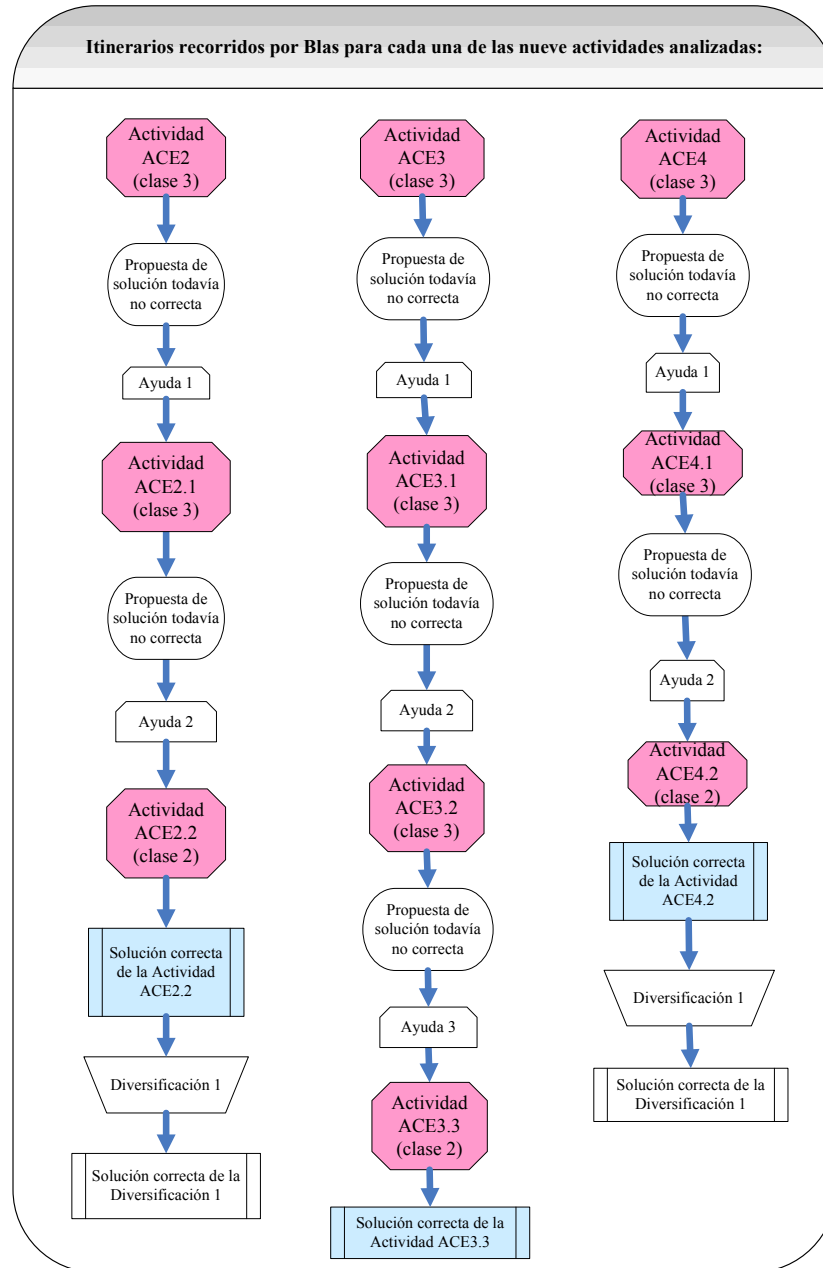


Figura 13.5: Itinerario 2 de Blas

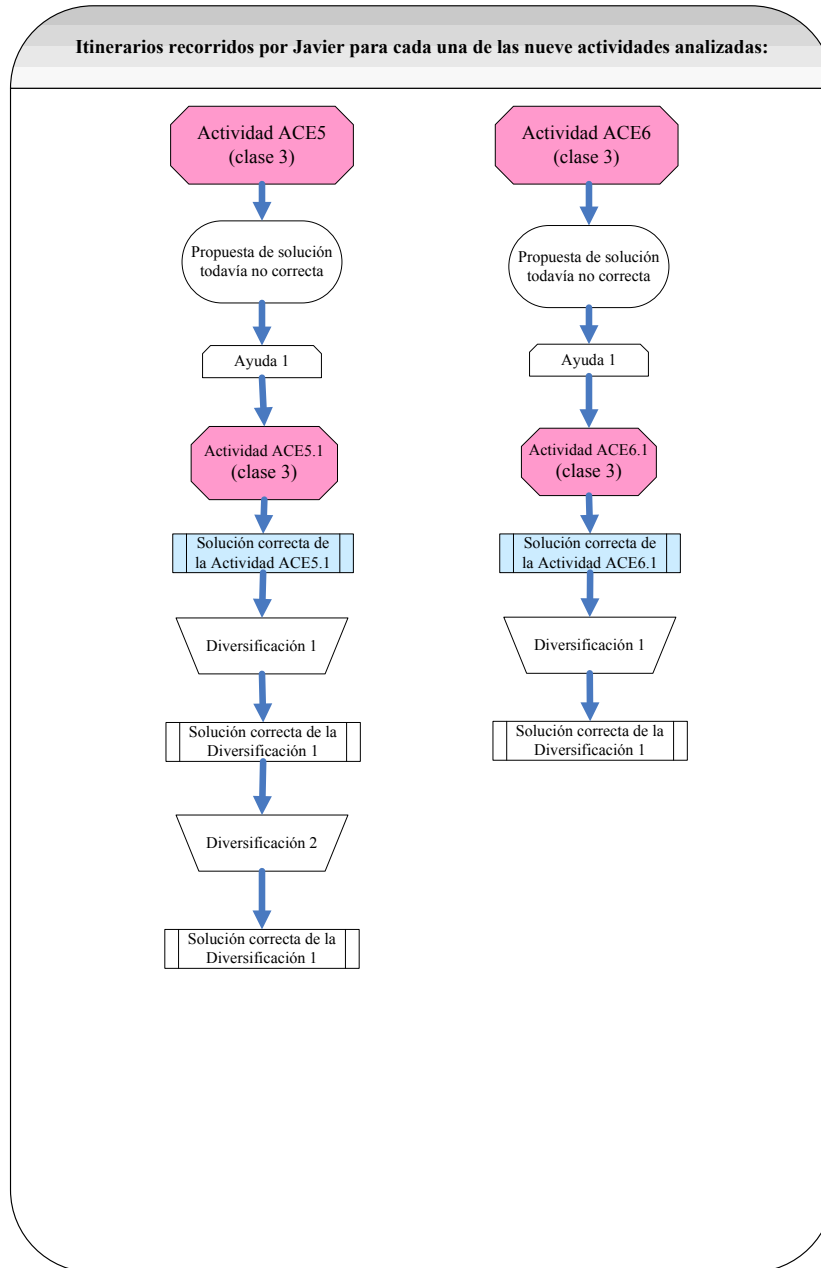


Figura 13.6: Itinerario 3 de Blas

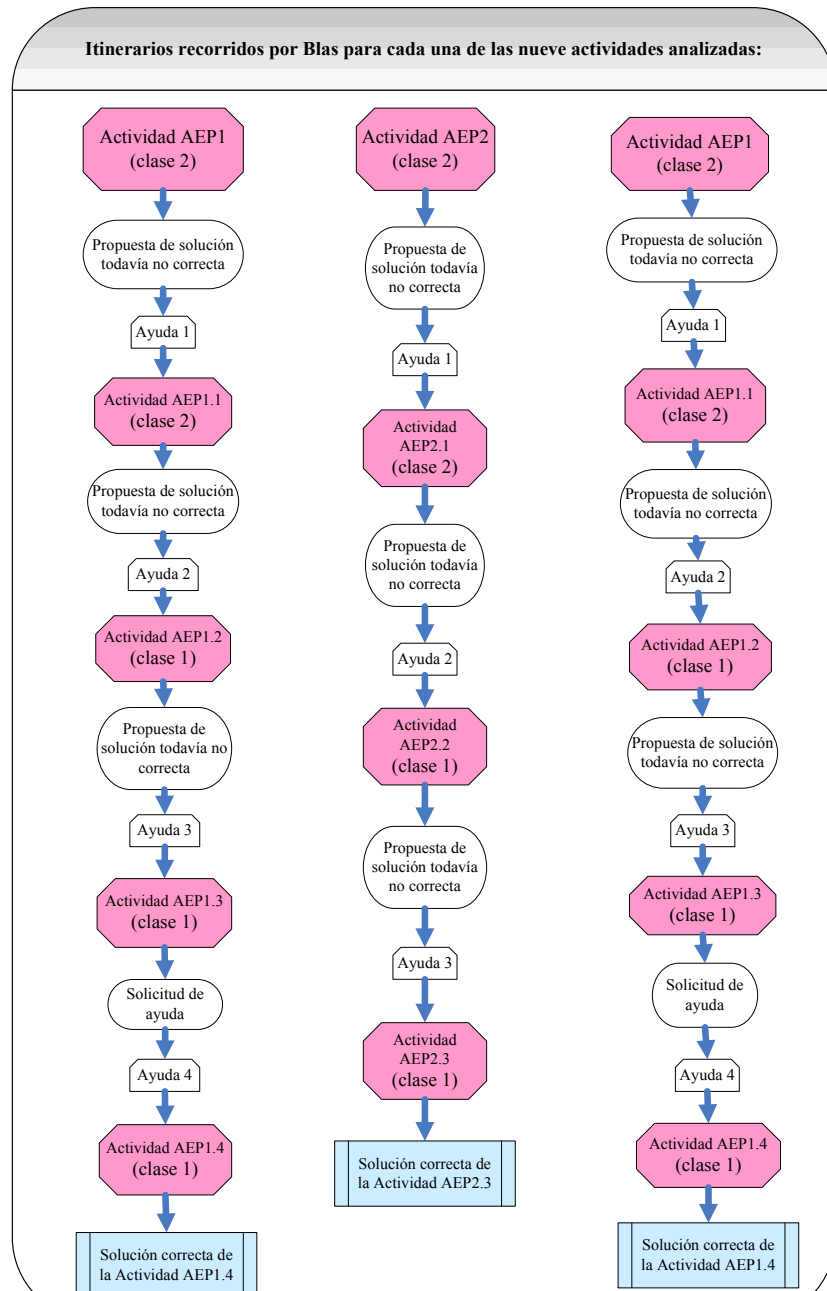


Figura 13.7: Itinerario 1 de Stefan



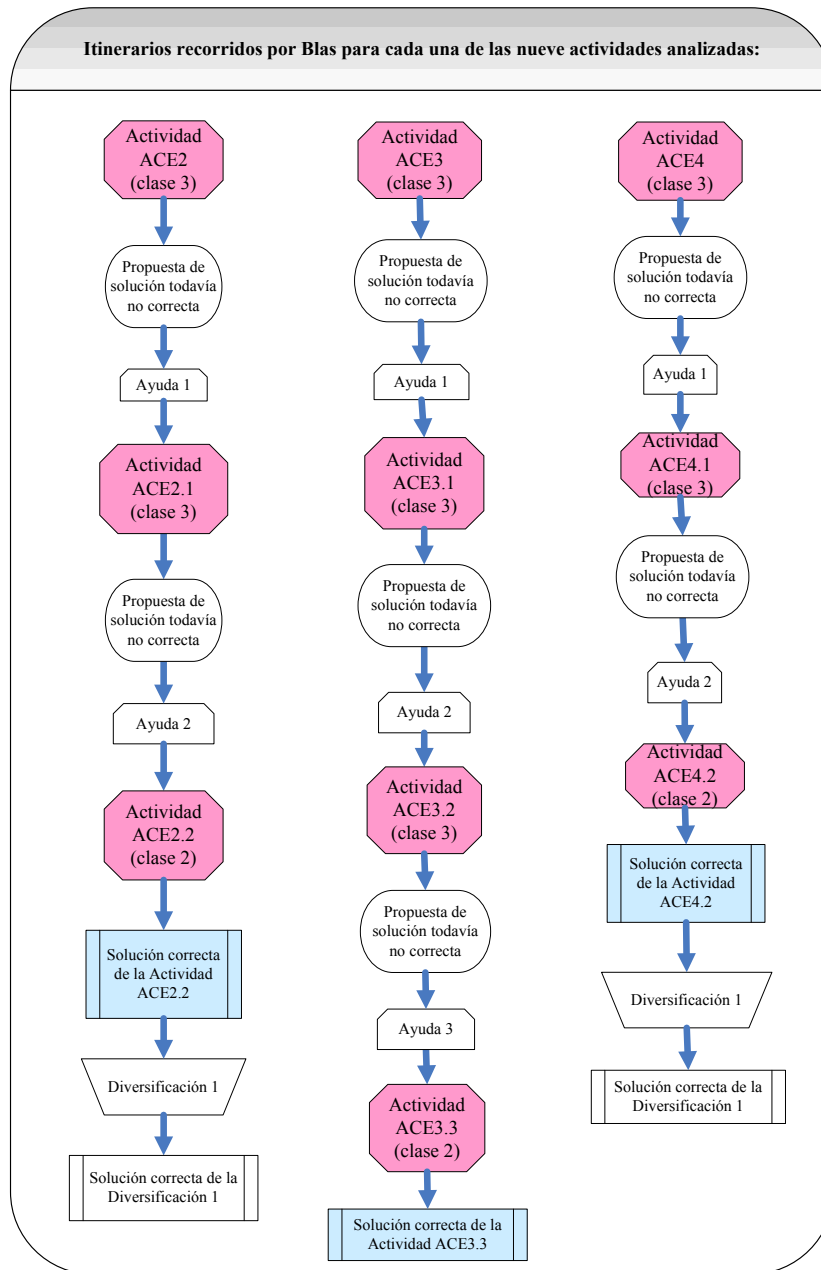


Figura 13.8: Itinerario 2 de Stefan

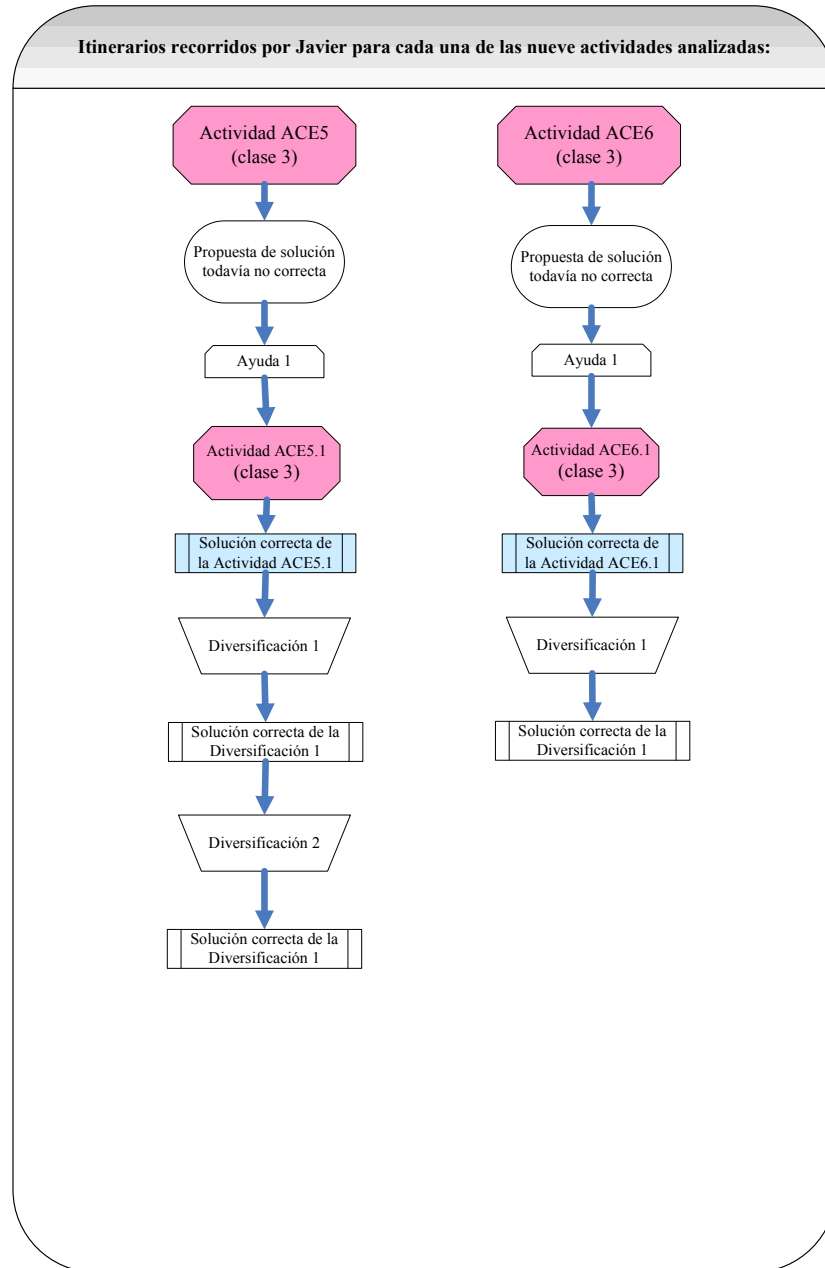


Figura 13.9: Itinerario 3 de Stefan

## Capítulo 14

# Anexo VII: Modelo de encuesta nacional.

Se presenta el modelo de encuesta final propuesta a los alumnos y las respuestas obtenidas

### 14.1. Modelo de encuesta nacional propuesta

Como puede notarse, la encuesta tiene dos partes bien diferenciadas. La primera consiste en marcar opciones, en este caso sobre unas semirrectas, dando respuestas y opinando pero sin justificar dichas respuestas. En la segunda parte, los alumnos tienen la posibilidad de justificar sus afirmaciones anteriores, explyándose sobre cada uno de los aspectos de la primera parte o sobre los que considere oportunos.

Esta estructura se basa en el hecho de que a los alumnos participantes en la experiencia, les cuesta expresar opiniones con autonomía, justificar las propias ideas y no suelen comprometerse con este tipo de tareas. Por estas razones, consideramos que es probable que muchos de ellos prefieran no resolver la segunda parte, o bien por no estar seguros de cómo hacerlo o bien porque no les interese. Para estos casos, prevemos que sí contestaran la primera parte ya que sólo implica escoger la opción que más los representa.

Otra decisión que hemos tomado en esta segunda parte, radica en el hecho de que las preguntas sean un tanto abiertas, en el sentido de que sean los mismos alumnos los que determinen el criterio de su respuesta. Por

**El polígono evaluador:**

Ubica en cada semirrecta el punto que represente cómo te ha resultado el Taller de Matemáticas teniendo en cuenta cada aspecto.

Finalmente, une los puntos formando un polígono.

Referencias: M: malo  
R: regular  
B: bueno  
MB: muy bueno

Y como cada cosa tiene un porqué... te pedimos que escribas un breve comentario respecto a cada una de tus opiniones anteriores:

- lo que has aprendido:
- las actividades:
- el trabajo con ordenadores:
- la relación con los profesores:
- la relación con tus compañeros:
- lo a gusto que te has sentido:

¿Qué calificación que le pondrías al Taller y por qué?

En este espacio puedes escribir cualquier otra opinión o sugerencia que creas necesaria en relación al Taller de Matemáticas:

Tu opinión nos ayuda a mejorar. Muchas Gracias.

Figura 14.1: Modelo de encuesta final propuesta

ejemplo al preguntar por las actividades no orientamos la respuesta para que contesten teniendo en cuenta si son fáciles o difíciles, divertidas o aburridas, etc.; al preguntar sobre lo que han aprendido no orientamos la respuesta a decir mucho o poco o qué contenidos, etc. Pretendemos así no imponer categorías previamente sino que las mismas surjan de las respuestas dadas

por los alumnos.

## 14.2. Análisis de la motivación producida por el entorno de aprendizaje y de las opiniones de los alumnos

En el objetivo 7 (sección 1.2) de esta investigación, nos planteábamos analizar la capacidad de motivación del entorno utilizado para potenciar el interés y la participación de los alumnos. Aunque, éste no ha sido uno de los ejes centrales de nuestra investigación, hemos analizado algunos indicadores que nos permiten dar cuenta de ello.

Mencionamos entonces estos datos, algunos de ellos cuantitativos y otros cualitativos.

Hemos obtenido un porcentaje de asistencia a clase mucho más elevado en relación a la media de asistencia del mismo grupo de alumnos respecto a otras asignaturas; incluso en relación a la clase de Matemáticas tradicional (97% frente a 60%). En este sentido destacamos el hecho de que teniendo clase de Taller de Matemáticas durante la primera hora de clase del día lunes (horario de entrada: 8:30 horas); no sólo hemos obtenido un porcentaje de asistencia a clase muy elevado, sino que varias veces de los 16 alumnos asistentes al Taller, muchos no asistían a la clase de Matemáticas que tenían en la segunda hora de los lunes. El sistema de asistencia a clase por horas les permite esta posibilidad, dando lugar a este hecho que ha sido registrado en el diario del investigador. Un aspecto importante para agregar al respecto, es que la profesora presencial del Taller de Matemáticas, es la misma docente que dicta las Matemáticas tradicionales, lo cual nos permite eliminar una variable y dar más peso como responsable de la decisión a la diferencia entre los de entornos de aprendizaje.

Asimismo, los alumnos han acudido a clase con puntualidad y a la vez se mostraban diligentes para comenzar a trabajar (encender rápidamente los ordenadores, no esperar directivas ni consignas del profesor presencial, etc.); cada uno sabe lo que tiene que hacer y muestra entusiasmo y autonomía para hacerlo. Destacamos esta actitud, porque la misma contrasta con la actitud del mismo grupo de alumnos durante la clase de Matemáticas tradicionales, en la cual muchos de ellos se ubican en las últimas filas de asientos, y no buscan cuaderno, libro y otros materiales hasta que la profesora insiste en ellos.

| Indicador                               | Taller de Matemáticas | Clase de Matemáticas tradicional |
|---|-----------------------|----------------------------------|
| Asistencia a clase                      | 97 %                  | 60 %                             |
| Puntualidad                             | Muy buena             | Regular                          |
| Predisposición para el trabajo en clase | Muy buena             | Regular a mala.                  |
| Grado de participación                  | Alta                  | Baja                             |
| Notas medias obtenidas                  | 7,5                   | 4                                |
| Cantidad de alumnos aprobados           | 85 %                  | 30 %                             |

Cuadro 14.1: Notas y asistencia a clase

El aspecto anterior, da cuenta del diferente interés entre una y otra clase, la predisposición ante el trabajo propuesto es muy diferente: en las clases del Taller de Matemáticas, los alumnos trabajan de manera muy activa y participativa respecto a otras clases en las que se niegan a resolver ejercicios, desconocen cuál es el tema que están desarrollando, etc.

Asimismo, los propios alumnos han manifestado el gusto por las clases del Taller, a través de comentarios orales (algunos provocados, otros espontáneos). Estos comentarios, han sido registrados en el diario del investigador y a modo de ejemplo, transcribimos uno de ellos a continuación:

**“Saúl:** *Uy qué rayada, después del recreo tenemos Matemáticas!* (refiriéndose a Matemáticas tradicionales. Ha terminado la clase de Taller de Matemáticas, en la que Saúl se ha mostrado muy a gusto y participativo)

**Investigador:** *¿Cómo y estas no son Matemáticas?*

**Saúl:** *No, esto es otra cosa, y está bien”*

Otro indicador radica en las notas obtenidas por los alumnos, cuya media es mucho más elevada que en el resto de materias; así como también el porcentaje de alumnos aprobados: del 100 % de los alumnos asistentes al Taller de Matemáticas, el 85 % ha aprobado; pero sólo el 30 % de ellos ha aprobado Matemáticas.

En cuanto a la encuesta final propuesta a los alumnos, que ha sido presentada en el apartado 14.1, los resultados nos han sorprendido muy satisfactoriamente. Como ya hemos dicho, dicha encuesta, ha sido de carácter opcionalmente anónimo, aunque casi todos los alumnos han preferido indicar su nombre.

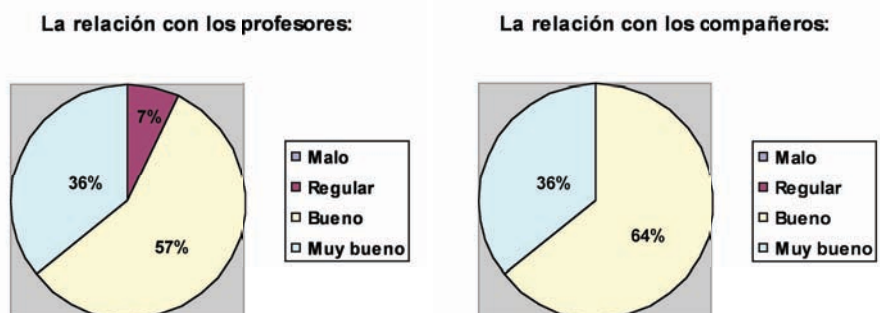
La primera sorpresa ha sido que los 14 alumnos encuestados (del los 16 alumnos del curso, 14 eran los presentes en clase ese día), han resuelto ambas partes de la encuesta, tanto la parte de marcar opción como la parte de escribir su opinión explicando su elección de la primera parte. Este primer aspecto, ya es un buen resultado, dadas las características del grupo en cuanto a poco nivel de autonomía para dar opiniones e bajo interés en involucrarse en este tipo de tarea.

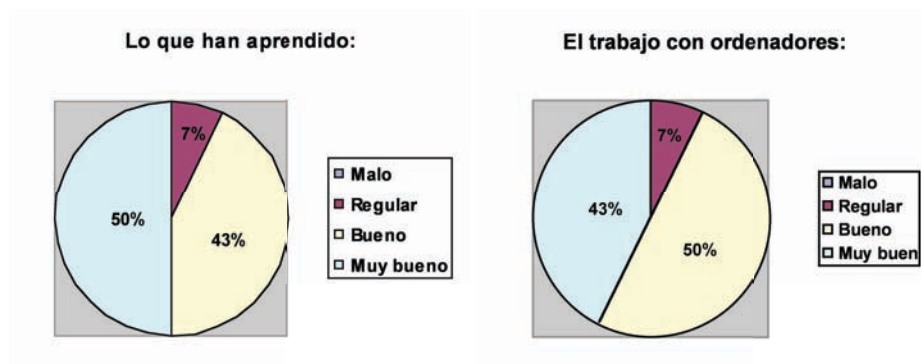
En cuanto a la primera parte, los resultados han sido los que se presentan en la Figura 14.2

|                                       | <b>Mal</b> | <b>Regular</b>        | <b>Bueno</b>           | <b>Muy bueno</b>      |
|---------------------------------------|------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|
| <b>Lo que has aprendido</b>           | ---        | 1 alumno<br>(7,14%)   | 6 alumnos<br>(42,86%)  | 7 alumnos<br>(50%)    |
| <b>Las actividades propuestas</b>     | ---        | 4 alumnos<br>(28,57%) | 8 alumnos<br>(57,14%)  | 2 alumnos<br>(14,29%) |
| <b>La relación con los profesores</b> | ---        | 1 alumno<br>(7,14%)   | 8 alumnos<br>(57,14%)  | 5 alumnos<br>(35,71%) |
| <b>La relación con tus compañeros</b> | ---        | ---                   | 9 alumnos<br>(64,29%)  | 5 alumnos<br>(35,71%) |
| <b>El trabajo con los ordenadores</b> | ---        | 1 alumno<br>(7,14%)   | 7 alumnos<br>(50%)     | 6 alumnos<br>(42,86%) |
| <b>Lo a gusto que te has sentido</b>  | ---        | ---                   | 10 alumnos<br>(71,43%) | 4 alumnos<br>(28,57%) |

Figura 14.2: Resultados primera parte encuesta

Los cuatro gráficos muestran las opiniones en relación a lo que han aprendido, relativas a las actividades propuestas, a la relación con los profesores y la relación con los compañeros.





En cuanto a la segunda parte, los 14 alumnos encuestados han justificado las elecciones realizadas en la primera parte, basándose en las siguientes razones:

1. **En cuanto a lo que creen haber aprendido dicen:**

- Me ha ayudado a aprender más sobre Matemáticas.
- He aprendido todo y he comprendido bien casi todas las actividades.
- Bien, porque antes yo no sabía utilizar un ordenador.
- He aprendido mucho sobre la Geometría y eso es muy bueno.
- He aprendido mucho y me han enseñado bien.
- Muy bien porque he aprendido muchas cosas buenas.
- Algunas cosas ya las sabía pero otras eran nuevas para mí.
- Bien, porque hay cosas que no sabía.
- Bien, porque he aprendido mucho pero me veo un nivel más bajo al de algunos alumnos.
- En este Taller la verdad es que he aprendido muchas cosas.
- Bastante, hay cosas que no había escuchado nunca.
- He aprendido a manejar mejor los ordenadores y cosas nuevas que no sabía.

2. **En cuanto a las actividades propuestas dicen:**

- Han sido en general muy buenas, aunque había algunas que eran muy difíciles.
- Han sido fáciles y, algunas, hasta interesantes. Me han gustado.
- Regular, porque algunas eran difíciles.
- Han sido muy entretenidas, pero algunas han sido difíciles.
- Las actividades han sido fáciles pero algunas difíciles.
- Bien porque algunas eran fáciles, otras difíciles.
- Han sido un poco difíciles pero han estado bien.
- Las del final han sido difíciles pero el resto fácil.
- Regular. Porque hay algunas difíciles.
- Bien, porque eran interesantes y lo único que te tenías que parar a pensar.
- Algunas han sido fáciles y otras nos ha costado hacerlas.
- Un poco difíciles pero bien.
- Algunas fáciles y otras difíciles.
- No eran tan difíciles.



3. **En cuanto al trabajo con los ordenadores dicen:** Ha sido bueno, aunque a veces tenían problemas y contestábamos tarde.  
Ha ido todo bien, excepto cuando se estropeaban.  
Bien, pero son muy lentos.  
Ha estado muy bien, y aprendes a manejar un programa.  
Con el ordenador bueno  
Bien, pero son muy lentos.  
Son un poco lentos, pero no es culpa del Taller.  
A mí me gustan mucho los ordenadores.  
Bien, porque no era muy difícil.  
Muy bien, porque ya sabemos manejarlos muy bien y manejar el programa.  
Con ayuda del profesorado muy bien.  
Bien, fácil, porque no se han roto ni nada.  
No son tan lentos y cada uno trabaja en un ordenador.
4. **En cuanto a la relación con los profesores dicen:**  
En general buena ya que nos han ayudado en nuestras dudas.  
Había buen rollo con los profesores (y lo sigue habiendo).  
Bien, porque me han ayudado cuando no sabía algo.  
MB, han estado siempre ayudando.  
Con los profesores bien, son majos.  
Bien, son muy majos.  
Son muy majos y te ayudan.  
Me han ayudado cuando me hacía faltan  
Buena, porque saben de todo y te ayudan.  
Muy bien, porque nos tenemos respeto.  
Muy bien, porque enseñan bien.  
Mi relación con los profesores es buena.  
Buena, no ha habido problemas.  
Bien, te respetan.
5. **En cuanto a la relación con los compañeros dicen:** Buena, ha sido genial  
También hay buen rollo. Me llevo bien con todos.  
Bien, porque llevo toda la vida con ellos.  
Muy buena, siempre han estado dispuestos a ayudar.  
Buena, porque me llevo bien con ellos.  
Muy bien, son muy majos.  
Me llevo bien con todos, pero hay sus más y sus menos.  
Buena, así te ayudan o tú les ayudas.  
Buena, porque son majos pero hay de todo.  
Muy buena, porque siempre estamos de buen rollo.  
Bien, aunque al ser la única chica un poco incómodo.  
Muy buena, son todos majos.  
Buena como siempre.  
Buena, puedes trabajar.

6. **En cuanto a lo a gusto que se han sentido dicen:** Muy bien, porque nos hemos ayudado los unos a los otros.  
 Me he sentido a gusto en todo momento.  
 Bien por lo de antes.  
 He estado bien, pero algo molesto con algunas actividades.  
 Bien  
 Bien, un ambiente de trabajo.  
 Me lo he pasado muy bien . Al estar con ordenadores el tiempo va más deprisa.  
 Buena, porque se está bien sentado con los ordenadores.  
 Bien, sin más.  
 Me he sentido muy bien.  
 Muy a gusto porque no ha habido broncas.  
 Bien, por los compañeros.  
 Porque trabajas tranquilo.
7. **Qué calificación le pondrían al Taller y por qué?**  
 9, porque me parece la nota más justa  
 Un 9, ha sido divertido.  
 8, porque me la paso bien y es divertida.  
 10, porque es una actividad educativa y amena.  
 8, porque me ha gustado . 9, ha sido muy bueno.  
 9, porque te diviertes y aprendes.  
 Un 8, porque está muy bien.  
 Un 9, porque está bien y aprendes con los ordenadores.  
 9, porque enseña muchas cosas y nos deja usar el ordenador  
 Un muy bien porque me ha enseñado y porque ves que pierdes el tiempo.  
 Muy buena porque la verdad es que yo he aprendido mucho.  
 7, porque es divertido pero a veces aburrido.  
 5, lo justo, porque tampoco me esfuerzo. (este alumno ha comprendido mal la pregunta y ha calificado su actuación en el Taller)
8. **Otras opiniones o sugerencias:**  
 No tengo ningún otro comentario, y si lo tuviese sería bueno. El profesor de la Uni es muy majo y da gusto dar clase, aunque sea virtual.  
 Que algunas actividades no sean tan difíciles.  
 Todo está muy bien aunque las actividades son un poco difíciles.
9. **Nota media obtenida por el Taller según los alumnos<sup>1</sup> : 8,54**

Además de valorar como un indicador positivo en sí mismo la intención de respuesta a esta segunda parte, vemos que las respuestas son en general muy positivas y destacaremos a continuación las ideas más importantes.

<sup>1</sup>La nota del alumno que ha comprendido mal la pregunta y se ha evaluado él en vez del taller no ha sido considerada en este promedio. Las notas de los alumnos que han calificado con un “muy bueno” al Taller se han considerado un 8, para poder hacer un promedio numérico.

Cabe destacar que al ser preguntas abiertas, sin criterios preestablecidos para las respuestas, las mismas han sido muy amplias, abarcando diferentes aspectos que intentaremos también categorizar e interpretar.

En cuanto a lo que los alumnos consideran que han aprendido durante el Taller:

- dos mencionan que han aprendido Matemáticas o Geometría,
- otros dos dicen que han aprendido a utilizar el ordenador,
- finalmente, el resto de los alumnos dan una idea menos precisa opinando que han aprendido “muchas cosas”, “cosas buenas”, “cosas nuevas”, “todo”, “mucho”, destacando la idea de que sí han aprendido pero como si les costara ponerle una etiqueta a aquello que han aprendido.

Entendemos que esta falta de precisión a la hora de asignarle un término a los contenidos aprendidos surge del hecho de trabajar en un entorno de aprendizaje muy diferente al tradicional y con una metodología muy distinta, de que no sólo se han aprendido contenidos matemáticos sino también utilización de las TIC para el aprendizaje y la comunicación. Esto hace que les cueste identificar lo aprendido con un área de conocimiento habitual.

Entre estas respuestas, destacamos la de un alumno que dice “*Bien, porque he aprendido mucho pero me veo un nivel más bajo al de algunos alumnos*”, como una respuesta que denota un grado de reflexión sobre lo aprendido y sobre lo que falta aprender y que muestra a su vez como el hecho de estar en un nivel más bajo que otros alumnos no ha impedido el progreso del alumno sino que por el contrario se han producido avances, a la vez que han sido posibles las interacciones con esos alumnos de nivel más alto y se ha favorecido la reflexión sobre el propio aprendizaje.

En cuanto a las actividades propuestas, los alumnos las clasifican mayoritariamente según dos criterios:

- el grado de dificultad: casi todos mencionan que algunas eran difíciles
- lo interesantes que les han resultado: muy buenas, interesantes, entretenidas, me han gustado

Las actividades que hemos propuesto, consisten en su mayoría en problemas abiertos, su resolución no es inmediata y lineal, ni responde a la repetición de resoluciones de problemas anteriores; por el contrario, requieren la aplicación de diversidad de conceptos, relaciones y procedimientos, la toma de decisiones respecto a cuáles es más conveniente utilizar en cada caso, procesos de metacognición, de comunicación.

Destacamos que entre los 14 alumnos que resuelven la encuesta, hay alumnos de niveles muy diversos, sin embargo todos ellos caracterizan las

actividades como “*difíciles*”, actividades “*para pararse a pensar*” según uno de ellos. Eso se debe al sistema de ayudas progresivas y diversificaciones que ha adaptado cada enunciado inicial a cada alumno, exigiendo a cada uno el máximo, pero posibilitando a todos resolver los problemas; de hecho ninguno de ellos menciona que hubiera actividades imposibles de resolver, dado que todos los alumnos han podido resolver todas las actividades.

Valoramos positivamente el hecho de que varios alumnos las hayan calificado como interesantes o entretenidas, porque este también era uno de los objetivos que nos planteamos al seleccionarlas.

En relación al trabajo con ordenadores, las respuestas de los alumnos aportan lo siguiente:

- algunos mencionan problemas de funcionamiento: lentos, que se estropeaban, a veces tenían problemas
- otros destacan que han aprendido a utilizar el programa, que han mejorado la utilización del ordenador en general,
- finalmente otros lo destacan como un elemento que los ha hecho estar a gusto

Cuando les preguntamos sobre la relación con los profesores los alumnos dicen:

- 6 de los 14 alumnos destacan como positivo que los profesores ayudaran: “nos han ayudado en nuestras dudas”, “me han ayudado cuando no sabía algo”, “han estado siempre ayudando”.
- Otros centran su respuesta en el trato personal: “Había buen rollo con los profesores”, “son muy majos”, “nos tenemos respeto”.

Nos ha llamado a atención que el 42,86 % de los alumnos se refiriera al rol de la tutorización utilizando el verbo “ayudar” (sólo uno dice “enseñan bien”, y ninguno utiliza otros términos como p.e. explicar); lo cual da cuenta de que han vivenciado un rol del tutor diferente, que coincide con el que nos habíamos planteado y cuyas características y funciones hemos desarrollado (ver sección 2.2). Proponíamos allí que la función del tutor debía ser la de intentar modular y guiar el proceso y describíamos dicha función basándonos en el concepto de “*andamiaje*” ([56],[262]).

Decíamos entonces que el profesor es quien realiza *parte de la tarea que el estudiante todavía no puede manejar y le proporciona soporte en forma de sugerencias o ayuda, basadas en una diagnosis correcta del nivel actual del alumno en cuanto a destrezas o dificultades. El andamiaje es un modo cooperativo de resolución de problemas de profesor y alumnos, en el que el soporte se modifica gradualmente hasta que los alumnos se hace cargo de lo suyo y finalmente la ayuda del profesor se desvanece* ([193]).

El diseño y control de los entornos de aprendizaje debe contribuir a este andamiaje; proporcionando en cada momento más que los aportes necesarios los mínimos necesarios, de manera que se potencia el desarrollo óptimo de los alumnos.

Destacamos positivamente el hecho de que los alumnos hayan percibido y descrito el rol de los profesores caracterizándolo justamente por su acción de ayudar, porque esto da cuenta que la percepción que han tenido ha sido coincidente con la que pretendíamos.

Los aportes de los otros alumnos que se refieren a la buena relación personal con los docentes, también resulta una evaluación positiva dado que creemos que el buen clima de trabajo es un elemento fundamental para conseguir todos los demás objetivos.

Cuando les preguntamos por la relación con los compañeros, todos han contestado que la misma ha sido buena o muy buena y al explicar los motivos:

- casi todos los alumnos (12) se refieren a razones de compañerismo, de buena relación interpersonal:  
“Hay buen rollo”, “Me llevo bien con todos”, “Muy bien, son muy majos”, etc.
- las respuestas de dos alumnos hacen referencia nuevamente a las ayudas?: Muy buena, siempre han estado dispuestos a ayudar?, Buena, así te ayudan o tú les ayudas?

El primer grupo de alumnos destaca el buen clima de trabajo, la buena relación entre pares que se ha dado en el Taller.

El segundo grupo en cambio, vuelve a destacar un aspecto que nos proponíamos al plantear una forma de trabajo colaborativa, en la que las interacciones entre pares contribuyeran al aprendizaje de todos y cada uno.

Al tener que explicar cuán a gusto se habían sentido y porqué, todos los alumnos dicen que bien o muy bien y mencionan muy diversos motivos:

- dos alumnos dicen que por el hecho de trabajar con ordenadores,
- un alumno menciona de nuevo las interacciones a través de las ayudas: Muy bien, porque nos hemos ayudado los unos a los otros?
- otros hacen referencia al buen clima de trabajo: “Bien, un ambiente de trabajo”, “Muy a gusto porque no ha habido broncas”, “Bien, por los compañeros”, “Porque trabajas tranquilo”
- algunos no especifican motivos, sólo refuerzan la opción escogida en la primera parte de la encuesta: “Me he sentido a gusto en todo momento”, “Me lo he pasado muy bien”, Bien, sin más?, “Me he sentido muy bien”, ...

- uno de los alumnos dice haber estado molesto con algunas de las actividades:  
“He estado bien, pero algo molesto con algunas actividades”

La última respuesta mencionada, merece un análisis en sí misma. La respuesta fue dada por el mejor alumno del curso, históricamente el de media más alta, el más estudioso, incluso el que más destaca en la clase tradicional de Matemáticas; su esquema de trabajo responde en muchos casos al modelo de enseñanza tradicional, y aunque su desempeño en el Taller ha sido muy bueno, en algunos casos se sentía molesto cuando ese esquema basado en otro modelo quizá más memorístico y estructurado no le era suficiente, cuando alumnos regulares” o “malos” proponían una estrategia de resolución interesante o hasta ingeniosa antes que él, etc.

Finalmente, la nota con que los alumnos han calificado el Taller ha tenido como media, 8,54; lo que muestra que los alumnos han aprobado el entorno de trabajo propuesto teniendo en cuenta todos los criterios anteriores.

## Capítulo 15

# Anexo VIII: Procesos de resolución completos propuestos por cada alumno

En este anexo VIII, se presentan los procesos de resolución completos propuestos por cada alumno para cada actividad; y estudio de los mismos mediante la aplicación de los instrumentos para el análisis de la Competencia Comunicativa y del Aprendizaje de la Geometría.

### 15.1. Alumno 1

#### **Caracterización general del alumno:**

Javier corresponde a la clase definida como “alumnos de rendimiento alto” (su nota media es 7). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar entre bueno y muy bueno según las asignaturas; teniendo una especial preferencia por las relacionadas con las Ciencias Exactas y la Informática. Suele aprobar todas las asignaturas, no ha repetido curso, es un alumno comprometido con sus estudios, tiene una asistencia casi perfecta a clase, su comportamiento general es muy bueno y está bien integrado con sus compañeros. Tiene ciertos conocimientos previos de Informática, algo poco común en los alumnos de este Instituto, pero en su caso esto se debe a que su padre se dedica a la Informática. Las Matemáticas le resultan agradables y nunca le han resultado de gran dificultad.

En las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares se ha notado una actitud de compromiso e interés; es de los pocos alumnos que presta atención, copia de la pizarra, intenta resolver las tareas que el profesor solicita, y muestra preocupación por aprobar los exámenes (consulta dudas en las clases anteriores, pregunta si ciertos temas serán incluidos, etc.). Esta actitud coincide con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que se esfuerza por avanzar, por resolver con corrección las actividades propuestas, teniendo una actitud de mucho interés. Como muchos de los alumnos de esta clase que denominamos “clase de buenos alumnos”, manifiesta explícitamente su intención de continuar estudiando después de finalizar la ESO y reconoce en la escolaridad aportes a su formación y a sus posibilidades futuras.

### 15.1.1. Actividad AEP1

1. *Itinerario de resolución* (esquema): (ver Figura 15.1)



Figura 15.1: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta.* (archivo Cabri):(ver Figura 15.2)

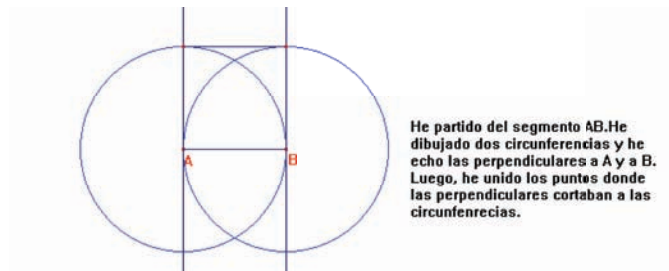


Figura 15.2: Primera versión



**Tutorización (1ª ayuda)**<sup>1</sup>: “La construcción que propones es correcta. ¿Podrías enumerar qué condiciones has procurado que cumpla el cuadrilátero que has construido para ser un cuadrado?”

**Segunda versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.3)

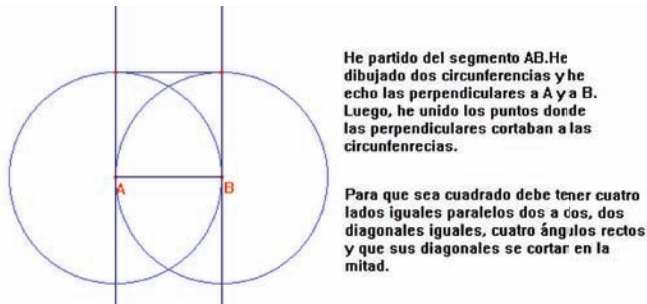


Figura 15.3: Segunda versión

**Tutorización (2ª ayuda)**: “Todo lo que dices de los cuadrados es cierto; pero ¿cuáles de esas condiciones has tenido en cuenta para construirlo? Las demás son propiedades que cumplen los cuadrados, intenta diferenciar unas de otras”

**Tercera versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.4)

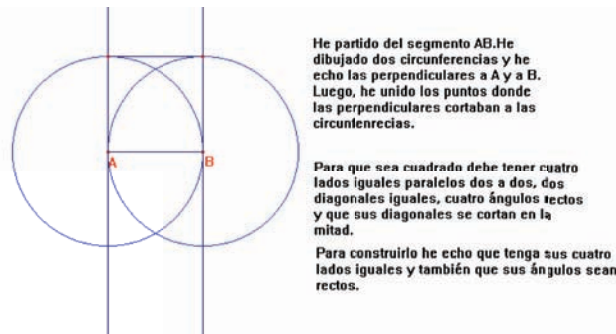


Figura 15.4: Tercera versión

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

Si bien el texto inicial no contiene contradicciones ni repeticiones; no llega a ser totalmente coherente dado que la información no es suficiente y el no hacer

<sup>1</sup>Las intervenciones que aparecen como “tutorización” en las actividades de la etapa presencial (AEP1; AEP2 y AEP3) han sido realizadas en forma oral, por el profesor presencial.

uso de notaciones o de indicaciones más precisas da lugar a ambigüedades (no queda claro qué condiciones cumplen las circunferencias mencionadas, los puntos de corte entre las circunferencias y las perpendiculares no son sólo dos, etc.)

Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En respuesta al pedido del profesor, el alumno enumera todas las características que sabe que presentan los cuadrados, pero no diferencia las que definen a un cuadrado de las propiedades consecuentes, tampoco reconoce en principio, cuáles de esas características ha considerado como condiciones para su construcción, aunque sí logra hacerlo con una ayuda más.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por presentar éste último cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.) y la omisión de una h en “echo”. En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto

■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos hace da lugar a ambigüedades:

- respecto a las perpendiculares: no se indican las dos condiciones mínimas para determinarlas (perpendicular a qué elemento y pasando por qué punto); es más ambas condiciones se mezclan erróneamente en una expresión “he hecho las perpendiculares a A y a B”.
- respecto a las circunferencias: no se indican las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las ambigüedades del texto.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 0
- *Máximo asignado:* 9

- *Ponderación general:* 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar circunferencias para conservar distancias (el radio es invariante) y que las perpendiculares le permiten obtener un cuadrilátero de ángulos rectos; muestra que maneja no sólo estos conceptos y relaciones sino también las características de los cuadrados.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo una construcción correcta y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.

CON AYUDAS: Sin embargo, le resulta difícil diferenciar las condiciones mínimas para que el cuadrilátero que él mismo ha construido sea un cuadrado y ante ese pedido enumera todas las características que tiene el cuadrado y que conoce de cursos anteriores.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo, paso a paso.

CON AYUDAS: Para que explicitara la justificación de la corrección a través de propiedades y relaciones, fue necesaria la intervención del tutor en dos ocasiones.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Dado que fueron necesarios varias ayudas (dos) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.



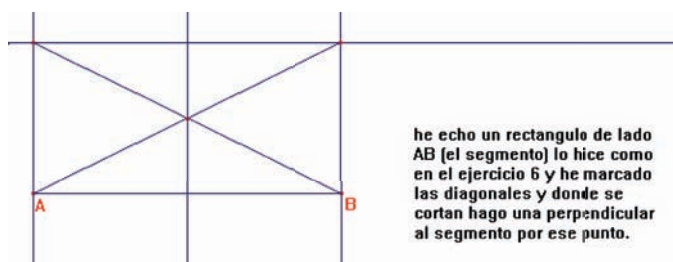


Figura 15.7: Segunda versión

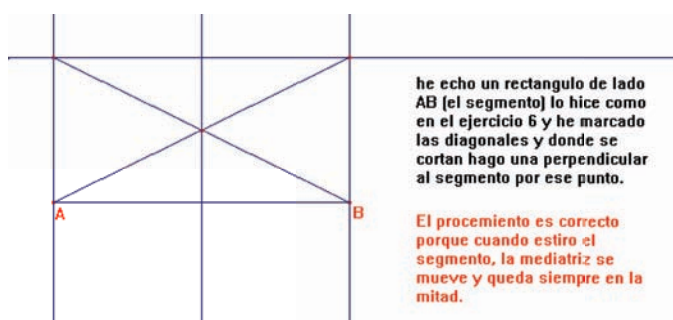


Figura 15.8: Tercera versión

**Tercera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.8)

**Tutorización (2ª ayuda correspondiente a la 1ª diversificación):** “Producir variaciones en tu construcción está muy bien porque te permite analizar visualmente lo que sucede; pero cuando pedimos una justificación nos referimos a reflexionar respecto a por qué lo que has hecho te ha permitido lograr lo que querías hacer. En este caso, has buscado el punto de intersección de las diagonales de un rectángulo y has trazado por ese punto una perpendicular a un lado del rectángulo, ¿recuerdas que propiedad tienen los rectángulos que te asegure que dicha perpendicular pasará por el punto medio del lado?”

**Cuarta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.9)

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia; no es totalmente clara la frase “una circunferencia desde A y que pase por B y otra desde B y que pase por A”. La ambigüedad se genera por la falta de referencia a los

<sup>2</sup>Las circunferencias que aparecen en trazo azul discontinuo estaban “ocultas” en el archivo original.

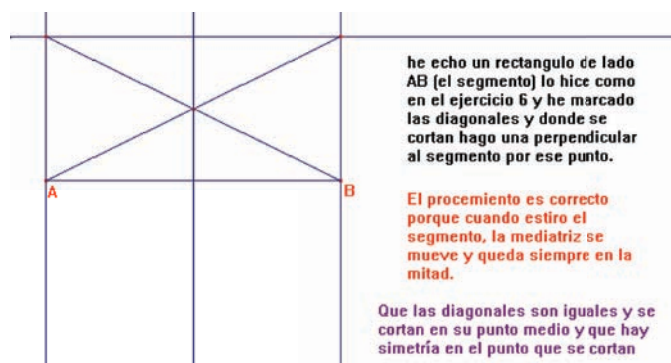


Figura 15.9: Cuarta versión

elementos característicos de dichas circunferencias (centro y radio). Incluso así, el texto resulta bastante claro.

No aparecen las justificaciones que darían cuenta de que las construcciones propuestas dan lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos); para la segunda construcción, ante la solicitud del profesor y con ayuda, el alumno justifica correctamente el proceso.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por ser el primero de cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, espacios, etc.) y la omisión de una h en “ha”.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para mejorar el texto. No obstante, se aprecia una mejora respecto al texto de la actividad anterior en relación a la explicitación de las condiciones de las circunferencias que todavía no son totalmente correctas.

■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos da lugar a ambigüedades. El uso del vocabulario específico (centro, radio) mejoraría el texto.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

En principio, no se evidencia creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta; básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propieda-

des, etc.) como parte de la resolución del problema. Si se muestra creatividad para generar textos de cierta claridad sin recurrir a notaciones geométricas.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 4/9 (44,44%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento; como conceptos y relaciones involucrados aparecen la perpendicularidad y la equidistancia a los extremos del segmento como condiciones para la mediatriz. Para la segunda construcción, propone otro procedimiento correcto que involucra otros conceptos y relaciones vinculadas a los rectángulos y sus propiedades; aunque como se nota en las justificaciones, realiza dicha aplicación de conceptos y relaciones de manera muy intuitiva y se le hace difícil explicitarlos (incluso con varias ayudas).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento, repitiendo con Cabri un procedimiento que ya ha aplicado en cursos anteriores con lápiz, regla y compás. Para la segunda propuesta de solución, de nuevo el procedimiento es correcto.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo dos construcciones correctas y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.

CON AYUDAS: No obstante, el alumno no profundiza su nivel de reflexión en el sentido de que para validar y justificar su propuesta utiliza sólo herramientas

de Cabri y la descripción del proceso de construcción desarrollado. Le resulta muy difícil justificar su construcción por dos razones; por un lado tiene dificultades para identificar y explicitar los conceptos, relaciones y estrategias ya que los aplica de manera muy intuitiva y a esto se suman las sabidas dificultades con el proceso de justificación/ demostración en sí mismo que presentan los alumnos. Esta es una de las primeras actividades que propone este tipo de tarea matemática prácticamente desconocida por los alumnos y que se relaciona con las demostraciones sencillas; actividades que se irán haciendo más complejas a lo largo del proceso.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo

CON AYUDAS: Sin embargo, aunque se le pide “justificar” el segundo procedimiento, se limita a describir el proceso sin justificar porqué es correcto (confundiéndose la explicación de lo realizado con la justificación de su validez). Como se ha dicho más arriba, es también el comienzo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, recurriendo para ello a un procedimiento que había ideado para resolver una actividad anterior. Para resolver totalmente la diversificación propuesta, fueron necesarias dos ayudas por parte del tutor.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2

### 15.1.3. Actividad AEP3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.10)

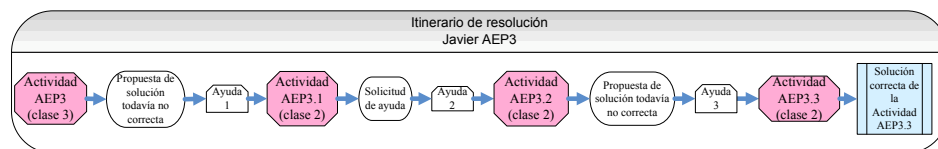


Figura 15.10: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.11)

**Tutorización (1ª ayuda):** El alumno ha identificado que la circunferencia que busca tiene su centro sobre la mediatriz de AP, marca ese punto sobre la recta



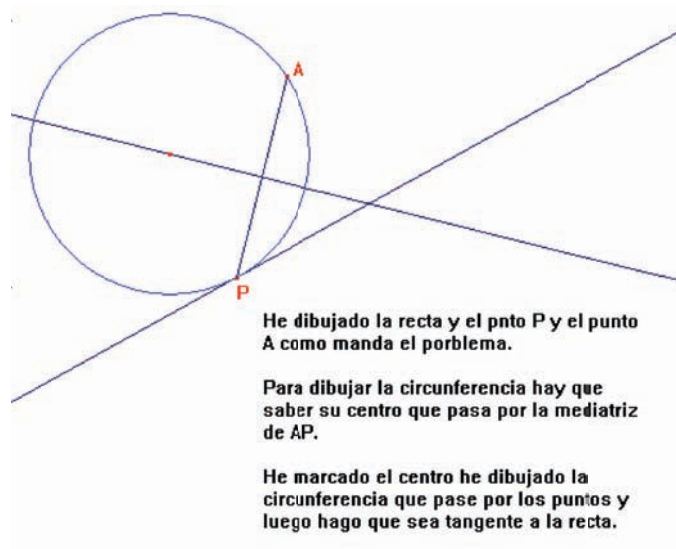


Figura 15.11: Primera versión

y lo manipula hasta que “visualmente” parezca que la recta es tangente a la circunferencia; pero la construcción pierde las propiedades al mover el centro de la circunferencia): “¿Qué ocurre si mueves el centro de la circunferencia? Debes lograr que la circunferencia siga cumpliendo las condiciones por más que modifiquemos el dibujo.”

**Segunda versión. Solicitud de ayuda:** El alumno solicita ayuda; ha intentado algunos procedimientos, pero todos ellos ubicando el centro manualmente en una posición.

**Tutorización (2ª ayuda):** “Analiza qué relación tiene la ubicación del centro respecto a P; piensa qué ocurre cuando una recta es tangente a una circunferencia en un punto”

**Tercera versión. Resolución propuesta** (archivo Cabri):(ver Figura 15.12)

**Tutorización (3ª ayuda):** “Has encontrado correctamente la circunferencia, ¿podrías explicitar las propiedades que justifican tu construcción?”

**Cuarta versión. Resolución propuesta** (archivo Cabri):(ver Figura 15.13)

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

El texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un nuevo avance respecto a las actividades anteriores en cuanto a la coherencia.

Un aspecto importante es que aparecen referencias a las relaciones y propiedades que justifican la construcción propuesta, y aunque todavía no se expresan con total claridad ni se contextualizan en el proceso (de hecho se

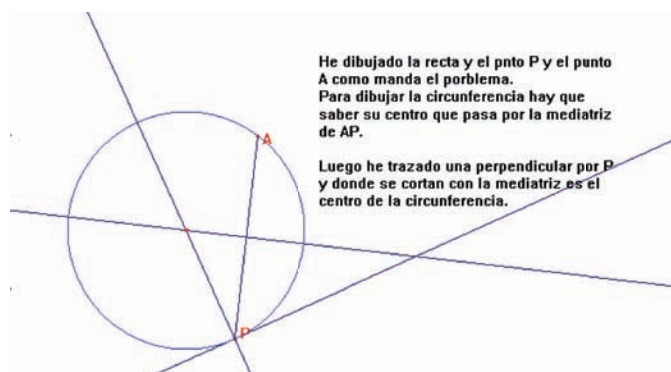


Figura 15.12: Tercera versión

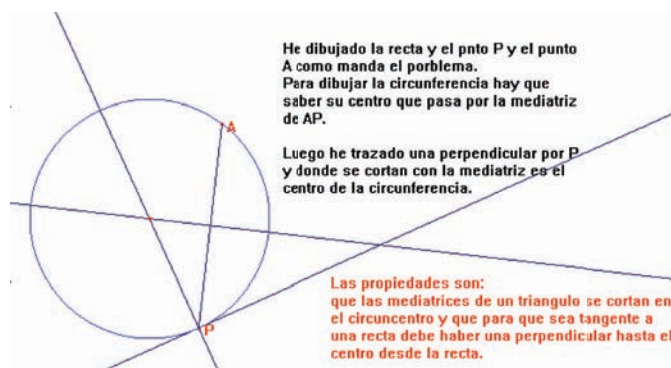


Figura 15.13: Cuarta versión

enumeran en un texto separado); la mención de las mismas es identificada por el alumno como parte de la resolución del problema. Ante la solicitud del profesor, el alumno las enumera de manera más explícita.

Algunas frases generan ambigüedades o falta de claridad debido a errores en el uso del lenguaje geométrico, que todavía presenta errores que se analizan en ortografía y vocabulario.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El texto se corresponde en todos los casos con las construcciones propuestas para resolver el problema, que en algunos casos son correctas y en otros no.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, la omisión o cambio de orden de alguna letra en alguna palabra (“pnto, porblema”) y la falta de alguna tilde (“triangulo”).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para mejorar el texto. No obstante, se aprecia una mejora respecto al texto de las actividades anteriores en relación a la explicitación de las condiciones y de las relaciones geométricas

■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados dado que el uso que de ellos da lugar a ambigüedades o errores de interpretación:

- no es el centro de la circunferencia el que pasa por la mediatriz sino la mediatriz la que pasa por dicho centro
- de la perpendicular por P no se indica perpendicular a qué elemento geométrico (en este caso a la recta); aunque la expresión muestra un avance respecto a textos anteriores en los que se hablaba de “perpendicular a un punto”.

Un mejor uso del vocabulario específico mejoraría asimismo la claridad en el enunciado de las propiedades.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Las propiedades que fundamentan la construcción se mencionan en este caso, lo que supone un avance. No obstante, se hace de las mismas un enunciado más de tipo académico- escolar que creativo y contextualizado al procedimiento concreto.

Se nota todavía que el enunciado responde a un requerimiento por parte del profesor y que aún no se ha desarrollado una capacidad creativa y dúctil al respecto, falta mejorar la interrelación entre procedimientos gráficos, la identificación de las relaciones y propiedades geométricas que los fundamentan y su explicitación por escrito.

■ **Valoración/ ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 5/9 (55,56%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica algunos conceptos, relaciones y propiedades involucrados en la resolución: que el centro de la circunferencia que busca está sobre la mediatriz del segmento por ejemplo (equidistancia de los puntos de la mediatriz respecto a los extremos del segmento o concepto de circunferencia circunscrita).

CON AYUDAS: No obstante, fueron necesarias algunas ayudas para que identificara otra de las propiedades involucradas: la condición de perpendicularidad del radio respecto a la tangente en el punto de tangencia.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que el centro de la circunferencia que busca está sobre la mediatriz del segmento. Traza dicha mediatriz y propone un punto sobre ella como centro; produciendo variaciones sobre la ubicación de dicho centro, lo posiciona en alguna posición de aparente tangencia con la recta

CON AYUDAS: Fueron necesarias algunas ayudas para que logre incorporar a su estrategia la condición de perpendicularidad del radio respecto a la tangente en el punto de tangencia. Pero su construcción inicial, aunque incorrecta, le permitió identificar esa condición faltante (el alumno mueve el centro sobre  $r$  y analiza qué relación existe entre el centro y  $P$  en la posición de *aparente tangencia*).

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; aunque la construcción que propone en principio no cumple todas las condiciones pedidas, su manipulación, conjuntamente con las ayudas del tutor, favorece la visualización de la condición faltante

CON AYUDAS: Si bien fueron necesarias algunas ayudas para favorecer una reflexión más profunda, el alumno controla el proceso, proponiendo una solución provisoria, sobre la cual analizará variables; análisis que favorecerá la elaboración de la resolución definitiva.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo. Oralmente, manifiesta sus dudas y pide ayuda, exponiendo en qué estado está su resolución y qué condiciones no cumple aún.

CON AYUDAS: Si bien realiza correctamente la justificación de la solución, explicitando las propiedades que intervienen; lo hace ante el pedido reiterado. Es decir que, aunque en el enunciado se pide, ¿explica justificadamente?, el alumno sigue asociando esta tarea a la de describir el procedimiento realizado, pero sin hacer referencia a las propiedades o relaciones que lo justifican. Como se ha dicho en relación a la actividad anterior, estas actividades son el comienzo del trabajo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Dado que fueron necesarios varias ayudas (tres) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

#### 15.1.4. Actividad ACE1: Presentación profesor virtual- alumno y propuesta de trabajo

1. **Itinerario de resolución** (esquema):

No procede en este caso

2. **Itinerario de resolución** (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

**De:** javier@ext.unirioja.es

**Enviado:** Lunes, Marzo 7, 2005 11:47 am

**A:** Guillermina Marcos "guillermina.marcos@alum.unirioja.es"

**Asunto:** Saludos

Hola Soy Javier XXXX YYYY, un alumno del Batalla de Clav o.He leído su mensaje y por eso me voy a dedicar a escribirle.

Tengo 14 años para 15, voy en 3º de la E.S.O.

Estoy en la clase de geometría porque me parece una actividad en la que podemos aprender gran cosa ya que aprendemos cosas relacionadas con la informática y con las Matemáticas.

Tengo una hermana mas pequeña que yo de 10 años. Me gusta la música y los deportes(fútbol,tenis,voleibol,etc. . . ). Juego a fútbol en un equipo de la Rioja, y a voleibol patrocinando a nuestro instituto con varios chicos de mi clase.

Espero que sea suficiente.

Un saludo:

Javier XXXX YYYY

3. **Análisis de la Competencia Comunicativa:**

- **Análisis Coherencia intratextual:**

El mensaje es coherente, la presentación que realiza de sí mismo es completa y apropiada; al igual que la justificación de la elección de la materia. Las ideas se expresan clara y correctamente.

- **Análisis Coherencia extratextual:**

No se analiza en este caso

- **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial. Al final, incorpora incluso un saludo.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, todos ellos de utilización de espacios en relación a los signos de puntuación (después de comas, después de puntos); son más bien errores de mecanografía más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí.

Nota: Javier utiliza la opción de revisión ortográfica que ofrece el programa de correo electrónico. Valoramos positivamente esta preocupación, dado que indica que el alumno reconoce que la reconoce que la corrección ortográfica es también una parte importante; y aunque todavía no puede lograr esa corrección por sí mismo, recurre a las herramientas informáticas para lograrla.

■ **Análisis Vocabulario:** El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural, la elección de palabras y expresiones es apropiada

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso se ha resuelto eficazmente

■ **Valoración/ ponderación:**

- *Componente Coherencia: 2*
- *Componente Cortesía y Adecuación: 2*
- *Componente Ortografía y Vocabulario: 2*
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos: 1*
- *Máximo asignado: 9*
- *Ponderación general: 7/9 (58,33%)*
- *Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2).*

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

no corresponde en esta actividad.

### 15.1.5. Actividad ACE2

1. **Itinerario de resolución** (esquema):(ver Figura 15.14)

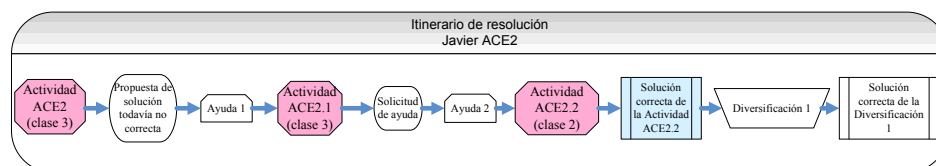


Figura 15.14: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

**De:** javier@ext.unirioja.es

**Enviado:** Lunes, Marzo 17, 2005 9:44 am

**A:** Guillermina Marcos “guillermina.marcos@alum.unirioja.es”

**Asunto:** 1ª actividad **Datos adjuntos:** Actividad correo.fig 2K

Hola Te vuelvo ha escribir porque ya creo que he terminado la actividad.

Por lo que preguntabas en el otro correo yo juego en el tedeon o bien como pone en la liga Rioja Alta de Navarrete.

Juego en 2ª cadete y por si te interesa vamos primeros Je,Je.

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.15)

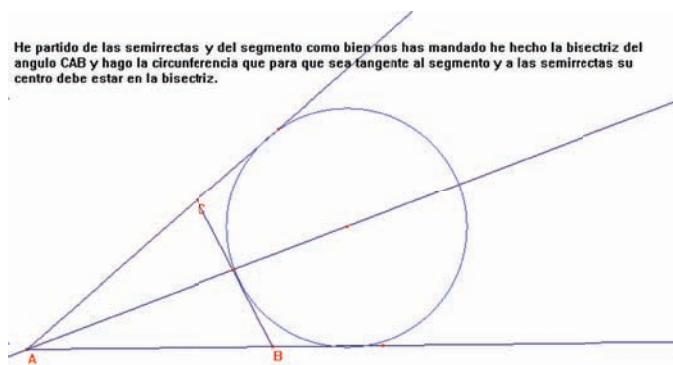


Figura 15.15: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “La idea de trazar la bisectriz está muy bien, y es cierto lo que dices: el centro de la circunferencia que buscamos está sobre esa bisectriz; pero veo en tu construcción que has escogido ese centro a ojo; es decir que si bien el dibujo parece ser correcto fijate que si mueves el segmento BC o alguna de las semirrectas, la circunferencia deja de cumplir las condiciones de tangencia. Intenta mejorar tu procedimiento de manera que esto no ocurra. Seguir trabajando con las bisectrices es una buena manera. ¿en qué lugar geométrico están los centros de las circunferencias tangentes a AB y AC? ¿y en qué lugar geométrico estarán los centros de las circunferencias tangentes a BC y AC?”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico*<sup>3</sup> :

Hola Francisco te escribo aquí porque me he atascado porque he probado de otras maneras para que no pase lo que me dices pero después al probar moviendo el dibujo

<sup>3</sup>Si bien en los casos anteriores y a modo de ejemplo, hemos incluido toda la información que contiene el correo electrónico enviado por el alumno (fecha y hora de envío, destinatarios, asunto, etc.); a partir de aquí sólo incorporaremos los textos escritos por el alumno en el cuerpo de dichos correos electrónicos. En dichos textos se ha respetado la redacción y ortografía de los originales, de ahí la presencia de errores ortográficos, omisión de algunas letras, etc.

se vuelve a mover la circunferencia otra vez he echo perpendiculares a la semirrecta pero pasa igual. Te agradecería que me que me lo corrigieras y que me podrías dar alguna pista. Gracias.

Un saludo:

Javier XXXX YYYY

**Tutorización (2ª ayuda):** "Te repito que lo de trabajar con las bisectrices está muy bien; piensa: ¿en qué lugar geométrico están los centros de las circunferencias tangentes a AB y AC? ¿y en qué lugar geométrico estarán los centros de las circunferencias tangentes a BC y AC? La idea de la perpendicular para trazar la circunferencia también está muy bien, pero te servirá una vez que hayas encontrado el punto exacto para el centro."

**Tercera versión. Texto de correo electrónico:**

Observación: en algunos casos, en que los textos de correo son muy breves o similares a los anteriores, hemos omitido su transcripción dado que no aportan nueva información.

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.16)

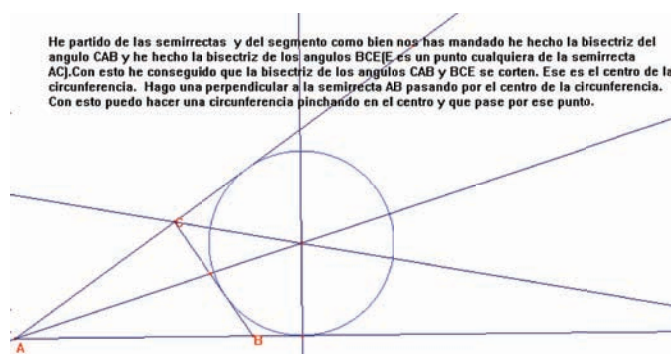


Figura 15.16: Resolución propuesta

**Tutorización (1ª diversificación):** "¿Podrías enunciar la propiedad de las bisectrices que te ha permitido resolver el problema?"

**Cuarta versión. Texto de correo electrónico :**

Hola Francisco te respondo porque creo que ya se la respuesta. Ahora te la escribo aquí:

La propiedad de la bisectriz es que divide el ángulo en dos, que esta equidistante entre los dos lados y que desde cualquier punto de la bisectriz tiene la misma distancia a los lados del ángulo.

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no justifica porqué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.



El profesor indica un fallo en la construcción inicial, y el alumno comprende en qué consiste, intenta remediarlo pero aunque prueba distintas estrategias no lo logra; pide entonces ayuda al profesor relatando lo sucedido y con esta ayuda sí logra la resolución correcta.

El alumno muestra una preocupación por describir el proceso que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso. Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que sabe respecto a la bisectriz (definición, propiedades).

La primera que se menciona (“La propiedad de la bisectriz es que divide el ángulo en dos”) está incompleta dado que no se indica que se hace referencia a “dos ángulos de igual medida”; pero además esta frase no tiene relación directa con la resolución de la actividad.

Asimismo, la expresión “que esta equidistante entre los dos lados” también resulta vaga e imprecisa.

Finalmente la propiedad “que desde cualquier punto de la bisectriz tiene la misma distancia a los lados del ángulo”, resulta ser la que más estrecha relación tiene con la solución propuesta, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las “propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo”. El alumno “cuenta” todo lo que sabe sobre la bisectriz (definición, propiedades) pero no realiza ninguna contextualización de dichas propiedades en el caso concreto de la actividad resuelta

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (se observa un avance en la construcción de la relación e intercambio entre profesor y alumno, lo que favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición)

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.). Nota: Javier utiliza la opción de revisión ortográfica que ofrece el programa de correo electrónico (los acentos que faltan, en “sé” o “está”, muestran justamente ese hecho: el programa no los detecta como errores ortográficos).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los ángulos, puntos y semirrectas.

■ **Análisis Vocabulario:**

El vocabulario general y específico (geométrico) es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (semirrecta, circunferencia, ángulo, centro, perpendicular, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; la resolución propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades

involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo no se ha superado con creatividad en principio (fueron necesarias sucesivas intervenciones docentes).

■ **Valoración/ ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 7/12 (58,33%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema (y luego también sin ayuda también encuentra que necesita la perpendicular para trazar la circunferencia en cuestión); aunque necesitará ayuda para establecer una estrategia adecuada para aplicarlo a esta problemática concreta.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta pero incompleta: al trazar la bisectriz entre las semirrectas, logra encontrar el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a ambas semirrectas (en una primera solución traza por tanteo esta circunferencia y en la siguiente mejora la propuesta al trazarla usando perpendiculares).

CON AYUDAS: El alumno necesita ayuda (y solicita dicha ayuda) para lograr que la circunferencia que propone sea también tangente al segmento BC (por construcción y no sólo en apariencia, que es lo que realiza en el primer intento de solución). El tutor le envía una ayuda que le hace pensar en el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a una de las semirrectas y al segmento BC

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

CON AYUDAS: El grado de reflexión y control es creciente a lo largo del proceso de resolución. Ante la primera versión, es el tutor quien propone la validación mediante variaciones sobre la construcción para detectar la invalidez de la

solución propuesta. Puede notarse que para el siguiente versión es el alumno quien ha validado, ha determinado ya que la solución es incorrecta (aunque mejorada respecto a la anterior) y que requiere de ayuda para avanzar. Esta actitud más autorreflexiva se mantiene hasta el final de la resolución.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto SIN AYUDAS:* El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto y justificarlos; así como también ha sido capaz de solicitar ayuda cuando lo cree necesario. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo

CON AYUDAS: Si bien realiza correctamente la justificación de la solución, explicitando las propiedades que intervienen; lo hace ante el pedido reiterado. Es decir que, aunque en el enunciado se pide, ¿explica justificadamente?, el alumno sigue asociando esta tarea a la de describir el procedimiento realizado, pero sin hacer referencia a las propiedades o relaciones que lo justifican. Como se ha dicho en relación a la actividad anterior, estas actividades son el comienzo del trabajo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.1.6. Actividad ACE3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.17)

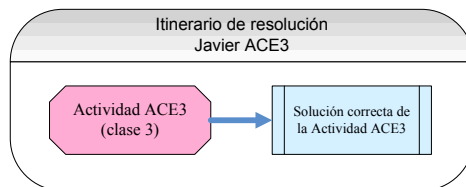


Figura 15.17: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

Hola Francisco ¿que tal? yo estoy bien.

Te escribo porque creo que tengo la solución.

¿Que tal en las vacaciones?

Bueno espero que te hayas divertido igual que yo.

Bueno espero que la actividad este bien.

Un saludo de Javier XXXX YYYY

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.18)

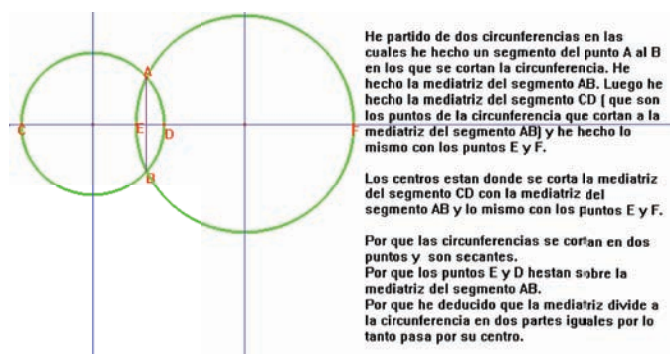


Figura 15.18: Primera versión

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

Como en la actividad anterior, se describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no se justifica totalmente mediante propiedades geométricas porqué los procedimientos aplicados conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

No obstante, el último apartado, se observa un esfuerzo por cumplir este requisito (justificar porqué los procedimientos geométricos aplicados son válidos para resolver la actividad); esto evidencia un avance respecto a la actividad anterior (en la que ni siquiera se evidenciaba esta necesidad y fue necesaria la intervención del profesor) pero todavía no se logra cumplir con este requisito (en el apartado mencionado, se enumeran nuevamente algunas relaciones, pero estas no terminan de justificar con solvencia la construcción, incluso de hace referencia a una “deducción” realizada en referencia a una relación observada como regularidad en el gráfico).

#### ■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

#### ■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye saludo, interés personal, se observa un avance en la confianza y en el intercambio pero a la vez se mantiene el respeto correspondiente a una relación profesor-alumno).

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, faltan tildes en “qué” en su uso interrogativo y en “esté”, “está” y aparece un “hestan” por “están”; sin embargo ha mejorado el uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto)

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmento, puntos, mediatrices, etc.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, perpendicular, secantes, etc.)

- no es el centro de la circunferencia el que pasa por la mediatriz sino la mediatriz la que pasa por dicho centro
- de la perpendicular por P no se indica perpendicular a qué elemento geométrico (en este caso a la recta); aunque la expresión muestra un avance respecto a textos anteriores en los que se hablaba de “perpendicular a un punto”.

Un mejor uso del vocabulario específico mejoraría asimismo la claridad en el enunciado de las propiedades.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo no se ha superado con creatividad en principio (fueron necesarias sucesivas intervenciones docentes).

El avance respecto a la actividad anterior radica en el hecho de que esta instancia es ahora reconocida por el alumno como un requisito que forma parte de la resolución de las actividades.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 8/12 (66,66 %)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: circunferencias secantes, mediatriz del segmento determinado por los puntos de corte. En particular la propiedad de esta mediatriz de contener los centros de las circunferencias no la conocía, o al menos no la recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (las circunferencias pueden cambiar de posición o tamaño pero deben ser siempre secantes), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos. Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: marca el segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias, traza la mediatriz a dicho segmento, compara los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos para validar el procedimiento, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

CON AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Aunque la construcción definitiva no fue inmediata y, por el contrario, requirió de varios intentos y pruebas por parte del alumno; durante este proceso el alumno prefiere agotar las instancias propias antes de solicitar ayuda y logra de hecho la resolución correcta

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos. En este caso, el alumno incorpora la justificación de las relaciones y propiedades que intervienen en el procedimiento propuesto sin necesidad de que el tutor explicita su falta o deba recordar su diferencia respecto a la descripción del proceso llevado a cabo. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Si bien es este caso no fue necesario aportar ayudas para que el alumno llegue a la solución correcta (en parte porque el mismo alumno decidió seguir ensayando procedimientos hasta llegar al definitivo); el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.

- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.1.7. Actividad ACE4

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.19)

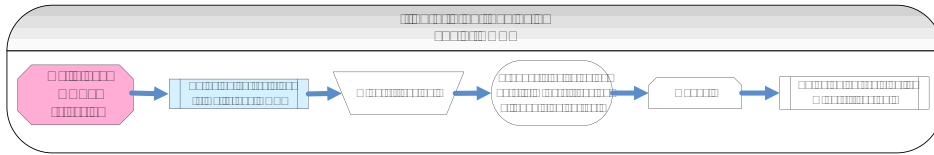


Figura 15.19: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

Hola francisco te escribo porque creo que tengo la solución.

Espero que este bien.

Un saludo.

Javier XXXX YYYY

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.20)

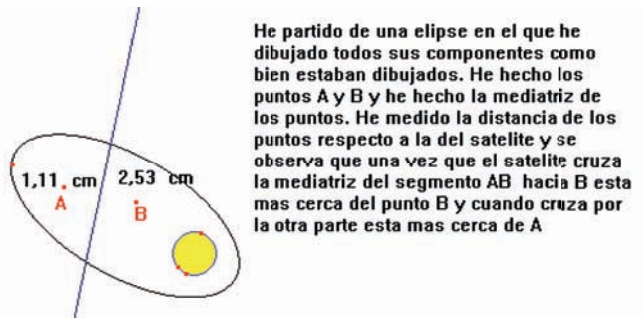


Figura 15.20: Primera versión

**Tutorización (1ª diversificación):** “¿Cuál es la propiedad de la mediatriz que justifica tu solución?”

**Segunda versión.:** *Texto de correo electrónico*

Francisco aqui te envio la respuesta a la pregunta que le has mandado.

Un saludo

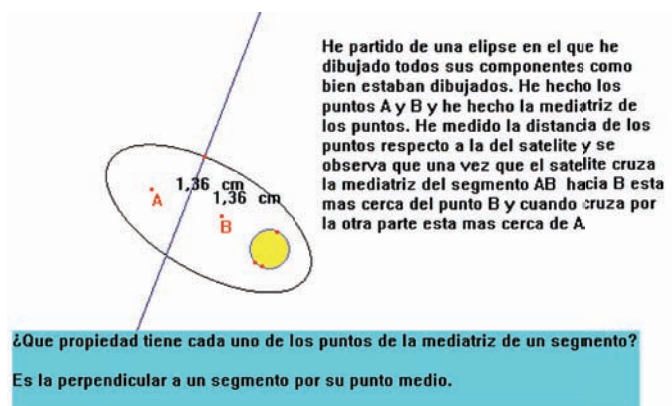


Figura 15.21: Segunda versión

Javier XXXX YYYY

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.21)

**Tutorización (1ª ayuda de la 1ª diversificación):** “Lo que has escrito es la definición de mediatriz y es correcta, pero piensa: ¿qué propiedad que cumplen los puntos que se encuentran sobre la mediatriz se relaciona con la resolución de este problema?”

**Tercera versión.:**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.22)

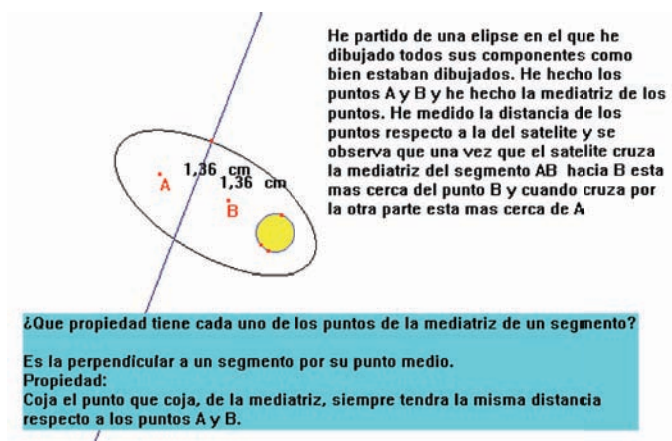


Figura 15.22: Tercera versión

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

- **Análisis Coherencia intratextual:**



1ª versión: Se describe linealmente el proceso llevado a cabo y si bien no se menciona explícitamente la propiedad que fundamenta la solución, se hace referencia a la misma de manera implícita. El texto propuesto resulta coherente, la información es suficiente y completa en relación a los requisitos iniciales.

2ª versión: Ante el pedido de explicitar qué propiedad de la mediatriz de un segmento se relaciona con la solución propuesta, el alumno copia la definición de mediatriz de un segmento.

3ª versión: Ante el nuevo pedido, el alumno logra dar respuesta específicamente a lo solicitado, identificando la propiedad indicada, aunque todavía no logra contextualizar la aplicación de la misma al marco específico de la actividad en cuestión.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador).

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, faltan tildes en “satelite”, “mas”, “esta” y “tendra”, además del uso en masculino de la palabra elipse; sin embargo ha mejorado el uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto)

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos y puntos.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, elipse, distancia, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece (para Javier) desafíos de este tipo. Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien nuevamente las mismas vinieron en respuesta a una nueva demanda por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma adecuada a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 9/12 (75 %)

- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

SIN AYUDAS: El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: distancia entre dos puntos, mediatriz, segmento, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, traza la mediatriz, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

CON AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, aunque fue necesaria una ayuda para ello.

- **Valoración/ponderación:** Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3

### 15.1.8. Actividad ACE5

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.23)

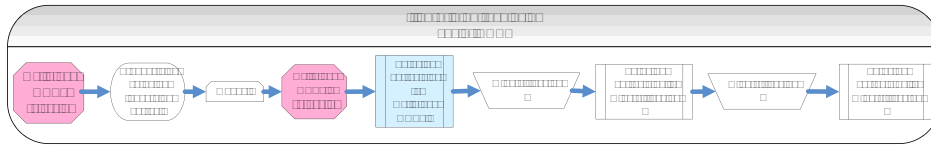


Figura 15.23: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

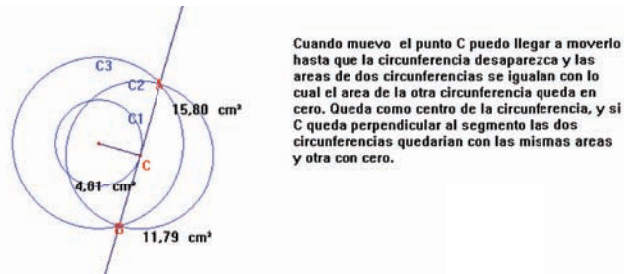
Hola francisco te escribo porque creo que tengo la solución.

Si necesitas algo mas me lo envias por un correo.

Un saludo de:

Javier XXXX YYYY

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.24)



Quando muevo el punto C puedo llegar a moverlo hasta que la circunferencia desaparezca y las áreas de dos circunferencias se igualan con lo cual el área de la otra circunferencia queda en cero. Queda como centro de la circunferencia, y si C queda perpendicular al segmento las dos circunferencias quedarían con las mismas áreas y otra con cero.

Figura 15.24: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “Has encontrado qué ocurre con las áreas en ese caso particular (cuando mueves el punto C hasta que una de las circunferencias desaparece), pero ¿existe alguna relación entre las áreas de los tres círculos en el resto de los casos?”

**Segunda versión.:** *Texto de correo electrónico*

aquí te mando la respuesta.

un saludo:

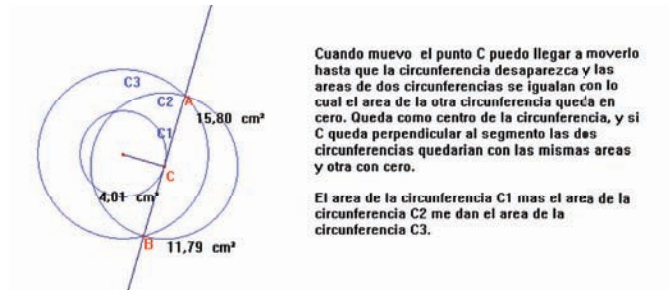


Figura 15.25: Segunda versión

Javier XXXX YYYY

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.25)

**Tutorización (1ª diversificación):** “¿Puedes demostrar porqué se cumple esta relación entre las áreas?”

**Tercera versión.:**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.26)

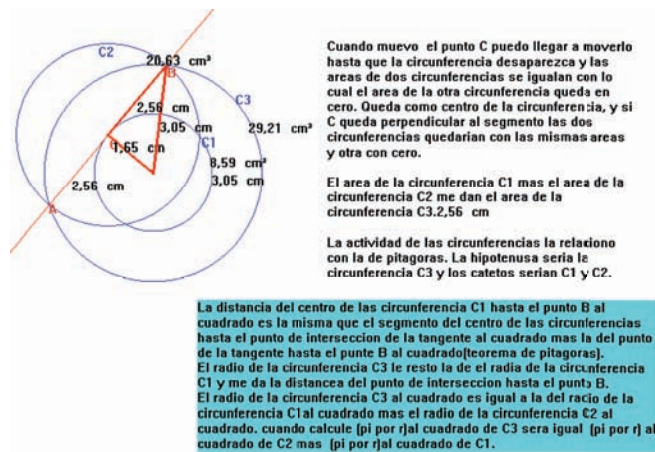


Figura 15.26: Tercera versión

**Tutorización (2ª diversificación):** lo que dices es cierto, los tres radios forman un triángulo del que, aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene la relación que mencionas. Ahora bien, ¿Cómo sabes que el triángulo en cuestión es un triángulo rectángulo?

**Cuarta versión.:** *Texto de correo electrónico*

aquí te mando la respuesta.

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.27)

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

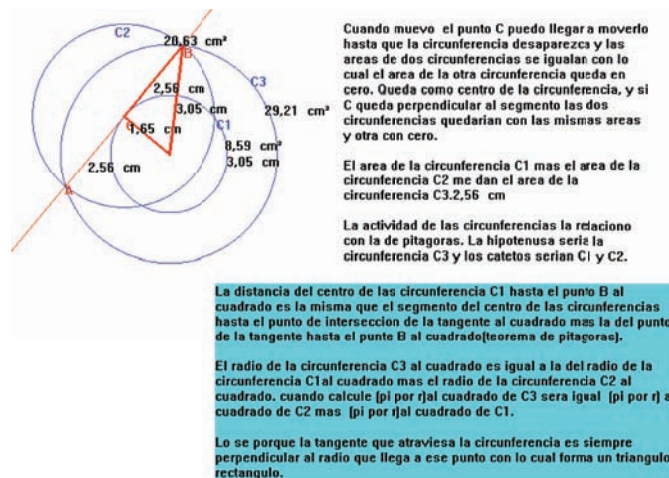


Figura 15.27: Cuarta versión

■ **Análisis Coherencia intratextual:**

En este caso, ya no se pide la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación<sup>4</sup> geométrica, pero siempre el procedimiento debe ir acompañado de explicaciones, justificaciones, etc.

1<sup>a</sup> versión: La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentra una relación entre las áreas para un caso particular. No se menciona la propiedad que fundamenta la relación encontrada.

2<sup>a</sup> versión: El alumno encuentra una relación más general entre las áreas.

3<sup>a</sup> versión: Ante el pedido de explicitar cuál es la justificación de tal relación, y después de una exhaustiva indagación por parte del alumno (diario del investigador: el alumno produce variaciones, realiza mediciones, etc.); el alumno encuentra y explicita la relación entre los cuadrados de los radios de los círculos, basándose en la relación pitagórica aplicada al triángulo rectángulo determinado entre los radios. Y a partir de ahí, relaciona esto con las áreas de los círculos.

4<sup>a</sup> versión: Se explicita la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras). Esta instancia supuso para el alumno dos fases: una primera para traducir la condición “aplicabilidad del Teorema de Pitágoras” en la condición “seguridad de que el triángulo es rectángulo” y luego una segunda para justificar esta afirmación mediante la propiedad mencionada (perpendicularidad entre la tangente a una circunferencia y el radio hasta ese punto).

<sup>4</sup>Nótese que se trata de una pregunta abierta; no se solicita establecer ¿qué ocurre con las áreas? sino que se formula una pregunta abierta y es el alumno quién debe establecer no sólo la relación que se cumple sino entre qué elementos (radios, perímetros, áreas, ...)

- **Análisis Coherencia extratextual:**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. Existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

- **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes siguen manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador), tendencia que además es progresiva en los tres textos de correos enviados en relación a esta actividad (registro en el diario: una vez obtenida alguna nueva respuesta, el alumno se da prisa en enviarla pero sin perder la cortesía en sus mensajes).

- **Análisis Ortografía:**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en áreas, quedarían, más, envías, aquí, Pitágoras, será, triangulo, rectángulo) y mayúsculas (Pitágoras, Francisco). Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmento, puntos y se incorpora el uso de notaciones para las circunferencias, lo que ayuda a expresar con mayor claridad las ideas y relaciones geométricas.

- **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (circunferencia, radio, área, punto, tangente, perpendicular, hipotenusa, intersección, tangente, triangulo rectángulo, catetos, etc.).

El único error que podría señalarse es la referencia al “área de la circunferencia”, pero en este caso el mismo puede deberse a que en la opción de Cabri aparece así.<sup>5</sup>

- **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que suponen la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas (asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo, susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras, relación entre radios y consecuencia sobre la relación entre áreas).

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

---

<sup>5</sup>Esto se debe a la existencia en castellano de dos palabras diferentes (circunferencia y círculo) que se corresponden con una única en inglés (“circle”).

- **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 3
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 10/12 (83,33%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro del círculo, Teorema de Pitágoras, perpendicularidad entre radio y tangente.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: La pregunta formulada es abierta (¿Qué relación?..) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios, perímetros y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido y encuentra un caso particular de relación entre áreas. No encuentra en la 1ª versión de resolución la relación general entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y enuncia como relación encontrada el caso particular

CON AYUDAS: A través de la 1ª ayuda, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con las áreas (el alumno ya ha detectado que "algo pasa con las áreas", que la "relación que hay que buscar tiene que ver con las áreas") en un caso más general.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

CON AYUDAS: Sólo ha necesitado de una ayuda, que ha promovido la reflexión en ese momento reorientando la resolución.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3

### 15.1.9. Actividad ACE6

1. **Itinerario de resolución** (esquema):(ver Figura 15.28)

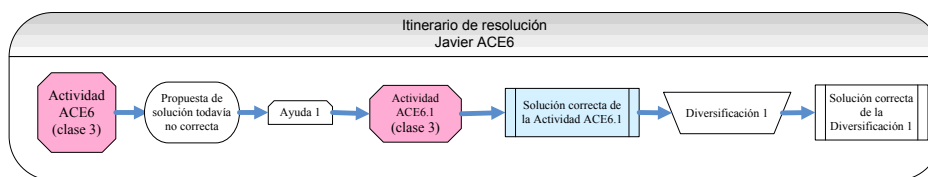


Figura 15.28: Itinerario de resolución

2. **Itinerario de resolución** (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

Aquí te mando la respuesta de la actividad 3

Espero que este bien

Un saludo

Javier

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.29)

**Tutorización (1ª ayuda):** “Lo que dices del perímetro es cierto, por más que movamos el punto P (siempre sobre BC), el perímetro del cuadrilátero no cambia; faltaría que analices porqué ocurre esto.

En cuanto al teorema que propones, relee tu enunciado y analiza si está completo, ¿es eso lo que quieres enunciar en tu teorema?

Otra cuestión: en la frase en la que analizas qué ocurre con los lados del cuadrilátero AMPN, ¿es la igualdad de sus medidas lo que permite asegurar que son paralelos o es al revés? Piénsalo y si es necesario revisa la construcción que has realizado.”

**Segunda versión.:** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.30)

**Tutorización (1ª diversificación):** “¿Lo que dices está muy bien, y ocurre porque como has notado  $AM = NP = NB$ . Has justificado porqué  $AM = NP$ , pero te faltaría justificar porqué  $NP = NB$  ¿se te ocurre por qué será?”

**Tercera versión.:**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.31)



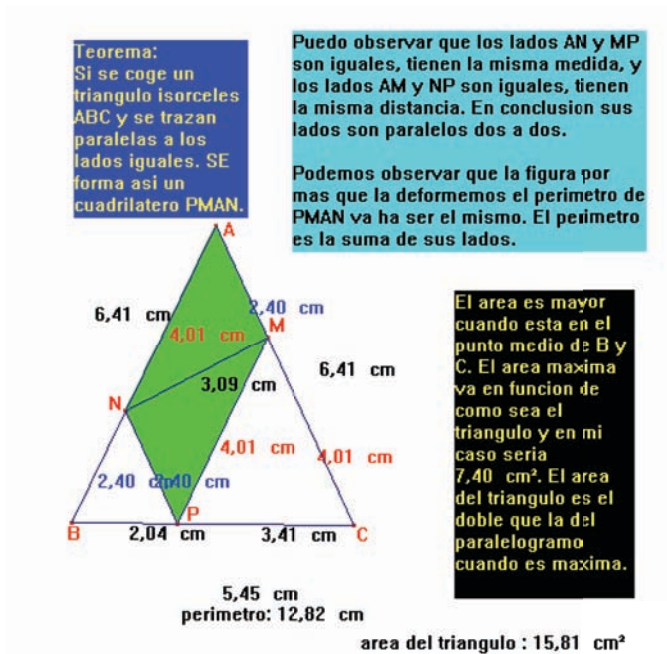


Figura 15.29: Primera versión

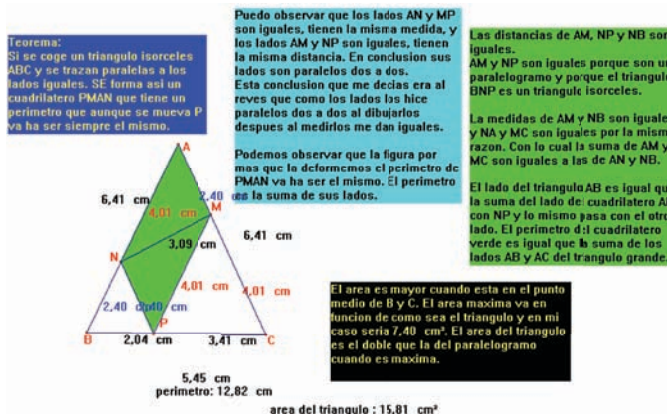


Figura 15.30: Segunda versión

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino que lo que se solicita es encontrar una relación

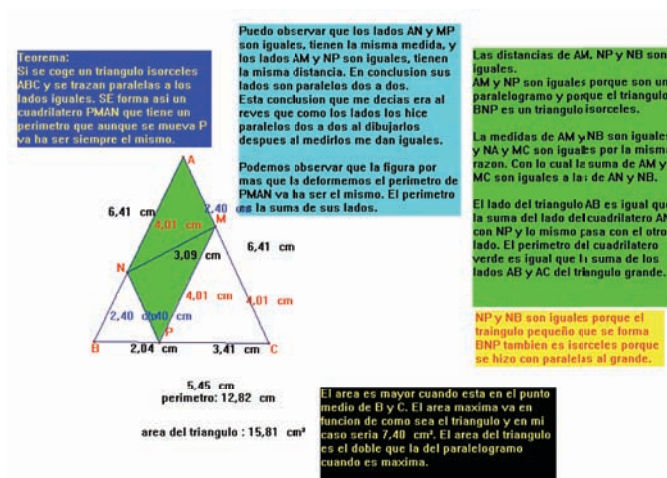


Figura 15.31: Tercera versión

geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la condición que se cumple para el perímetro.

Asimismo, se intenta justificar la relación encontrada para el perímetro. Respecto a estos argumentos:

- la implicancia entre lados paralelos dos a dos e igualdad de sus medidas se enuncia en el sentido inverso (el alumno afirma que la igualdad de las medidas le permite asegurar el paralelismo, cuando en realidad, por construcción la implicación es la recíproca)
- el hecho de que el triángulo BNP sea isósceles (necesario para asegurar la congruencia entre BN y NP) se menciona pero no se justifica el porqué recurriendo a relaciones entre ángulos determinados entre paralelas
- no es claro el orden de implicación entre estos argumentos

En las versiones siguientes, el alumno logra reordenar su discurso de manera mucho más coherente, cumpliendo ampliamente con los requisitos del problema.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se incluye un saludo de despedida de curso y una valoración del trabajo realizado

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en aquí, esté, triángulo, isósceles, así, cuadrilátero, conclusión, máxima, etc.). Se sigue apreciando el mejor uso

de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros.

Se destaca, el avance que se observa entre el primer y segundo versión

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triángulo isósceles, lado, perímetro, área, teorema, etc.).

Se destaca, el avance que se observa entre el primer y segundo versión.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 3
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 3
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 11/12 (91,67%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: : El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara perímetros, áreas y segmentos, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.

CON AYUDAS: A través de la 1ª ayuda, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con las áreas (el alumno ya ha detectado que ¿algo pasa con las áreas?, que la “relación que hay que buscar tiene que ver con las áreas”) en un caso más general.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

CON AYUDAS: Las intervenciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales (análisis del antecedente y consecuente de una implicación propuesta, reflexión sobre la corrección o no del enunciado del teorema propuesto. En este caso la ayuda del tutor no aporta nuevas informaciones, simplemente sugiere la autorreflexión sobre las ideas propuestas por el mismo alumno.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas. Realiza además una descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.

## 15.2. Alumno 2

### Caracterización general del alumno:

Blas corresponde a la clase definida como “alumnos de rendimiento bajo” (suele suspender la mayor parte de las asignaturas). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar bastante deficiente, especialmente es las asignaturas relacionadas con Matemáticas y Ciencias. Es repetidor de curso, y aún así suspende las asignaturas; no está comprometido con

sus estudios; y, aunque tiene una asistencia casi perfecta a clase y su comportamiento general es bueno, muestra habitualmente una actitud de desinterés y de no compromiso con su aprendizaje. Sus conocimientos previos de Informática son prácticamente nulos. En las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares tiene una actitud de total desinterés; no presta atención, no copia de la pizarra, no hace las tareas ni en clase ni en casa, ni siquiera intenta aprobar los exámenes. Esta actitud contrasta con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que a pesar de sus falencias evidentes (tanto en lo que respecta a sus conocimientos matemáticos previos, como a la competencia comunicativa y al manejo informático), tiene una actitud de interés. Como muchos de los alumnos de esta clase que denominamos “alumnos con dificultad elevada”, manifiesta explícitamente estar esperando a cumplir los 16 años para salir del Instituto y comenzar a trabajar y no identifica en la escolaridad ningún aporte a su formación ni a sus posibilidades futuras.

### 15.2.1. Actividad AEP1

1. *Itinerario de resolución* (esquema): (ver Figura 15.32)

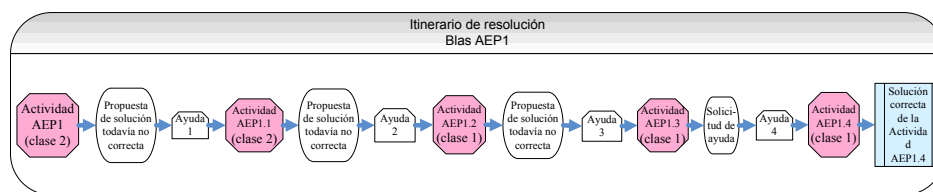


Figura 15.32: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.33)

**Tutorización (1<sup>a</sup> ayuda)**<sup>6</sup> : “El cuadrilátero que has dibujado, parece un cuadrado, pero ¿qué ocurre si mueves el punto A? ¿y si mueves el B? ¿y si mueves el punto que has marcado en rojo? (sería bueno que utilices nombres para los puntos, rectas, segmentos, etc. para que sea más fácil referirse a ellos)

*Otros comentarios: ¿AB es una recta o un segmento? ¿las rectas que has trazado por A y por B: son paralelas o perpendiculares al segmento AB? (si no recuerdas cuál es el nombre correcto, puedes mirar el icono que aparece en el programa para cada herramienta)”*

**Segunda versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.34)

**Tutorización (2<sup>a</sup> ayuda):** “Es cierto que el cuadrilátero que has construido ahora es un cuadrado; pero lo has hecho utilizando la opción polígono regular; es decir que primero has hecho el cuadrado y luego sobre él has marcado los vértices A y

<sup>6</sup>Las intervenciones que aparecen como “tutorización” en las actividades de la etapa presencial (AEP1; AEP2 y AEP3) han sido realizadas en forma oral, por el profesor presencial.

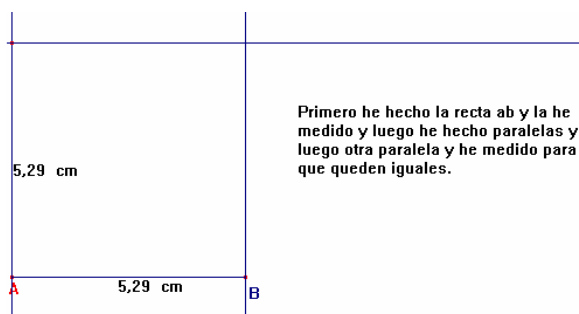


Figura 15.33: Primera versión

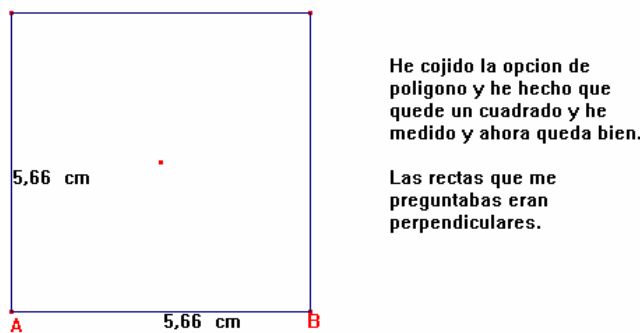


Figura 15.34: Segunda versión

*B. Lo que te pedimos es que tomes como punto de partida el segmento AB y que a partir de él construyas un cuadrado que lo tenga como lado (no puedes utilizar entonces la opción polígono regular), ¿cómo podrías obtenerlo? Vuelve a tu primera propuesta de solución y analiza cómo mejorar la construcción para que los lados queden realmente iguales (pista: prueba utilizando circunferencias)”*

**Tercera versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.35)

**Tutorización (3ª ayuda):** “La construcción está muy bien. Pero también es importante que tu comentario sea más claro: incluye por ejemplo los nombres que has

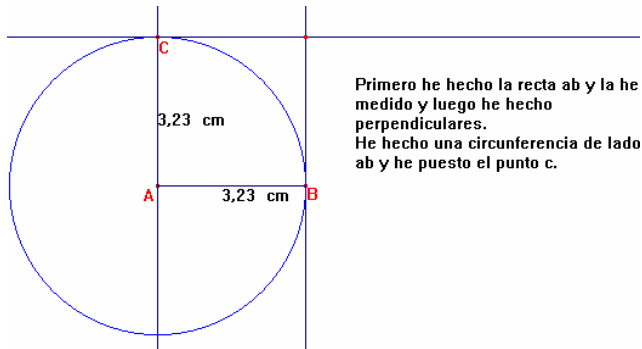


Figura 15.35: Tercera versión

*dado a los puntos, a los segmentos, aclara perpendicular a qué recta, analiza si AB es un segmento o una recta, piensa si AB es realmente el lado de la circunferencia que has trazado, etc. Recuerda que el comentario es una parte importante de la solución.”*

**Cuarta versión.** *Comentario oral:* “A mí los comentarios no me gustan y además no me salen”

**Tutorización (4<sup>a</sup> ayuda):** “Es importante que aprendas a escribir lo que haces para resolver un problema. Compara tu comentario con el de Fernando, discutan y analicen diferencias; luego intenta reelaborar tu comentario para que quede más claro.”

**Quinta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.36)

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

Los textos iniciales no son coherentes debido a diversas razones: la información que contienen no es suficiente, aparecen errores en la utilización de términos geométricos (recta por segmento, paralela por perpendicular, lado por radio, etc.), no se hace uso de notaciones o de indicaciones más precisas. Todo esto da lugar a ambigüedades y los comentarios resultan muy confusos e incoherentes. A lo largo del proceso esta característica perdura (de hecho el alumno se resiste a escribir esos comentarios porque reconoce sus falencias)

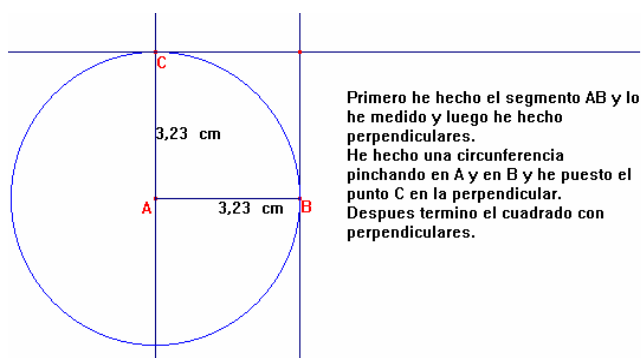


Figura 15.36: Cuarta versión

y fue necesaria la interacción con un compañero, además de las ayudas del tutor, para que el alumno pudiera mejorar su comentario en la última versión de resolución. Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En este caso, el alumno ni siquiera llega a esa instancia, dado que ha sido necesario un trabajo intensivo sobre la construcción inicial y su descripción.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

Existen varias contradicciones entre el texto y la construcción; muchas de ellas debidas al mal uso de los términos geométricos (dice paralelas y traza perpendiculares, dice recta y se refiere a un segmento, dice lado y se refiere al radio de la circunferencia). A esto se suma, la incoherencia intratextual, el comentario es tan vago y ambiguo que se podría corresponder con esta construcción o con muchas otras.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Como errores de ortografía, se destaca especialmente la no utilización de tildes (no aparece ninguna a lo largo del proceso).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados (aunque en el texto utiliza minúsculas en vez de mayúsculas para referirse a ellos); hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto.

Pero más allá de las notaciones, el error más grave aparece en la utilización de términos geométricos.

■ **Análisis Vocabulario:**



Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas no están bien empleados: utiliza la expresión paralela en vez de perpendicular, recta en vez de segmento y lado en vez de radio de la circunferencia.

Además de estos errores, el uso de los términos geométricos es vago y ambiguo, dado que no se especifica lo suficiente:

- respecto a las circunferencias: no se indican las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan)
- respecto a las perpendiculares: no se indican las dos condiciones mínimas para determinarlas (perpendicular a qué elemento y pasando por qué punto)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las incoherencias del texto.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 0
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 2/9 (22,22%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: En la primera versión de la solución, el alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta; aunque no logra hallar una solución correcta. En el segundo intento, al probar otras estrategias, propone una solución cuya estructura geométrica no respeta las condiciones dadas por el enunciado.

CON AYUDAS: En las versiones siguientes, por sugerencia del tutor, el alumno vuelve a una estructura geométrica que respeta las condiciones dadas en el enunciado.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar perpendiculares (aunque las llama paralelas) para obtener un cuadrilátero de ángulos rectos, pero no identifica que el concepto de circunferencia puede servirle para

conservar distancias (el radio es invariante). Como parte de los errores y deficiencias conceptuales, se evidencia además, que para varios de los conceptos que utiliza no recuerda la expresión correcta para referirse a ellos.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Las estrategias que propone el alumno en la primera versión consisten en generar un rectángulo de lado AB, dado que sus ángulos son rectos pero sus cuatro lados no son iguales (por construcción). En la segunda versión propone una estrategia inversa (a partir del cuadrado obtiene el segmento AB) que vuelve a ser incorrecta.

CON AYUDAS: Para que el alumno logre aplicar estrategias que generen una solución correcta fueron necesarias varias ayudas: dos para lograr una construcción que responda a las condiciones solicitadas y dos más para lograr describir el procedimiento empleado.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: Por sí solo, el alumno no reflexiona sobre el proceso, no valida las construcciones que propone (intentando por ejemplo realizar modificaciones en la construcción propuesta). Deja esa tarea al tutor; cada propuesta nueva de solución la somete a la revisión del tutor para que sea el tutor quien determine “si está bien”.

CON AYUDAS: A través de preguntas y sugerencias, el tutor ayuda al alumno a reflexionar sobre cada propuesta que realiza; intentando que pueda controlar el proceso y generar una construcción correcta y comunicar claramente el procedimiento desarrollado.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es incapaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto y justificarlos. Tiene muchas dificultades con el uso del lenguaje geométrico, tanto en lo que se refiere a conceptos, como a relaciones y procedimientos. Manifiesta además que esa actividad no le gusta y “no le sale”.

CON AYUDAS: A través de las ayudas, el tutor realiza una doble tarea: por un lado promueve la concienciación de que esta actividad matemática es parte de la solución de cada uno de los problemas propuestos y por otro lado orienta al alumno para que logre resolver esta tarea en este caso concreto. Para lograrlo, el tutor recurre a nuevas preguntas y cuestiones y sugiere incluso la interacción con un compañero a través de un ejercicio concreto de revisión, comparación y reestructuración del comentario. El alumno produce en su última versión un texto que dista bastante de ser totalmente correcto, pero que ha mejorado mucho respecto a los propuestos inicialmente.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Primera clase, que se corresponde con un Nivel 1.

### 15.2.2. Actividad AEP2

1. *Itinerario de resolución* (esquema): (ver Figura 15.37)

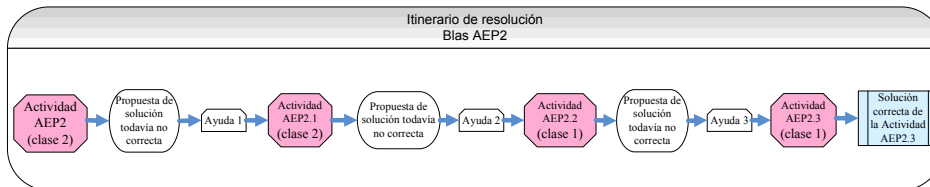


Figura 15.37: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.38)

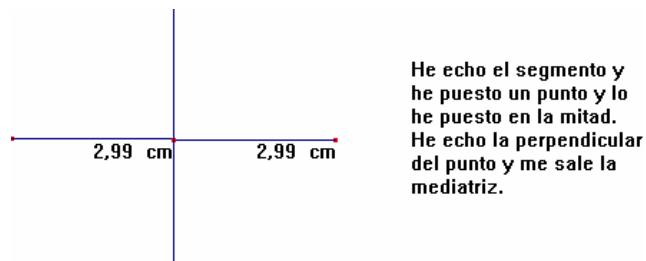


Figura 15.38: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “Fíjate que la recta que has trazado deja de ser la mediatriz del segmento cuando mueves alguno de sus extremos. Recuerda que debes encontrar un procedimiento de manera tal que la recta que halles siga siendo la mediatriz del segmento cuando modifiquemos el segmento.”

**Segunda versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.39)

**Tutorización (2ª ayuda):** “Ahora la construcción está bien, la recta que has hallado es la mediatriz del segmento  $AB$ . Algunas sugerencias para mejorar tu construcción y tu comentario: recuerda que utilizamos letras mayúsculas para llamar a

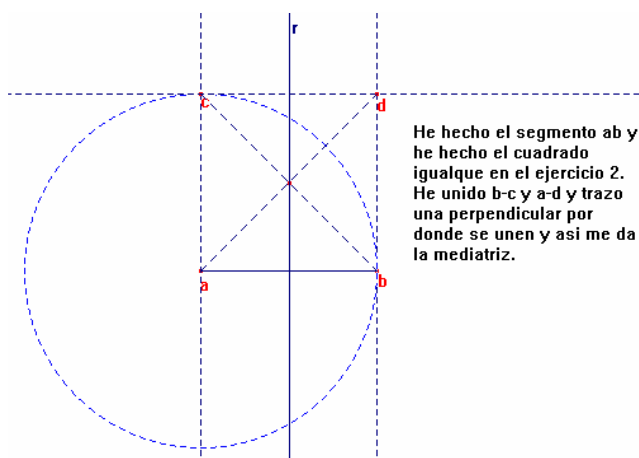


Figura 15.39: Segunda versión

los puntos y por tanto a los segmentos (en este caso sería segmento AB); siempre que traces una paralela o una perpendicular es necesario aclarar paralela o perpendicular a qué y pasando por qué punto (en este caso, deberías decir trazo una perpendicular al segmento AB que pasa por el punto... , convendría ponerle un nombre a ese punto). Intenta reescribir tu comentario siguiendo estas sugerencias.”

**Tercera versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.40)

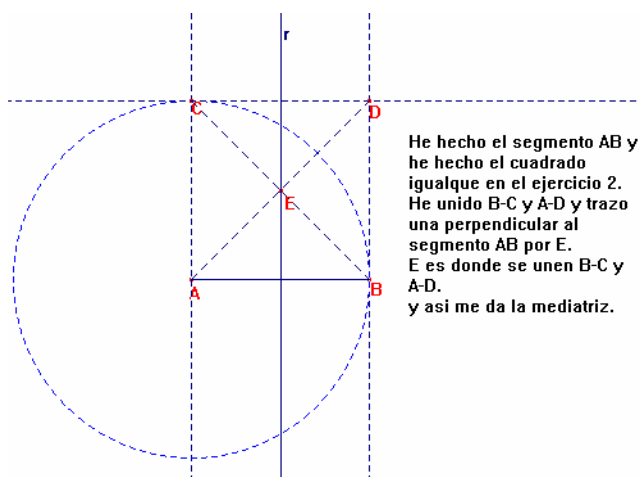


Figura 15.40: Tercera versión

**Tutorización (3ª ayuda):** “Una pregunta más: ¿recuerdas cómo se llaman los

segmentos  $AD$  y  $BC$  que se obtienen al unir los vértices no consecutivos de tu cuadrado?”

**Cuarta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.41)

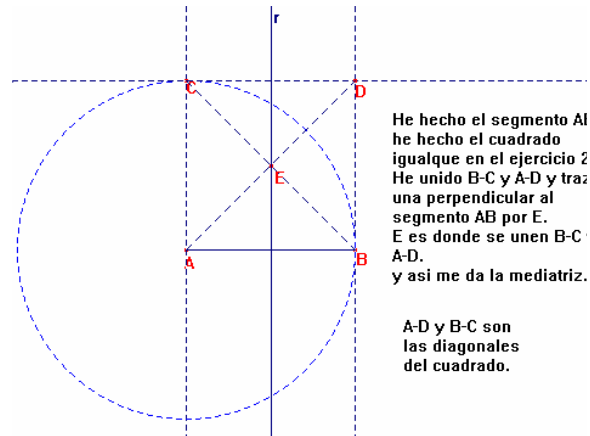


Figura 15.41: Cuarta versión

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un gran avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia, aún presenta grandes carencias.

En la primera versión, el texto es coherente, aunque describe un procedimiento que no es correcto como solución de la actividad.

En la segunda versión, aparecen frases que dan lugar a ambigüedades (por ejemplo no se indica perpendicular a qué elemento); pero esto mejora en la tercera versión en respuesta a la orientación del tutor. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de por qué la construcción propuesta da lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos).

#### ■ Análisis Coherencia extratextual:

No existen contradicciones explícitas entre las construcciones y los textos, pero por ser estos últimos de cierta vaguedad, podrían corresponderse con otras construcciones.

#### ■ Análisis Cortesía y adecuación:

No se analiza en este caso

#### ■ Análisis Ortografía:

Como errores de ortografía, además de faltan una h, sigue sin utilizar tildes. El alumno utiliza bien los signos de puntuación, lo que contribuye a textos más claros.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en la primera versión no se emplean notaciones; en la segunda, se identifica como avance el hecho de utilizar algunas para los puntos y segmentos aunque con ciertos errores (utilización de minúsculas para los puntos). En la tercera versión, esto se mejora ante la orientación del docente, al igual que las indicaciones respecto a la perpendicular trazada; el mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas mejoran el texto.

■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están mejor empleados que en la actividad anterior: se emplean bien las expresiones “perpendicular” y “segmento”.

Aunque en algunos casos aún no se utilizan de manera totalmente correcta, lo que da lugar a ambigüedades: “la perpendicular del punto”, “las perpendicular por donde se unen”,...

El uso del vocabulario no es óptimo, pero ha mejorado notablemente. El alumno, presenta muchas dificultades y dudas respecto al uso del vocabulario geométrico, pero ha incorporado como estrategia, el recurrir a los nombres de las herramientas de Cabri que utiliza (por ejemplo, al trazar una perpendicular, que elige por su icono de Cabri, verifica el nombre que el programa asigna a dicha relación, para no cometer errores llamando por ejemplo paralela a dicha recta.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Para encontrar el punto E, el alumno traza las diagonales del cuadrado que ha construido, aunque no las identifica como tales; no obstante supera ese escollo describiendo el procedimiento de una manera alternativa: “he unido B-C y A-D”.

No se recurre a la creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta; básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** ¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno no identifica que debe recurrir a conceptos, propiedades y relaciones que le permitan hallar la mediatriz del segmento; y propone una construcción aparente que deja de cumplir las condiciones ante la mínima modificación (es un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna).

CON AYUDAS: Como primera ayuda, el tutor plantea esa reflexión (la construcción se debe hacer siguiendo un procedimiento de manera tal que la recta hallada siga siendo la mediatriz del segmento cuando modifiquemos el segmento) y no realiza ninguna sugerencia concreta respecto a qué conceptos, relaciones y propiedades elegir para ello. Sólo a partir de esta sugerencia, el alumno empieza a ensayar procedimientos geométricos (en la primera versión solamente proponía un dibujo que aparentaba corrección). Realiza una propuesta de construcción que no es la más frecuente entre los alumnos y que se basa en la resolución de una actividad anterior (construcción de un cuadrado a partir de un lado). Como conceptos y relaciones involucrados aparecen ahora las propiedades de las diagonales de los cuadrados. Maneja esos conceptos y propiedades de manera intuitiva; en principio ni siquiera utiliza el término diagonales y tiene grandes dificultades para describir lo realizado.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: En la primera versión, el alumno aplica una estrategia incorrecta para la primera construcción (propone un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna).

CON AYUDAS: Después de la primera ayuda, el alumno identifica que debe proponer un procedimiento geométrico basado en relaciones y propiedades. Propone entonces una estrategia correcta, basada en generar un cuadrado que tiene por lado al segmento dado (antes ha probado otros procedimientos y verificado que no eran apropiados).

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: En la primera versión, el alumno parece no controlar el proceso ni reflexionar sobre él; no propone modificaciones para verificar su construcción, no reflexiona respecto a si lo que ha hecho responde al enunciado de la actividad. Una vez más, transfiere esa tarea al tutor, como si sólo a él le correspondiera analizar la corrección o no de la propuesta (“¿está bien?”)

CON AYUDAS: No obstante, después de la primera ayuda, el alumno mejora su nivel de reflexión: prueba distintos procedimientos y los verifica sin ayuda hasta arribar a uno correcto. Describe con dificultad el procedimiento geométrico que propone; texto que va mejorando en las sucesivas versiones a través de las ayudas propuestas. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta da lugar a la mediatriz del segmento

(validación/ justificación de la propuesta). Pero el tutor decide no avanzar en este sentido todavía, sino mejorar la descripción de los procedimientos.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno evidencia dificultades para describir, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo.

CON AYUDAS: A través de las sucesivas ayudas, el tutor propone orientaciones para mejorar esta tarea a partir del planteamiento de nuevas cuestiones, reflexiones y sugerencias.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Primera clase, que se corresponde con un Nivel 1.

### 15.2.3. Actividad AEP3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.42)

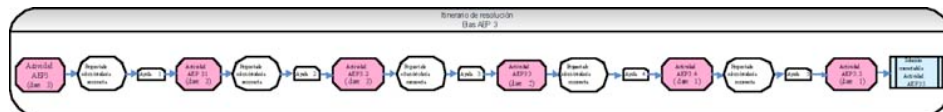


Figura 15.42: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.43)

**Tutorización (1ª ayuda):** “Si bien tu dibujo cumple aparentemente con lo que pide la actividad, revisa dos cuestiones. La primera: moviendo el punto  $P$ , la circunferencia deja de ser tangente a la circunferencia y pasa a ser secante (corta a la recta en dos puntos). La segunda: el orden de la construcción debe ser el siguiente: marcar la recta, marcar  $A$  fuera de ella y luego encontrar la circunferencia. Tú has encontrado la circunferencia primero y luego has marcado  $A$  sobre ella. Ayuda: piensa cómo debe ser las distancias entre el centro de la circunferencia que buscas y los puntos  $A$  y  $P$  respectivamente”

**Segunda versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.44)

**Tutorización (2ª ayuda):** “Lo que dices es correcto, buscamos un centro  $C$  que debe equidistar de  $A$  y de  $P$ ; ¿recuerdas cómo encontrar los puntos que cumplen esa condición? Más ayuda: si es necesario revisa la Actividad 5”



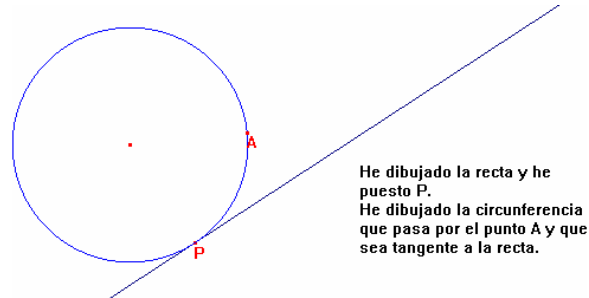


Figura 15.43: Primera versión

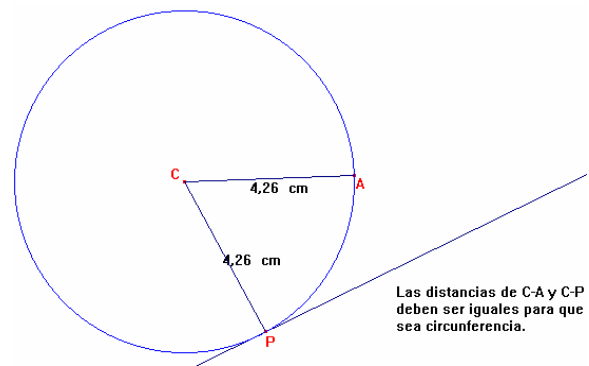


Figura 15.44: Segunda versión

**Tercera versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.45)

**Tutorización (3ª ayuda):** “C debe estar sobre la mediatriz de AP, eso está muy bien; pero también tiene que estar en una posición única para la cual la recta y la circunferencia resulten tangentes. Has ubicado esa posición a ojo, desplazando P sobre la mediatriz e intentando que quedaran tangentes. Debes mejorar eso para que no sea posible cambiar C de sitio y que se pierda así la relación de tangencia. Ayuda: Mira en tu última construcción cómo resultaría la recta PC respecto a la recta inicial.”

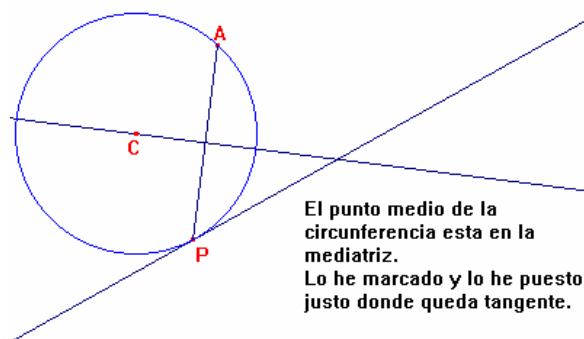


Figura 15.45: Tercera versión

**Cuarta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.46)

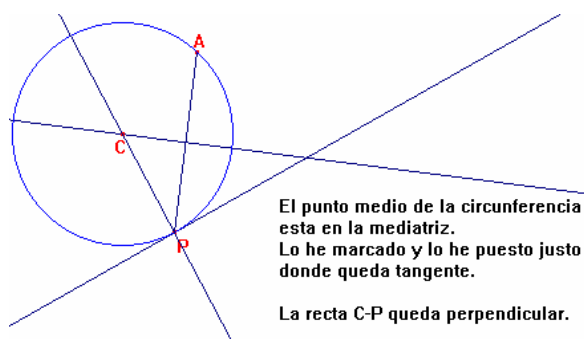


Figura 15.46: Cuarta versión

**Tutorización (4ª ayuda):** “Utiliza esa relación de perpendicularidad para encontrar de manera segura la posición de C.”

**Quinta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.47)

**Tutorización (5ª ayuda):** “La construcción está perfecta. Intenta mejorar ahora tu comentario teniendo en cuenta las siguientes sugerencias: ¿AP es una recta?”

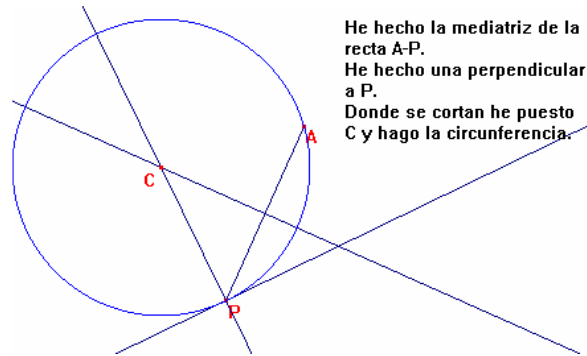


Figura 15.47: Quinta versión

*¿La perpendicular que trazas es perpendicular a P o perpendicular a la recta (ponle un nombre) pasando por P? ¿Has puesto C donde se cortan qué elementos? ¿Qué centro tiene la circunferencia que dibujas? ¿Por dónde pasa?''*

**Sexta versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.48)

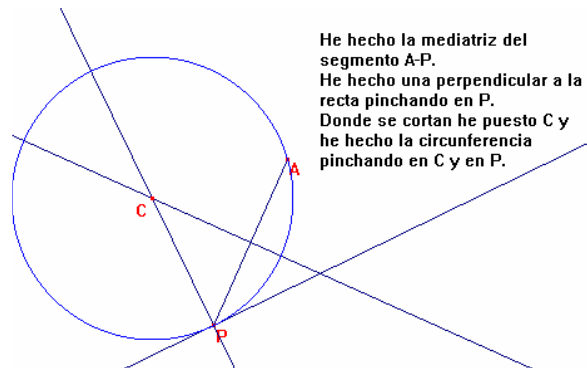


Figura 15.48: Sexta versión

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

- Análisis Coherencia intratextual:

El texto muestra un nuevo avance en cuanto a la coherencia.

En la primera versión, el texto es coherente, aunque describe un procedimiento que no es correcto como solución de la actividad.

En las siguientes, aparecen frases que dan respuesta a cuestiones planteadas por el profesor, aunque en algunos casos, las omisiones o la falta de informaciones más concretas dan lugar a ambigüedades (por ejemplo no se indica perpendicular a qué elemento, se hace referencia a la perpendicular a un punto, etc.).

En la última versión, y como respuesta a las orientaciones del tutor, el alumno ha podido reelaborar su comentario de manera coherente (aunque han sido muchas las ayudas que ha requerido).

No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta es correcta (insuficiencia de argumentos).

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No existen contradicciones explícitas entre las construcciones y los textos, pero por ser estos últimos de cierta vaguedad, podrían corresponderse con otras construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso.

■ **Análisis Ortografía:**

Como errores de ortografía, el alumno sigue sin utilizar tildes. Utiliza bien los signos de puntuación, lo que contribuye a textos más claros.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, se emplean notaciones para puntos y segmentos, y su utilización es correcta (se emplean mayúsculas para los puntos); lo que representa un avance.

En las sucesivas versiones, ante las orientaciones del docente, se observa un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas, lo que mejoran el texto.

■ **Análisis Vocabulario:** Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están mejor empleados que en las actividades anteriores: se emplean bien las expresiones “perpendicular”, “circunferencia”, “mediatriz”, “distancia”, etc.

Aunque en algunos casos aún no se utilizan de manera totalmente correcta, lo que da lugar a ambigüedades: “he hecho la perpendicular a P”, ...

Aparecen además, errores de vocabulario al denominar “punto medio” al centro de la circunferencia y “recta” a un segmento.

El uso del vocabulario no es óptimo, pero ha mejorado notablemente. Como se ha dicho antes, si bien el alumno presenta muchas dificultades y dudas respecto al uso del vocabulario geométrico, ha incorporado como estrategia, el recurrir a los nombres de las herramientas de Cabri que utiliza (por ejemplo, al trazar una perpendicular, que elige por su icono de Cabri, verifica el nombre que el programa asigna a dicha relación, para no cometer errores llamando por ejemplo paralela a dicha recta.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se recurre a la creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta (las propiedades que fundamentan la construcción ni se mencionan); básicamente porque el alumno no identifica esta instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema.

La elaboración de textos descriptivos del procedimiento, siguen ofreciendo gran dificultad para el alumno; de manera tal que requiere de varias ayudas por parte del tutor para llevar a cabo, de manera medianamente correcta, esa tarea.

■ **Valoración/ ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 1
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: En la primera versión, el alumno propone un modelo que no responde a las condiciones dadas en el enunciado (ubica el punto A sobre la circunferencia, una vez dibujada ésta, en vez de colocarlo antes para intentar hallar una circunferencia que lo contenga).

CON AYUDAS: Una vez que el tutor realiza la reflexión correspondiente y el alumno mejora el modelo.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno no identifica que debe recurrir a conceptos, propiedades y relaciones que le permitan hallar la circunferencia en cuestión; y propone una construcción aparente que deja de cumplir las condiciones ante la mínima modificación (es un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna).

CON AYUDAS: Para que el alumno arribe a las diversas nociones (conceptos, propiedades y relaciones) involucradas en la resolución, fue necesario un trabajo gradual consistente en sucesivas interacciones con el tutor. A través de dichas interacciones, el tutor propone una reflexión progresiva sobre dichas relaciones (cómo son las distancias del centro de una circunferencia a los puntos de la circunferencia, dónde está ubicado el centro de una circunferencia que pasa por dos puntos, cómo resulta la recta que pasa por C y por el punto de tangencia respecto a la recta tangente, etc.).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: En la primera versión, el alumno aplica una estrategia incorrecta para la construcción (propone un simple y aparente dibujo que no se fundamenta en relación geométrica alguna y que ni siquiera respeta las condiciones iniciales planteadas en el enunciado).

CON AYUDAS: Al igual que ha ocurrido con los conceptos, el tutor orienta al alumno de manera que pueda diseñar una estrategia cada vez más correcta. El alumno va proponiendo nuevas estrategias, en la medida que encuentra y analiza los conceptos y relaciones subyacentes a esas estrategias y procedimientos.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: En la primera versión, el alumno parece no controlar el proceso ni reflexionar sobre él; no propone modificaciones para verificar su construcción, no reflexiona respecto a si lo que ha hecho responde al enunciado de la actividad. Una vez más, transfiere esa tarea al tutor, como si sólo a él le correspondiera analizar la corrección o no de la propuesta (“¿está bien?”).

CON AYUDAS: No obstante, las sucesivas ayudas, permiten al alumno mejorar su nivel de reflexión: analiza relaciones, prueba distintos procedimientos y los verifica para dar respuesta a las cuestiones planteadas por el tutor. No aparecen las justificaciones que darían cuenta de porqué la construcción propuesta es correcta (validación/ justificación de la propuesta). Pero el tutor decide no avanzar en este sentido todavía, sino mejorar la descripción de los procedimientos.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno sigue evidenciando dificultades para describir, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo. No obstante, ha mejorado respecto a actividades anteriores.

CON AYUDAS: A través de las sucesivas ayudas, el tutor propone orientaciones para mejorar esta tarea a partir del planteamiento de nuevas cuestiones, reflexiones y sugerencias.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

El itinerario de resolución del alumno termina con la obtención una solución correcta para la actividad inicial, para lo que requirió de varias ayudas. No se propusieron en este caso diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Primera clase, que se corresponde con un Nivel 1.

#### 15.2.4. Actividad ACE1: Presentación profesor virtual- alumno y propuesta de trabajo

1. *Itinerario de resolución* (esquema):

No procede en este caso

2. **Itinerario de resolución** (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

**De:** lazaro@ext.unirioja.es

**Enviado:** Lunes, Marzo 7, 2005 12:07 pm

**A:** Guillermina Marcos “guillermina.marcos@alum.unirioja.es”

**Asunto:** versión de correo

Hola, me llamo Blas XXX, soy de logroño y tengo 15 años. Mis aficiones son el fútbol, salir con mis amigos y jugar a la consola. Mi equipo favorito es el Barça y vamos a ganar la liga y la champions, ¿De que equipo eres? Fdo: Blas

3. **Análisis de la Competencia Comunicativa:**

■ **Análisis Coherencia intratextual:**

Aunque el mensaje es coherente, y el alumno realiza su presentación, breve pero clara; no expone sus expectativas en relación al Proyecto.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial; deja incluso una pregunta planteada para continuar el diálogo en siguientes correos.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, casi todos ellos de utilización de espacios en relación a los signos de puntuación (después de comas, después de puntos); son más bien errores de mecanografía más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí.

Nota: para este primer correo, Blas consulta a la profesora presencial muchas dudas ortográficas intentando evitar hasta el último error. Valoramos positivamente esta preocupación, dado que indica que el alumno reconoce que la reconoce que la corrección ortográfica es también una parte importante; y aunque todavía no puede lograr esa corrección por sí mismo, ni recurre a herramientas informáticas como la revisión ortográfica (porque la desconoce), consulta varias veces a la profesora presencial para que su mensaje final no contenga errores.

■ **Análisis Vocabulario:** El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural y se trata de un mensaje breve, la elección de palabras y expresiones es apropiada.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso no se ha resuelto completamente, dado que si bien el alumno ha logrado hacer una sintética presentación personal, no expone sus expectativas en relación al Proyecto.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 0
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 5/9 (41,67%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

No corresponde en esta actividad.

### 15.2.5. Actividad ACE2

1. **Itinerario de resolución** (esquema):(ver Figura 15.49)



Figura 15.49: Itinerario de resolución

2. **Itinerario de resolución** (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico, primer envío*<sup>7</sup>:

Hola profesor,ya he resuelto la actividad y te la envio. FDO:BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(Observación:el alumno olvida adjuntar el archivo.)

**Tutorización:** el profesor contesta el correo indicando que el archivo no ha sido adjuntado.

*Texto de correo electrónico, segundo envío:*

Hola te vuelvo a enviar la actividad porque me has puesto que no te había llegado.

Viste la carrera de la F1,Alonso es el mejor y gana el Barça.

esor,ya he resuelto la actividad y te la envio.

FDO:BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.50)

<sup>7</sup>Aunque en los primeros casos, a modo de ejemplo, hemos incluido toda la información que contiene el correo electrónico enviado por el alumno (fecha y hora de envío, destinatarios, asunto, etc.); a partir de aquí, sólo incorporaremos los textos escritos por el alumno en el cuerpo de dichos correos electrónicos. En dichos textos se ha respetado la redacción y ortografía de los originales, de ahí la presencia de fallos ortográficos, omisión de algunas letras, etc.



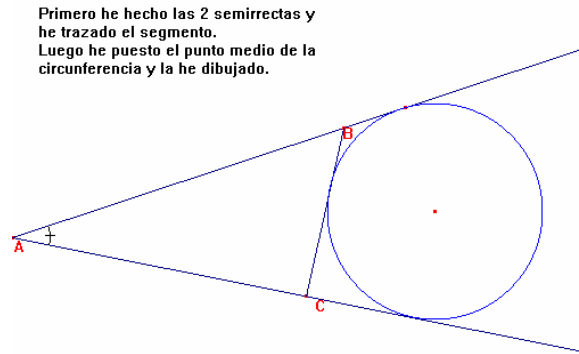


Figura 15.50: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “El docente realiza la reflexión sobre la propuesta de solución realizada por el alumno (que no es más que una falsa construcción, dado que se deforma y deja de cumplir las condiciones dadas en el enunciado: no es tangente al segmento ni a las semirrectas), recordando que las construcciones propuestas deben cumplir las condiciones solicitadas incluso al modificarla; y pregunta al alumno si recuerda en qué lugar se encontraban los centros de las circunferencias tangentes a ambas semirrectas.”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:* (Observación: en algunos casos, en que los textos de correo son muy breves o similares a los anteriores, hemos omitido su transcripción dado que no aportan nueva información.)

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.51)

**Tutorización (2ª ayuda):** Dado que el alumno no identifica el lugar geométrico de los centros de las circunferencias tangentes a ambas semirrectas como la bisectriz al ángulo que forman, pero sí encuentra la relación de las distancias de dicho centro a ambas semirrectas, la ayuda se realiza en esa línea, de manera que al alumno pueda seguir desarrollando su solución a partir de las características que ha encontrado: “Dices que el centro de la circunferencia que buscas debe estar a igual distancia de ambas semirrectas y eso está muy bien, piensa ahora en qué lugar geométrico se encuentran los puntos que equidistan de ambas semirrectas (si necesitas más ayuda, puedes revisar la Actividad 16)<sup>8</sup>. Analiza también cómo debe ser la distancia de l centro de la circunferencia al segmento BC.”

**Tercera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola profesor, ya he resuelto la actividad y era difícil.

<sup>8</sup>El profesor sugiere recurrir a la revisión de una Actividad resuelta anteriormente, en la que aparecía la propiedad en cuestión y el alumno recurre a ello para asociar el lugar geométrico en cuestión con la bisectriz.

Primero he hecho las 2 semirrectas y he trazado el segmento. Luego he puesto el punto medio de la circunferencia y la he dibujado.

Me he fijado probando y he visto que el punto medio de la circunferencia debe estar a la misma distancia de las dos y he puesto el segmento después para que también quede tangente.

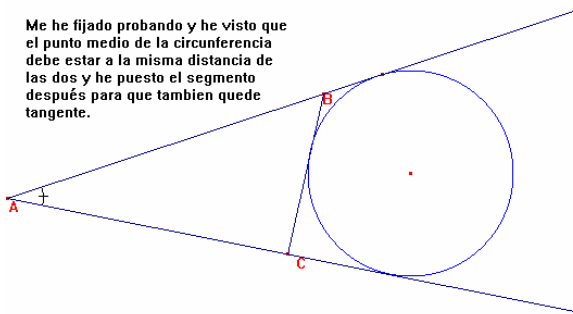


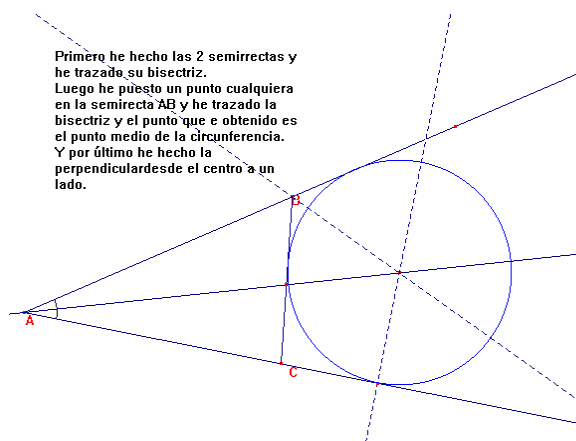
Figura 15.51: Segunda versión

Un compañero me ha dado una pista de lo de la bisectriz.

¿Cuáles son tus aficiones?.

FDO:BLAS

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.52)



Primero he hecho las 2 semirrectas y he trazado su bisectriz. Luego he puesto un punto cualquiera en la semirecta AB y he trazado la bisectriz y el punto que se obtiene es el punto medio de la circunferencia. Y por último he hecho la perpendicular desde el centro a un lado.

Figura 15.52: Resolución propuesta

**Tutorización (1ª diversificación):** “¿Podrías enunciar la propiedad de las bisectrices que te ha permitido resolver el problema?”

**Cuarta versión.** Texto de correo electrónico :

Hola profe, ¿viste el partido del Barça? Empato de suerte y el Madrid es penoso mira que ganar 1-2 contra el Albacete.

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.53)

**Es una recta que parte al ángulo en 2 partes iguales y que a su vez hace de centro de la circunferencia tangente a los lados, la perpendicular hace de radio**

Figura 15.53: Resolución propuesta

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo, que varias veces es incorrecto porque ha consistido en la realización de un dibujo que aparentemente cumple las condiciones solicitadas.

No aparece la justificación de por qué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. En los primeros intentos de solución, esa justificación no aparece escrita porque no ha existido (el alumno no realiza una construcción basada en propiedades sino un dibujo que pierde esas condiciones aparentes al producir variaciones sobre él).

Por esta razón, los primeros textos son coherentes respecto a la solución gráfica propuesta, pero incorrectos como propuesta de solución y asimismo la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

El profesor indica el fallo en la construcción inicial, y el alumno comprende en qué consiste, intenta por sugerencia del docente, encontrar alguna particularidad del centro de la circunferencia que busca y encuentra (por tanteo) que el mismo debe equidistar de ambas semirrectas; y posteriormente que esa distancia también debe coincidir con la distancia al segmento; identificando ese lugar geométrico con las bisectrices de los ángulos en cuestión (después de revisar una actividad resulta con anterioridad que involucraba dichos conceptos).

El alumno muestra una preocupación por describir el proceso que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso.

Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que conoce respecto de la bisectriz en un texto que incluye la propiedad en cuestión, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las “propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo” (se basa incluso para elaborar el texto en la actividad de referencia cuya revisión ha propuesto el tutor como ayuda). No se realiza una contextualización de la propiedad para el caso de la solución propuesta.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

Los textos de los mensajes son adecuado y amenos: adecuados al destinatario y mantienen un tono cortés. Se observa un avance en la construcción de la relación entre profesor y alumno en este caso a partir del intercambio de opiniones sobre temáticas extracurriculares como el deporte, los videojuegos y las aficiones en general lo que favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición; dicho intercambio de opiniones acompaña de manera paralela, el proceso de resolución de la actividad.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen algunos errores de ortografía: varios de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.), de espacios (entre palabras, después de signos de puntuación, etc.), de acentuación y de omisión o alteración de letras en algunas palabras.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien el escaso uso que se hace del mismo es adecuado, es justamente el hecho de que no se utilice más este lenguaje el que le da vaguedad y ambigüedad al discurso (no se nombra el centro de la circunferencia, ni los ángulos, ni el punto considerado sobre la semirrecta AB, ni el punto de tangencia, etc.)

■ **Análisis Vocabulario:**

Aparece un fallo reiterado respecto al uso del término geométrico “punto medio” para hacer referencia al centro de una circunferencia (aunque las últimas dos veces que lo menciona lo hace de manera correcta). Aparecen otros términos que sí se emplean bien al ser utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (semirrecta, circunferencia, ángulo, perpendicular, tangente, radio, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; la actividad inicial ha resultado inabordable para el alumno y han sido necesarias numerosas ayudas para que consiguiera arribar a una solución correcta. De esta manera, el enunciado inicial - de tipo problema abierto- se ha convertido en un ejercicio algorítmico.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia: 1*

- *Componente Cortesía y Adecuación*: 1
- *Componente Ortografía y Vocabulario*: 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 0
- *Máximo asignado*: 12
- *Ponderación general*: 3/12 (25 %)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1).

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones iniciales dadas a un modelo geométrico que las respeta (aunque en este caso esta fase resultaba muy sencilla dado que consistía simplemente en el trazado de dos semirrectas secantes y de un segmento cuyos extremos pertenecen cada una de dichas semirrectas).

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

CON AYUDAS: El alumno no identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema. Fueron necesarias varias ayudas por parte del docente y alguna por parte de un compañero para que lograra hacerlo; fue también la interacción con un compañero la que le permitió identificar que era necesario trazar una perpendicular para encontrar la circunferencia en cuestión).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

CON AYUDAS: Además de no identificar los conceptos involucrados, una vez que mediante interacciones con el profesor los identifica, el alumno tampoco es capaz de aplicar una estrategia correcta que involucre esos conceptos y relaciones sin ayuda. En las primeras soluciones propuestas traza la circunferencia por tanteo; en las siguientes presenta dificultades para identificar condiciones, relaciones, propiedades que le permitan diseñar una estrategia correcta y en la última fue necesaria la ayuda de un compañero para transferir esos conceptos y relaciones a este caso concreto. El alumno finalmente resuelve un ejercicio algorítmico.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

CON AYUDAS: Respecto a la primera solución propuesta, fue necesaria la intervención del tutor para que el alumno detectara su invalidez mediante variaciones en la construcción propuesta. El grado de reflexión es mínimo y el de control es prácticamente nulo; el alumno es incapaz de controlar el proceso con autonomía y requiere de mucha ayuda para ello.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de describir, utilizando lenguaje verbal, los procesos llevados a cabo (aunque es cierto que dicha tarea se vuelve bastante sencilla con tantas ayudas y queda reducida a una descripción lineal, más bien de tipo técnico que no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso).

CON AYUDAS: Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno enumera todo lo que conoce respecto de la bisectriz en un texto que incluye la propiedad en cuestión, pero este hecho no es destacado por parte del alumno; más bien la propiedad aparece allí como parte de las “propiedades conocidas con anterioridad sobre la bisectriz de un ángulo” (se basa incluso para elaborar el texto en la actividad de referencia cuya revisión ha propuesto el tutor como ayuda). No se realiza una contextualización de la propiedad para el caso de la solución propuesta.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.2.6. Actividad ACE3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.54)

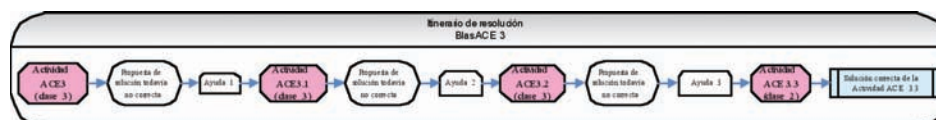


Figura 15.54: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico, primer envío:*

Hola profe,¿que tal las vacaciones? yo mal porque son muy cortas.  
Como crees que quedaran el Barça y el Madrid.Bueno un saludo.  
BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.55)

**Tutorización (1ª ayuda):** *“El procedimiento que has hallado es correcto, pero intenta describirlo mejor, para que quede más claro. Fíjate que en lo que has escrito, por ejemplo, no queda muy claro a qué mediatriz te refieres en cada caso. Falta además, que expliques porqué el procedimiento que propones es correcto.”*

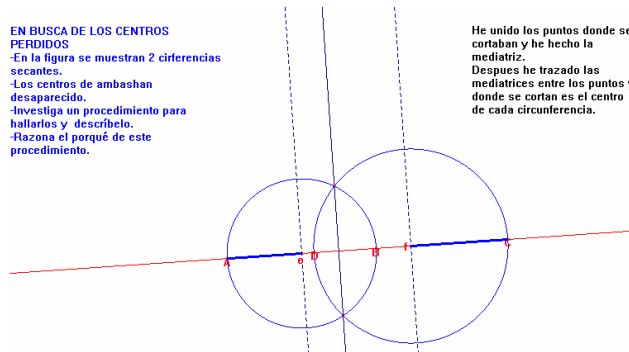


Figura 15.55: Primera versión

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:* Hola profe, espero que ahora ya este bien. Bueno un saludo. BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.56)

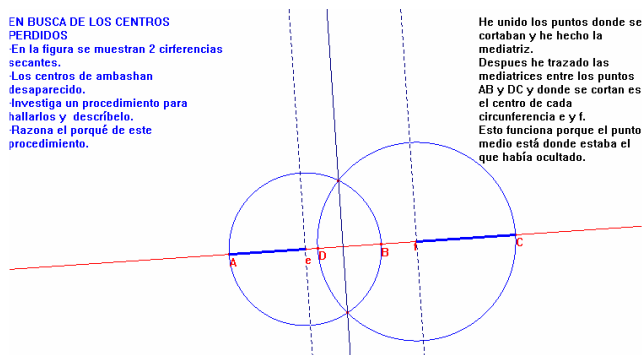


Figura 15.56: Segunda versión

**Tutorización (2ª ayuda):** “*Tu explicación ha mejorado y resulta ahora mucho más clara. Lo de verificar que los centros que has encontrado coinciden con los verdaderos está bien, pero intenta explicar cuál es la propiedad que hace que esto sea así.*”

Tercera versión. Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.57)

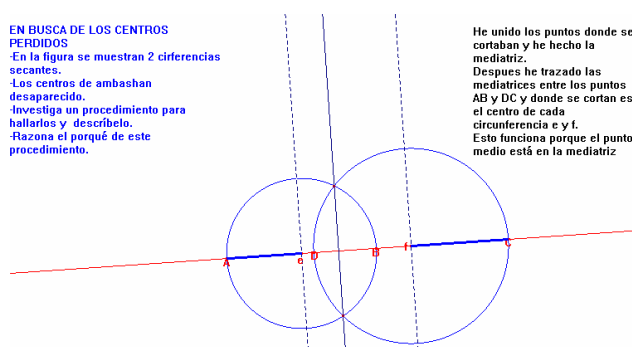


Figura 15.57: Resolución propuesta

**Tutorización (3ª ayuda):** “Ahora sí estás intentando explicar esa propiedad que has aplicado. Intenta hacerlo de manera más clara; puedes ayudarte completando la siguiente frase: Esto funciona porque los centros de dos circunferencias secantes están en la mediatriz del segmento. . . ”

Cuarta versión. Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.58)

**Esto funciona porque los centros de dos circunferencias secantes están en la mediatriz del segmento que forman los puntos donde se cruzan.**

Figura 15.58: Resolución propuesta



### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

El alumno describe el procedimiento propuesto a través de un texto que en principio resulta vago y ambiguo, dando lugar a distintas interpretaciones (no queda claro a qué mediatriz se refiere, a qué puntos, etc.).

Por otra parte, la descripción carece de argumentos que la justifiquen; incluso ante el pedido por parte del tutor de estas razones, el alumno sólo argumenta la validez de su procedimiento mediante la verificación de la coincidencia entre los centros hallados y los que había ocultado al dibujar las circunferencias. No hace referencia a propiedades o relaciones; no se evidencia que el alumno reconozca que los procesos de justificación/ argumentación son parte de la resolución de la actividad.

En la última versión, intenta dar una explicación de este tipo (“Esto funciona porque el punto medio está en la mediatriz”), pero nuevamente la misma está incompleta y resulta imprecisa y ambigua y será necesaria una nueva ayuda para completar el enunciado de esta propiedad.

#### ■ **Análisis Coherencia extratextual:**

Existe coherencia entre los textos y las soluciones gráficas, aunque por ser los primeros vagos e imprecisos, podrían dar lugar a diferentes construcciones.

#### ■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del primer mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye saludo, interés personal, y mantiene el intercambio respecto a otras temáticas como el fútbol) y se mantiene el respeto correspondiente a una relación profesor-alumno.

Los textos de correo van siendo cada vez más breves en la medida que el alumno avanza en la resolución, dado que se realizan en intervalos cortos de tiempo y para dar respuesta a cuestiones planteadas en relación al versión anterior.

#### ■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen algunos errores de ortografía: varios de puntuación (utilización de comas, puntos, etc.), de espacios (entre palabras, después de signos de puntuación, etc.), de acentuación y de omisión o alteración de letras en algunas palabras (“cirferencias”).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en el primer versión el uso que se hace del mismo es prácticamente nulo, es justamente el hecho de que no se utilice más este lenguaje el que le da vaguedad y ambigüedad al discurso (no se nombra los centros de la circunferencias, ni los puntos, ni los segmentos considerados, etc.).

Ante el pedido del tutor, el alumno incluye notaciones geométricas y, aunque no lo hace de manera completa ni óptima, con dicha inclusión mejora su discurso.

#### ■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, perpendicular, secantes, etc.); aunque sigue utilizando en una ocasión la

expresión “punto medio” para hacer referencia al centro de la circunferencia. Aunque el vocabulario geométrico es correcto, como se ha dicho más arriba, el hecho de no utilizar notaciones convenientes genera imprecisión.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

En este caso, el alumno no ha tenido dificultad para hallar la resolución gráfica a la actividad, de hecho ha conseguido hacerla sin ayudas.

Sin embargo existen problemas comunicativos al expresar por escrito el procedimiento propuesto. Por un lado por la no utilización de notaciones geométricas y por otro, por no identificar que los procesos de justificación/argumentación son parte de la resolución de la actividad.

El primer problema (el no uso de notaciones geométricas) podría haber sido solucionado explicitando más la descripción (utilizando por ejemplo expresiones del tipo: “mediatriz del segmento que determinan los puntos de intersección entre ambas circunferencias” que si bien no emplea notaciones geométricas resulta clara y da lugar a una única interpretación). Pero este tipo de solución no aparece y el tutor sugiere entonces la incorporación de notaciones para mejorar el discurso. Ante este pedido, el alumno mejora su producción.

Respecto al segundo problema, la cuestión no es solamente que el alumno no sepa cómo justificar sino que no identifica que los procesos de justificación-argumentación son parte de la resolución de la actividad, con lo cual ni siquiera reconoce como problema esta dificultad. Fueron necesarias tres ayudas para que el alumno pudiera cumplimentar este requisito: en el 1º intento verifica gráficamente la construcción, en el 2º enuncia una propiedad de manera muy imprecisa y en el 3º logra el enunciado definitivo con mucha ayuda del tutor.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 0
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 4/12 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta. Copia el enunciado de la actividad en su archivo, aunque no era necesario, proceso que le ayuda a interiorizar esas condiciones.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: circunferencias secantes, mediatriz del segmento determinado por los puntos de corte. En particular la propiedad de esta mediatriz de contener los centros de las circunferencias no la conocía, o al menos no la recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (las circunferencias pueden cambiar de posición o tamaño pero deben ser siempre secantes), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos.

Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: marca el segmento que une los puntos de intersección de las circunferencias, traza la mediatriz a dicho segmento, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Aunque la construcción definitiva no fue inmediata y, por el contrario, requirió de varios intentos y pruebas por parte del alumno; durante este proceso el alumno prefiere agotar las instancias propias antes de solicitar ayuda y logra de hecho la construcción correcta, aunque no su justificación (a la que ni siquiera considera como parte de la solución).

CON AYUDAS: Sólo a través de las ayudas por parte del tutor, el alumno identifica la justificación del procedimiento como parte de la resolución y logra, también después de varios intentos y de recibir varias orientaciones por parte del docente, enunciar la propiedad que justifica su construcción. Es decir, que si bien el alumno ha controlado el proceso de solución gráfica, han sido necesarias varias ayudas para que lograra controlar y reflexionar el proceso de explicación y argumentación de dicha solución.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

CON AYUDAS: Fueron necesarias varias ayudas para que el alumno lograra explicitar de manera clara su procedimiento y la justificación de su idoneidad. Respecto a este último aspecto, fueron necesarias dos fases; una primera de reconocimiento de esta necesidad y una siguiente para lograr esta argumentación de manera correcta.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

El alumno no resuelve ninguna diversificación.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.2.7. Actividad ACE4

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.59)

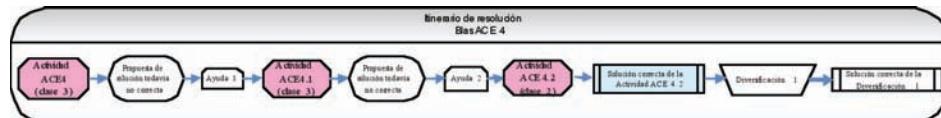


Figura 15.59: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:* Hola profe ¿Que tal?,yo bien porque ganó ayer el Barça,crees que el madrid podra alcanzar al Barça ,yo creo que no.Un saludo.

BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.60)

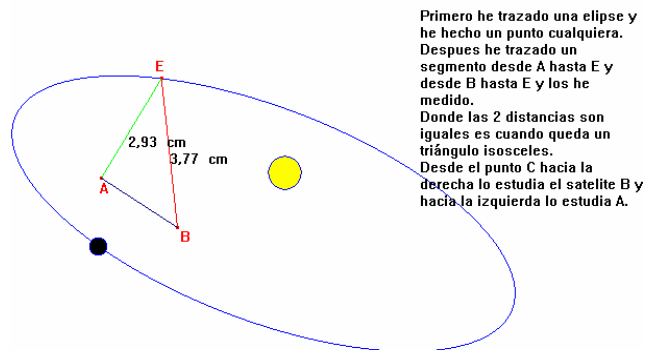


Figura 15.60: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “Estás muy cerca de la solución correcta, pero haces referencia a un punto C que no queda claro cuál es porque no aparece en el dibujo; ¿podrías explicar dónde se encuentra y pensar de qué manera hallar exactamente su posición?”

**Segunda versión.**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.61)

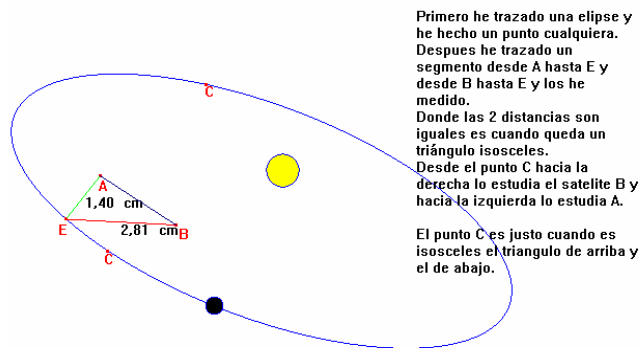


Figura 15.61: Segunda versión

**Tutorización (2ª ayuda):** *El punto C está bien ubicado pero si te fijas es posible moverlo de esa posición en que lo has ubicado, ¿podrías encontrar una manera de hallar el punto C sólo a partir de los puntos A y B, de tal manera que su posición no pudiera modificarse? (la mediatriz puede ayudarte)”*

**Tercera versión.** *Texto de correo electrónico:* Hola profe ¿Que tal?,creo que ya lo he terminado.Un saludo. BLAS

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.62)

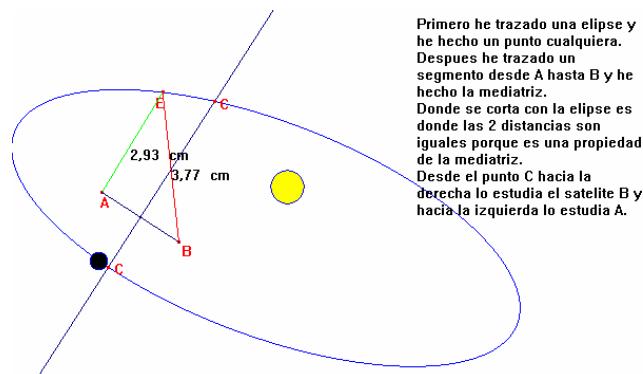
3. **Análisis de la Competencia Comunicativa:**

■ **Análisis Coherencia intratextual:**

1ª versión: Se describe linealmente el proceso llevado a cabo a través de un texto que resulta coherente, salvo por el hecho de que se hace referencia a un punto (C) que no aparece en la construcción, lo que da lugar a diversas interpretaciones y a ambigüedades.

2ª versión: Ante el pedido de explicitar la posición de dicho punto y la manera de hallarla, incorpora el punto a la construcción, aunque no de manera correcta porque encuentra una ubicación de C susceptible de modificaciones. Sin embargo, cuando en el texto caracteriza dicha ubicación teniendo en cuenta las condiciones del triángulo que determina ese punto C con A y B.

3ª versión: Ante el nuevo pedido, el alumno logra dar respuesta específicamente a lo solicitado, identificando que es la mediatriz de AB la que le permite determinar en forma inequívoca la ubicación del punto C. Incorpora en esta versión, la descripción de un procedimiento más directo, que permite obtener



Primero he trazado una elipse y he hecho un punto cualquiera. Después he trazado un segmento desde A hasta B y he hecho la mediatriz. Donde se corta con la elipse es donde las 2 distancias son iguales porque es una propiedad de la mediatriz. Desde el punto C hacia la derecha lo estudia el satélite B y hacia la izquierda lo estudia A.

Figura 15.62: Resolución propuesta

la posición de P utilizando sólo la mediatriz y prescindiendo del triángulo ABE; aunque fue necesario el trabajo con dicho triángulo (construcción, mediciones, comparaciones, análisis del tipo de triángulo en cada caso) para arribar a esta propuesta.

Un avance significativo en relación a las actividades anteriores, es que el alumno identifica la justificación a través de propiedades como parte de la resolución de la actividad: hace referencia a la propiedad de la mediatriz sin que el profesor lo solicite y aunque lo hace con un enunciado muy sencillo, que desde ya podría mejorarse, el mismo resulta acorde y está contextualizado en la resolución.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción. En la segunda versión, cuando el alumno escribe “El punto C es justo donde es isosceles el triangulo de arriba y de abajo”, existe una incoherencia entre texto y construcción, dado que en la construcción C es un punto móvil sobre la elipse. El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción. En la segunda versión, cuando el alumno escribe “El punto C es justo donde es isosceles el triangulo de arriba y de abajo”, existe una incoherencia entre texto y construcción, dado que en la construcción C es un punto móvil sobre la elipse.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador). El tema fútbol, sigue siendo el que acompaña los intercambios a través del correo electrónico.

■ **Análisis Ortografía:**

En cuanto a los errores de ortografía, el alumno no usa tildes (sólo una en uno de los textos de correo) y persisten las dificultades con los espacios después de los signos de puntuación.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los puntos, aunque todavía no se utiliza demasiado este tipo de lenguaje.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, elipse, distancia, triángulo isósceles, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Si bien recién en la tercera versión de la solución el alumno arriba al procedimiento que le permite encontrar de manera correcta la posición crítica que limita los casos en que el cometa es estudiado por uno y otro satélite; en las versiones anteriores el alumno no se queda paralizado ante la actividad y pone en juego estrategias y conceptos que le permiten caracterizar dicha posición (“Desde el punto C hacia la derecha lo estudia el satélite B y hacia la izquierda lo estudia A. El punto C es justo cuando es isósceles el triángulo de arriba y el de abajo”) aunque todavía no logra determinarla geoméricamente de manera correcta.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, ha mejorado no sólo su enunciado -se enuncia la propiedad de una forma adecuada a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores- sino también el hecho de que la incorporación de la misma a la solución de la actividad ha sido iniciativa del alumno y no fue necesaria la solicitud por parte del tutor.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 1
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 6/12 (50%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

SIN AYUDAS: El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Si bien el alumno no identifica en primera instancia que son la mediatriz y su propiedad, las que posibilitan resolver la actividad; encuentra conceptos y relaciones (triángulo isósceles, distancia entre puntos, equidistancia de los extremos del lado desigual al vértice restante, distancia entre puntos, etc.) para caracterizar la posición del punto en el que el cometa deja de ser estudiado por uno de los satélites para ser estudiado por el otro, aunque al principio no logra determinarla geoméricamente de manera correcta. Pero es el trabajo utilizando estos conceptos, conjuntamente con las ayudas del tutor, el que le permiten arribar en la tercera versión de la solución, a los conceptos, relaciones y propiedades en cuestión.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica estrategias adecuadas. Consideramos muy importantes los primeros intentos de análisis a través de la construcción del triángulo determinado por los satélites y el cometa (ABE) y las mediciones realizadas. Estas le han permitido caracterizar el punto C en cuestión y poseer más elementos para, en las versiones siguientes, no sólo caracterizar su ubicación sino también hallarla en forma inequívoca mediante el trazado de la mediatriz de AB. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto E, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (1<sup>a</sup> y 2<sup>a</sup> versión: la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino del tipo de triángulo que queda determinado en cada caso, siendo el caso del triángulo isósceles el caso límite, 3<sup>a</sup> versión: relación de esa posición con la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, en la tercera versión traza la mediatriz, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

CON AYUDAS: La segunda ayuda por parte del tutor, lleva al alumno a pensar cómo determinar correctamente esa posición de C sin que la misma sea susceptible de cambios y más aún, a intentar hacerlo sólo a partir de los puntos A y B. Estas ayudas, conjuntamente con todo el trabajo anterior realizado por el alumno, le permiten arribar al procedimiento definitivo.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y justificarlos; incluso en este caso, la incorporación de



la propiedad para justificar la propuesta, es iniciativa del alumno. Describe además, en todo momento, el proceso de resolución llevado a cabo, utilizando lenguaje verbal.

CON AYUDAS: Pero no detecta que en la 2ª versión, la posición propuesta para C, aunque bien caracterizada, es susceptible de modificaciones en la solución gráfica; la ayuda del tutor lo orientó a solucionar ese error en la tercera versión.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación (enunciar la propiedad de la mediatriz que justifica la construcción propuesta) aunque ni siquiera fue necesario que el tutor lo solicitara.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.2.8. Actividad ACE5

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.63)

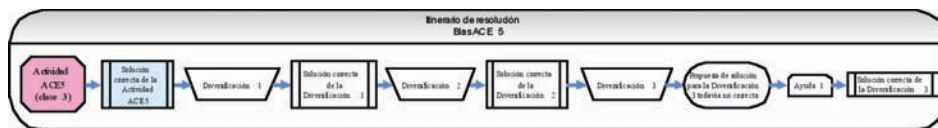


Figura 15.63: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola profesor ¿qué tal?, ¿como crees que quedara el partido del Barça-Albacete? ¿Y el del Madrid? ¿Te gustan los videojuegos?

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.64)

**Tutorización (1ª diversificación):** *“La relación que has encontrado entre las áreas está muy bien, también es cierto que los segmentos que has medido no cumplen ninguna relación al sumarlos; pero fíjate bien en el triángulo rojo que queda determinado en tu construcción por esos segmentos, ¿de qué tipo de triángulo se trata? ¿qué relación se cumplirá para las tres medidas que has considerado? Otra sugerencia: ten en cuenta la ortografía, aunque a veces crean que no, ¡en la clase de Matemáticas, también es importante!”*

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:* Hola profesor te vuelvo a enviar la actividad a ver si está bien.

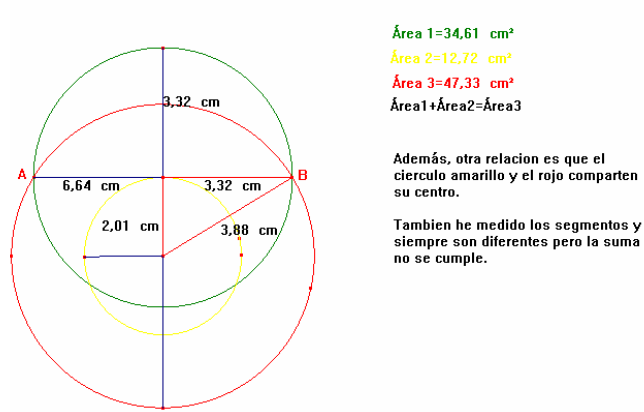


Figura 15.64: Primera versión

¿Viste el gol de Eto, o? Es un crack. ¿te gustan los videojuegos?

Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.65)

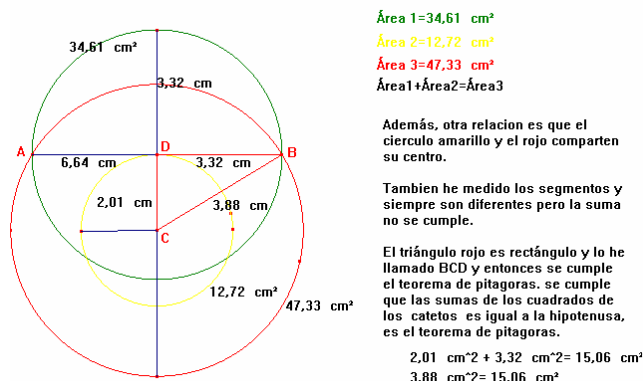


Figura 15.65: Segunda versión

**Tutorización (2ª diversificación):** “La relación que has encontrado es correcta, piensa ahora qué relación hay entre los segmentos BC, CD y BD y las circunferencias. ¿Podrías relacionar esto con la relación entre las áreas?”

Tercera versión.

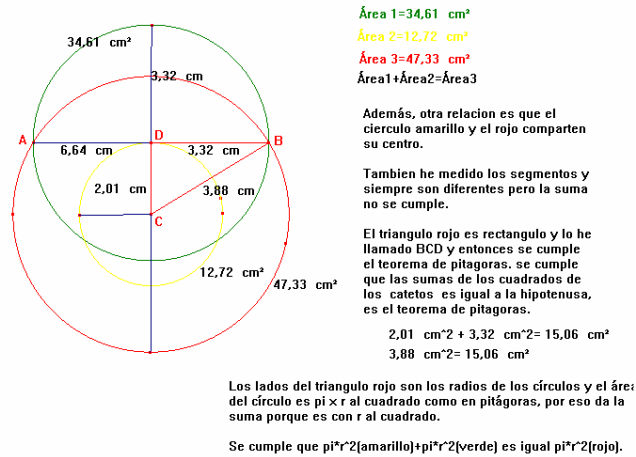


Figura 15.66: Resolución propuesta

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.66)

**Tutorización (3ª diversificación):** “*Tu explicación está muy bien; una última cuestión: ¿podrías explicar por qué el triángulo BCD es rectángulo?*”

Cuarta versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.67)

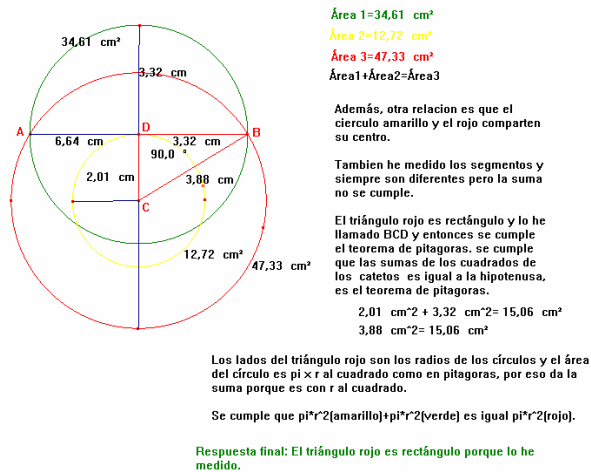


Figura 15.67: Resolución propuesta

**Tutorización (1ª ayuda de la 3ª diversificación):** “*Recuerda que medir te sirve para apoyar o verificar una idea pero no para justificar; que la medida del*

ángulo es de  $90^\circ$  es cierto pero intenta analizar porqué razón, piensa en tu primera construcción, ¿cómo ha aparecido el segmento AB?”

Quinta versión<sup>9</sup>.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.68)

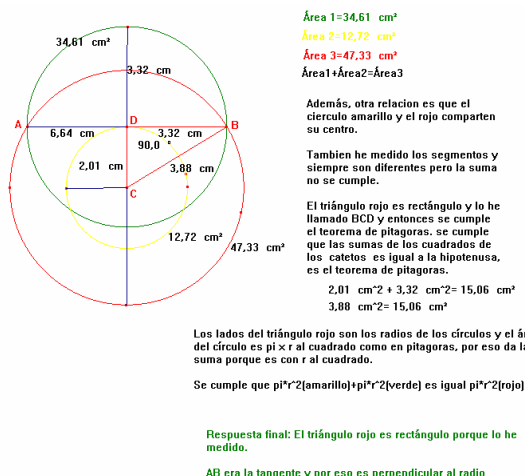


Figura 15.68: Resolución propuesta

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

1ª versión: El alumno realiza correctamente la construcción (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) pero no la describe (en este caso no era un requisito de la actividad) y como sabe que debe encontrar una relación mide todo lo que puede (segmentos que coinciden con los radios, con los diámetros, áreas) e intenta encontrar alguna particularidad en esas medidas. Así encuentra la relación entre las áreas, que los segmentos que ha medido no guardan relación de suma, y que dos de los círculos son concéntricos (aunque esto se cumple por construcción). Escribe todo estas relaciones encontradas de manera clara.

2ª versión: El alumno, por sugerencia del tutor, analiza el triángulo que ha determinado en su construcción y cuyos lados ya ha medido y encuentra que se trata de un triángulo rectángulo y que se cumple entonces la relación pitagórica. Escribe un texto muy claro y coherente explicando estas cuestiones y acompaña su explicación con cálculos que incorpora al texto. Aunque en lo que escribe se refiere a hipotenusa en vez de hipotenusa al cuadrado, se puede considerar que se trata de un olvido dado que en los cálculos lo aplica correctamente.

<sup>9</sup>Para arribar a esta respuesta, además de tener en cuenta la sugerencia del tutor, el alumno ha realizado un intercambio con un compañero al respecto; y fue su compañero quien le recordó una propiedad que el alumno no recordaba o no sabía.

3ª versión: Ante el pedido del tutor, el alumno analiza y explica de manera clara y coherente, la relación entre los lados del triángulo BCD y los radios de los círculos y vincula esta relación con la existente entre las áreas.

4ª versión: En un texto, el alumno justifica que el triángulo BCD es rectángulo a través de una medición; aunque no tiene validez como justificación, el texto es coherente.

5ª versión: Se explicita la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras).

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. En todos los casos, existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes siguen manteniendo la cortesía y la adecuación; aunque también se observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador), incluso envía algunos mensajes sin texto de correo.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen errores de ortografía, faltan tildes (en círculo, relación, también, etc.) pero aun así representa un avance respecto a actividades anteriores en las que el alumno directamente las ignoraba (en este caso las utiliza al menos alguna vez: área, además). De todos modos el tutor en una de sus intervenciones sugiere revisar la ortografía y en las siguientes versiones el alumno mejora bastante, incorporando las tildes en los textos nuevos.

El alumno utiliza muy bien los signos de puntuación, lo que contribuye a que las ideas queden claras dando lugar a una mayor coherencia del discurso.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, los puntos y para el triángulo analizado (esta notación para el triángulo es incorporada por el alumno en la 2ª versión para mejorar su explicación); todavía es mejorable, pero se nota un avance.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (círculo, radio, área, punto, tangente, perpendicular, hipotenusa, triángulo rectángulo, catetos, etc.). El alumno llama ahora correctamente al centro de la circunferencia (en resoluciones anteriores empleaba la expresión “punto medio” para referirse a él).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Se trata de un alumno que habitualmente presenta dificultades para el aprendizaje de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular; de hecho no dispone de tantos conocimientos geométricos previos como sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). No obstante, quizá esa carencia respecto a los demás, le ha hecho interiorizarse de muchas de las ventajas que le ofrece Cabri y utiliza esas herramientas en forma exhaustiva:

mide, calcula, etc. El aprovechamiento de estas posibilidades, le ayudan a indagar sobre la situación planteada, haciendo que no se sienta “desarmado” ante ella y pueda abordarla.

De hecho en este caso, en la primera versión, mide todo lo que puede intentando buscar alguna regularidad y así encuentra la relación entre las áreas; y en la 2ª versión calcula para corroborar que se cumple el Teorema de Pitágoras en un triángulo que él mismo había señalado y medido en la versión anterior, todavía sin notar que los lados del mismo coincidían con los radios de los círculos.

El uso de Cabri, le ofrece posibilidades para abordar la resolución gráfica pero también de ir comunicando en forma de texto lo que hace, lo que encuentra, etc. con seguridad y entusiasmo.

Al referirse por ejemplo, al triángulo determinado por los radios (particularidad que en principio el alumno no nota), supera ese escollo comunicativo utilizando notación geométrica para dicho triángulo e incluso utilizando los colores como referencia; lo mismo hace con las áreas, a través de un código de colores hace referencia a ellas sin ambigüedades y de manera clara y coherente.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, proponiendo una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 8/12 (66,66%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Se trata de un alumno que habitualmente presenta dificultades para el aprendizaje de las Matemáticas en general y de la Geometría en particular; de hecho no dispone de tantos conocimientos geométricos previos como

sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). Por esta razón, mientras para sus compañeros, actividades como esta involucran muchos conceptos y algunos procedimientos ya conocidos; para Blas resulta casi todo nuevo, dado que no cuenta con esa información previa, al menos de manera disponible<sup>10</sup> Utilizamos el término disponible, para hacer referencia a conocimientos previos que aunque hayan sido trabajados por el alumno en instancias previas (cursos anteriores por ejemplo), no están disponibles en el sentido de que el alumno o bien no los recuerda o bien no puede transferirlos a otros contextos. En este caso, es impensado que el alumno no haya trabajado anteriormente con conceptos como el de área, pero en principio le resulta imposible seleccionarlo por sí solo, como uno de los parámetros a tener en cuenta y comparar. Toma esa decisión, a partir de las herramientas de las que dispone en el software. . No obstante, quizá esa carencia respecto a los demás, le ha hecho interiorizarse de muchas de las ventajas que le ofrece Cabri y utiliza esas herramientas en forma exhaustiva: mide, calcula, etc. El aprovechamiento de estas posibilidades, le ayudan a indagar sobre la situación planteada, haciendo que no se sienta “desarmado” ante ella y pueda abordarla. De hecho en este caso, en la primera versión, mide todo lo que puede intentando buscar alguna regularidad y así encuentra la relación entre las áreas Mientras, casi todos los alumnos seleccionan primero los conceptos y luego las herramientas a utilizar; Blas indaga primero qué herramientas que le ofrece Cabri (medir longitudes, medir área, medir áreas, calcular) y son esas mismas herramientas las que le permiten luego seleccionar conceptos involucrados. Es decir, que el trabajo con Cabri, favorece en este caso, el proceso de transferencia de conceptos y relaciones previas a la resolución de la actividad

CON AYUDAS: En la 2ª versión, por sugerencia del tutor, analiza el triángulo que él mismo había señalado y medido en la versión anterior, encontrando que el mismo es rectángulo y relacionando (aquí sí por sí mismo) este tipo de triángulos con el Teorema de Pitágoras. Calcula para corroborar que se cumple dicho Teorema en el triángulo en cuestión. En cuanto a la relación de perpendicularidad entre tangente a la circunferencia y radio, necesitó de la ayuda de un compañero para identificar dicha propiedad, que no conocía.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: La pregunta formulada es abierta (“¿Qué relación. . .”) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios, perímetros y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido. Encuentra en la 1ª versión de resolución la relación general entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y la enuncia.

CON AYUDAS: En la 1ª diversificación, el tutor lo orienta a analizar qué ocurre con el triángulo “rojo” y entonces el alumno detecta que es rectángulo, lo vincula con el Teorema de Pitágoras y calcula para corroborar que esta relación se cumple en dicho triángulo.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción; encontrando una solución para la actividad inicial sin necesidad de ayudas.

CON AYUDAS: A través de la interacción con el tutor a través de las diversificaciones, el alumno avanza en el grado de reflexión, encontrando conexiones que en principio no había detectado y justificando las relaciones: relaciona los lados del triángulo con los radios de los círculos e intenta, ante el pedido del tutor, vincular esta cuestión con la relación que había obtenido para las áreas.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto SIN AYUDAS: Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas.*

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver tres diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.

### 15.2.9. Actividad ACE6

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.69)

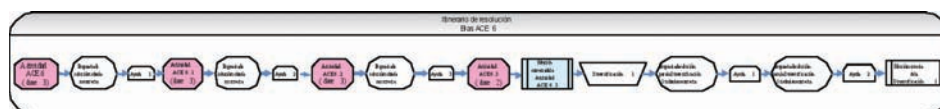


Figura 15.69: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola profesor, por fin hemos ganado la liga seguro que para el año que viene ganamos la champions, me despido un saludo.

BLAS

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.70)

**Tutorización (1ª ayuda):** *“Lo que has encontrado que se cumple para el perímetro del cuadrilátero está muy bien, y también has encontrado que  $NP = NB$  y que  $MC = MP$ , igualdades que explican lo que sucede ¿podrías escribirlo en forma de teorema?”*



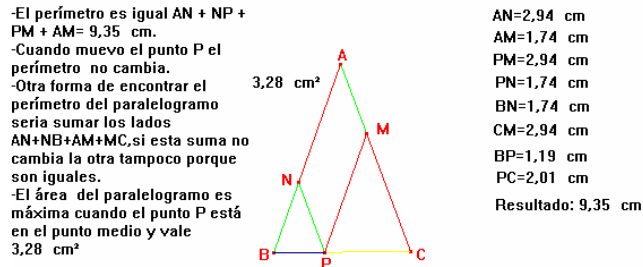


Figura 15.70: Primera versión

**Segunda versión.**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.71)

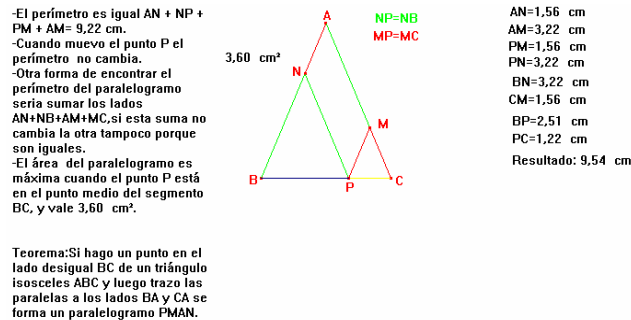


Figura 15.71: Segunda versión

**Tutorización (2ª ayuda):** “En cuanto al teorema que propones, releo tu enunciado y analiza si está completo, ¿es eso lo que quieres enunciar en tu teorema?; piensa que lo importante es la condición que ese cuadrilátero cumple (si es necesario revisa alguna de las actividades anteriores en las que hayas escrito algún teorema)”

Tercera versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.72)

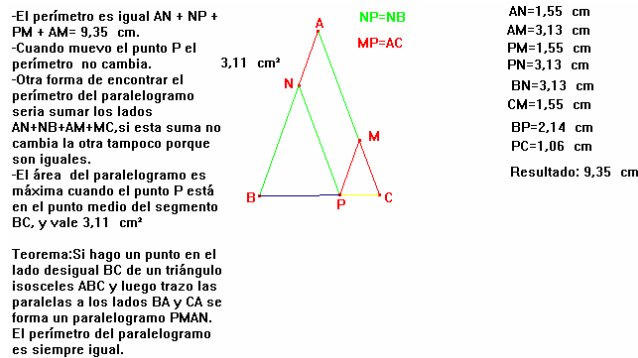


Figura 15.72: Resolución propuesta

**Tutorización (3ª ayuda):** “El enunciado de tu teorema ha mejorado con la última frase, pero podrías agregar igual a qué se mantiene esa suma (revisa lo que has apuntado más arriba)”

Cuarta versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.73)

**Tutorización (1ª diversificación):** “El enunciado del teorema quedó muy bien, pero volviendo a porqué ocurre, has notado ya que  $NP = NB$  y que  $MC = MP$ , igualdades que explican lo que sucede, ¿podrías justificar esas igualdades?”

Quinta versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.74)

**Tutorización (1ª ayuda de la 1ª diversificación):** “Te faltaría justificar porqué los triángulos  $BNP$  y  $PMC$  son isósceles, (pista: revisa cómo has construido la figura)”

Sexta versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.75)

**Tutorización (2ª ayuda de la 1ª diversificación):** “De acuerdo, los triángulos son isósceles, es decir que tienen dos lados iguales, y de hecho has verificado esta igualdad tomando medidas en tu construcción, pero fíjate ¿hubieran quedado isósceles si no los hubieras construido con paralelas como lo has hecho?”

**Séptima versión.** Texto de correo electrónico:

Hola, profesores me lo he pasado bien y he aprendido bastante y os mando este correo para despedirme un saludo BLAS

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.76)

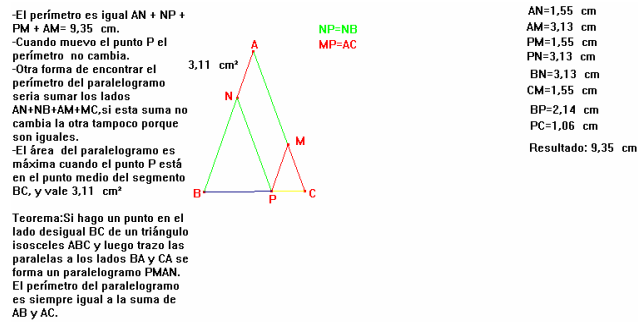


Figura 15.73: Resolución propuesta

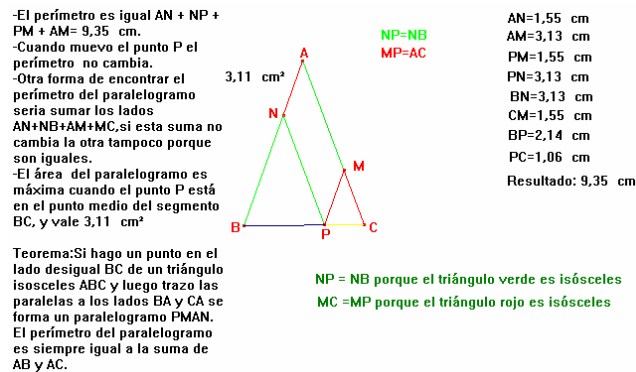


Figura 15.74: Resolución propuesta

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

Dicha construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la

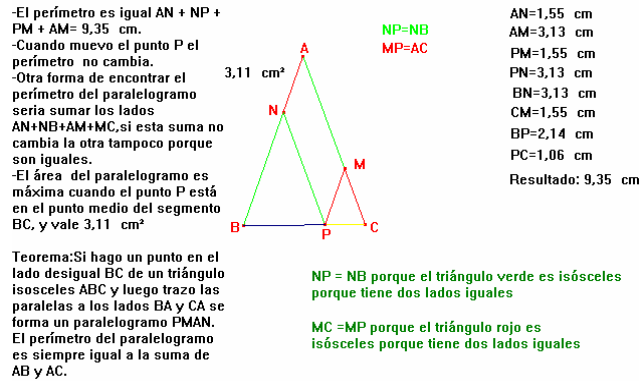


Figura 15.75: Resolución propuesta

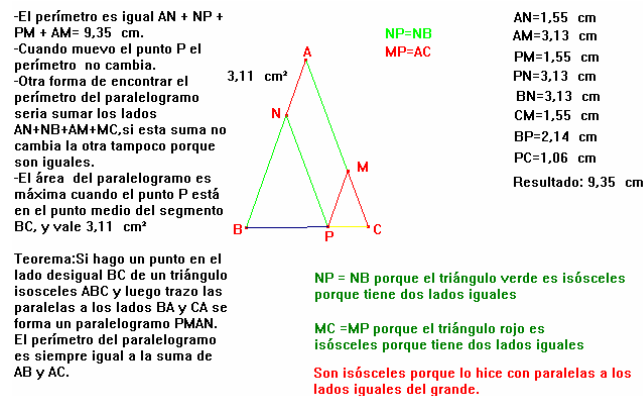


Figura 15.76: Resolución propuesta

condición que se cumple para el perímetro. El alumno expresa ambas condiciones claramente.

Asimismo, intenta justificar la relación encontrada para el perímetro, relacionando su cálculo con “otra forma posible de hacerlo” que lleva implícitas las igualdades entre los segmentos (igualdades que ha verificado midiendo exhaustivamente y que ha apuntado de manera correcta).

La formulación del teorema, en principio resulta incompleta en relación a las condiciones que el alumno ha encontrado que se cumplen; el texto propuesto detalla perfectamente las condiciones iniciales que deben cumplirse

pero deja sin escribir qué ocurrirá entonces con el perímetro y con el área. En las versiones siguientes, ante las solicitudes del tutor, logra mejorar este enunciado.

El alumno utiliza muy bien los signos de puntuación, incluso incluye guiones para organizar sus frases e incorpora colores a los dibujos y a los textos, de manera que su discurso resulta además de coherente, más claro y fácil de leer.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado. Existen entre construcción y textos, relaciones de colores que permiten establecer conexiones visuales y mejorar la lectura.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se incluye un saludo de despedida de curso y una valoración del trabajo realizado.

■ **Análisis Ortografía:**

La ortografía en general ha mejorado bastante, faltan muy pocas tildes y se nota que el alumno está pendiente de este aspecto tanto en los textos de correo como en los comentarios que escribe en Cabri.

Se sigue apreciando el buen uso de los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto): puntos, guiones, etc.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros; y este uso además ha aumentado significativamente respecto a resoluciones de actividades anteriores.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triángulo isósceles, lado, perímetro, área, teorema, etc.).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 3
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 3

- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 10/12 (83,33%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda. El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos<sup>11</sup>. El trabajo con Cabri, ha resultado fundamental para este avance, dado que sus herramientas le permiten indagar sobre la situación planteada, haciendo que no se sienta “desarmado” ante ella y pueda abordarla (mide todo lo que puede, calcula, compara,...); y es el trabajo con estas herramientas el que le permite seleccionar conceptos involucrados. Es decir, que el trabajo con Cabri, favorece en este caso, el proceso de transferencia de conceptos y relaciones previas a la resolución de la actividad.

CON AYUDAS: Fue necesaria una ayuda del tutor para que el alumno revisara la noción de teorema y pudiera reformular el enunciado propuesto.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara segmentos, áreas y perímetros, busca regularidades y relaciones analizando

---

<sup>11</sup>Como se ha comentado anteriormente, este es el caso de un alumno que al principio presentaba graves dificultades para el aprendizaje de la Geometría; dado que parecía no disponer de tantos conocimientos geométricos previos como sus compañeros (conceptos y procedimientos aprendidos anteriormente). De hecho, mientras las primeras actividades, involucran muchos conceptos y algunos procedimientos ya conocidos para el resto de los alumnos; para Blas resultaba casi todo nuevo, dado que no contaba con ese conocimiento previo, al menos de manera disponible; le resulta imposible seleccionar conceptos y qué estrategias a emplear por sí solo, o bien porque no los recordaba o bien porque no podía transferirlos a contextos de resolución de problemas. Por esta razón, esta identificación, selección y aplicación de conceptos y relaciones significa un gran avance en este caso.

variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción

CON AYUDAS: Las intervenciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales como la corrección o no del enunciado del teorema propuesto. Respecto al análisis de la congruencia de los segmentos, el alumno utiliza un razonamiento circular (son iguales porque el triángulo es isósceles y el triángulo es isósceles porque son iguales) y fue necesaria la intervención del tutor para salir de esa circularidad.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto* SIN AYUDAS: El alumno comunica de manera clara sus respuestas; ayudándose de notación geométrica conveniente y de colores para la presentación de textos y dibujos.

CON AYUDAS: A través de una ayuda, el tutor solicita la explicitación del enunciado del teorema, y a través de otras ayudas, orienta esa formulación.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación, aunque fueron necesarias dos ayudas para ello.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.3. Alumno 3

#### Caracterización general del alumno:

Stefan corresponde a la clase definida como “alumnos de rendimiento medio” (suele suspender algunas asignaturas, aproximadamente entre tres y seis). Se caracteriza por tener un rendimiento escolar medio. Es de nacionalidad rumana y lleva cuatro años en España. Si bien maneja bastante bien el español, es un joven introvertido y muy reservado, más bien solitario; durante las clases permanece muy callado, interactuando muy poco con sus compañeros y profesores. No obstante, es un chaval aceptado por sus pares y la relación es, aunque poco fluida, amable y respetuosa. Tiene una asistencia casi perfecta a las clases de Taller de Matemáticas y su comportamiento general es muy bueno; su actitud tan introvertida a veces puede dar la sensación de desinterés o indiferencia respecto al aprendizaje, pero lo cierto es que sí se compromete con sus tareas. Sus conocimientos previos de Informática son prácticamente nulos. Contrastando con esta actitud, en las observaciones realizadas en las clases de Matemáticas curriculares se ha notado una actitud de poco interés; su comportamiento no es conflictivo como el de otros alumnos que además

de no interesarse generan indisciplina pero su participación es nula en dichas clases y de hecho suspende la asignatura. Como hemos dicho más arriba, esta actitud contrasta con la que tiene en el Taller de Matemáticas, en el que no sólo demuestra poseer conocimientos previos y buen manejo matemático, sino que además evidencia cierta facilidad para la asignatura y una actitud de gusto por las tareas matemáticas.

### 15.3.1. Actividad AEP1

1. *Itinerario de resolución* (esquema): (ver Figura 15.77)

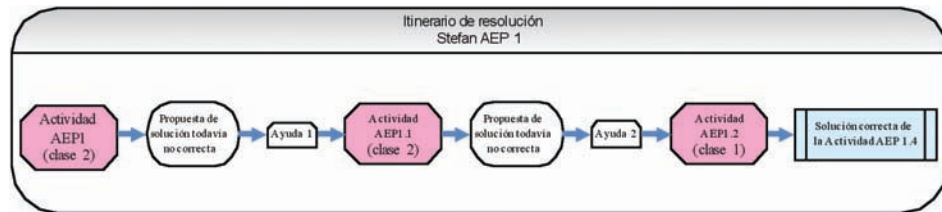


Figura 15.77: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.78)

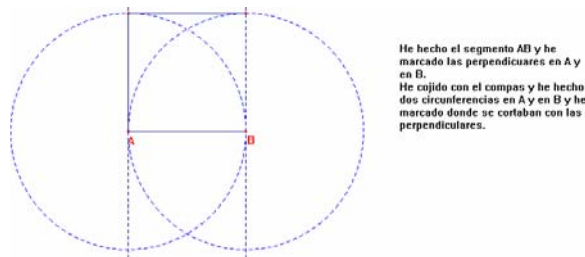


Figura 15.78: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda)**<sup>12</sup>: “La construcción que propones es correcta. ¿Podrías enumerar qué condiciones has procurado que cumpla el cuadrilátero que has cons-”

<sup>12</sup>Las intervenciones que aparecen como “tutorización” en las actividades de la etapa presencial (AEP1; AEP2 y AEP3) han sido realizadas en forma oral, por el profesor presencial.



*truido para ser un cuadrado?”*

**Segunda versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.79)

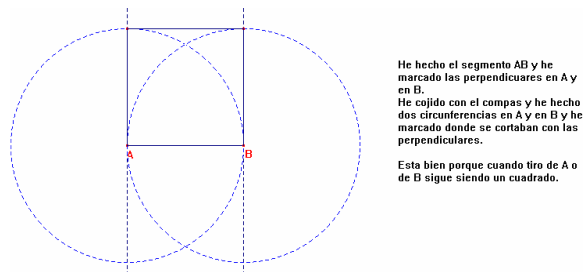


Figura 15.79: Segunda versión

**Tutorización (2<sup>a</sup> ayuda):** *“Producir variaciones en la construcción y ver que el cuadrilátero sigue siendo un cuadrado, te ayuda a ver que tu construcción es correcta. Pero piensa cuáles han sido las condiciones que has tenido en cuenta para construirlo y que han hecho esto posible.”*

**Tercera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.80)

3. **Análisis de la Competencia Comunicativa:**

■ **Análisis Coherencia intratextual:**

Si bien el texto inicial no contiene contradicciones ni repeticiones; no llega a ser totalmente coherente dado que la información no es suficiente y el no hacer uso de notaciones o de indicaciones más precisas da lugar a ambigüedades (no queda claro qué condiciones cumplen las circunferencias mencionadas, los puntos de corte entre las circunferencias y las perpendiculares no son sólo dos, etc.)

Asimismo, no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que la construcción propuesta da lugar al cuadrado solicitado (insuficiencia de argumentos). En respuesta al pedido del tutor, el alumno recurre a una verificación gráfica, y justifica la corrección de su construcción mencionando únicamente ese argumento pero sin relacionar las causas de esa corrección con los procedimientos que ha aplicado para realizarla.

En la 3<sup>a</sup> versión, sí justifica la construcción explicitando que la misma es correcta por el hecho de utilizar perpendiculares y compás para realizarla.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

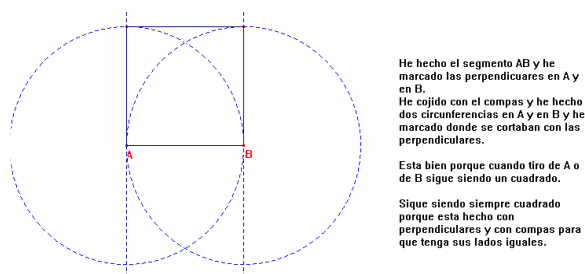


Figura 15.80: Tercera versión

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por presentar éste último cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo relativos al uso de tildes (no se utiliza ninguna). En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para evitar las ambigüedades que presenta el texto.

■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos geométricos están bien empleados (circunferencia, segmento, cuadrado, etc.) pero la manera en que se expresan algunas relaciones geométricas no resulta totalmente clara y da lugar a ambigüedades. Respecto a las circunferencias, por ejemplo, no se indican las condiciones mínimas según las que se trazan (no queda claro qué centro y qué radio tienen o por qué punto pasan).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; por el contrario, no se muestran estrategias creativas para superar las ambigüedades del texto.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 0

- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 3/9 (33,33%)
- *Discurso no aceptable* (de Nivel 1)

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar la opción compás para conservar distancias. Utiliza el concepto de perpendicular para determinar ángulos rectos; mostrando que identifica el concepto de cuadrado y sus propiedades.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Se destaca que, mientras el resto de los alumnos emplea la opción circunferencia, Stefan es el único alumno que escoge la opción compás, reproduciendo con Cabri, los procedimientos de construcción con lápiz, papel, regla y compás real.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo una construcción correcta y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.

CON AYUDAS: Sin embargo, le resulta difícil explicitar verbalmente cuáles son las condiciones mínimas para que el cuadrilátero que él mismo ha construido sea un cuadrado. Al principio, no identifica este requisito (aunque aparece en el enunciado de la actividad); en un segundo intento y ante el pedido del tutor, recurre como argumento a la validación gráfica (producir variaciones y observar que sigue siendo un cuadrado). Recién en la tercera versión justifica la corrección recurriendo a las estrategias de construcción aplicadas.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto, describiendo con corrección el procedimiento aplicado. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo, paso a paso.

CON AYUDAS: Para que explicitara la justificación de la corrección a través de propiedades y relaciones, fue necesaria la intervención del tutor en dos ocasiones.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Dado que fueron necesarios varias ayudas (dos) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Primera clase, que se corresponde con un Nivel 1.

### 15.3.2. Actividad AEP2

1. *Itinerario de resolución* (esquema): (ver Figura 15.81)

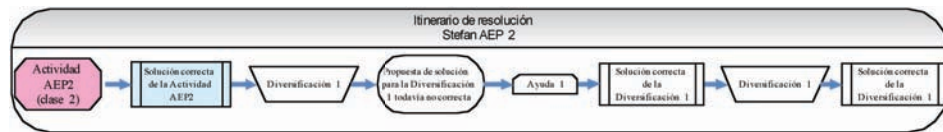


Figura 15.81: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.82)

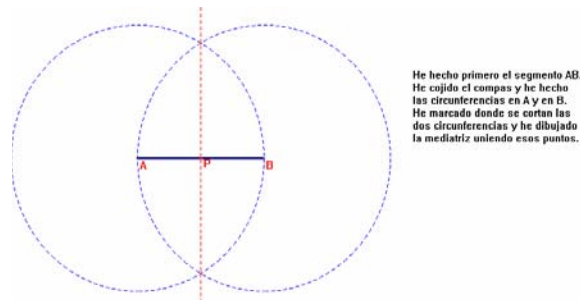


Figura 15.82: Primera versión

**Tutorización (1ª diversificación):** *“La construcción es correcta, has trazado la mediatriz del segmento AB sin utilizar la opción mediatriz; ¿podrías analizar por qué*

*esa construcción te ha permitido obtener la mediatriz?”*

**Segunda versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.83)

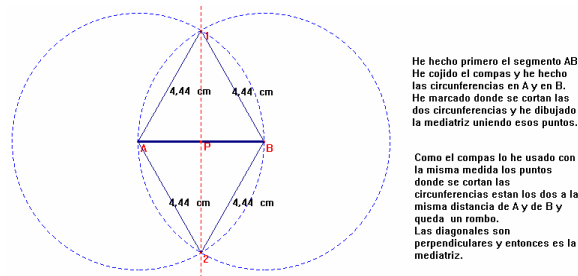


Figura 15.83: Segunda versión

**Tutorización (1ª ayuda de la 1ª diversificación):** *“La explicación que has encontrado está muy bien, fíjate que la propiedad que mencionas (que las diagonales del rombo se cortan perpendicularmente) explica porqué la recta obtenida es perpendicular a AB; piensa ahora cómo explicarías porqué pasa por el punto medio de AB”*

**Tercera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.84)

**Tutorización (2ª diversificación):** *“Tu construcción queda ahora perfectamente justificada; ¿podrías encontrar otro procedimiento diferente que te permita encontrar nuevamente la mediatriz sin utilizar ni la opción mediatriz ni la opción punto medio?”*

**Cuarta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.86)

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

Si bien el texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un avance respecto a la actividad anterior en cuanto a la coherencia; no es totalmente clara la frase “he hecho las circunferencias en A y en B”. La ambigüedad se genera por la falta de referencia a los elementos característicos de dichas circunferencias (centro y radio). Incluso así, el texto resulta bastante claro.

Si bien en la 1ª versión se detalla con mucha claridad el procedimiento llevado a cabo; no aparecen las justificaciones que darían cuenta de que las construcciones propuestas dan lugar a la mediatriz del segmento (insuficiencia de argumentos). Para la segunda versión, ante la solicitud del profesor,

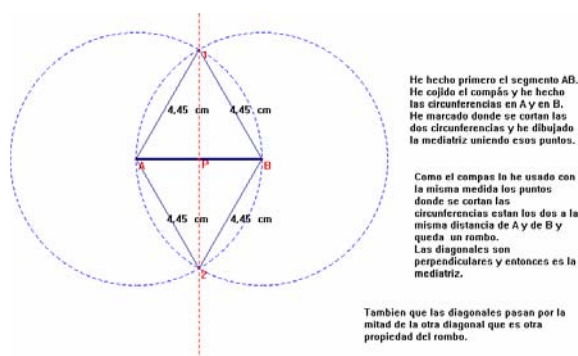


Figura 15.84: Tercera versión



Figura 15.85: Cuarta versión

el alumno justifica correctamente el proceso, recurriendo para ello a una estrategia ingeniosa que vincula su construcción con las propiedades de las diagonales del rombo.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No existen contradicciones explícitas entre el texto y la construcción, pero por ser el primero de cierta vaguedad, podría corresponderse con otras construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo relativos al uso de tildes (no se utiliza ninguna). Se destaca el buen uso de la ortografía del castellano, teniendo en cuenta que la lengua madre del alumno es el rumano.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas hubiera dado lugar a un texto más claro aún.

■ **Análisis Vocabulario:** Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas (segmento, rombo, distancia, diagonal, perpendicular, etc.) están muy bien empleados.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Se evidencia creatividad para justificar la corrección de la construcción propuesta a través de un argumento ingenioso que relaciona la construcción con el rombo y sus propiedades.

Aunque el alumno no identifica en principio la instancia de argumentación (la justificación recurriendo a relaciones, propiedades, etc.) como parte de la resolución del problema; luego supera este escollo con idoneidad.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 5/9 (55,56 %)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento (nuevamente las traza utilizando para ello la opción compás). Como conceptos y relaciones involucrados aparecen las propiedades de las diagonales del rombo (perpendicularidad y corte en el punto medio) así como la equidistancia de los puntos de intersección de dichas circunferencias respecto a los extremos del segmento. Para la segunda construcción, propone otro procedimiento correcto que involucra otros conceptos y relaciones vinculadas a los hexágonos regulares y sus propiedades; aunque como se nota en las justificaciones, realiza dicha aplicación de conceptos y relaciones de manera muy intuitiva y no quedan explicitadas muy claramente en el comentario.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta para la construcción. Sin ayuda, el alumno identifica que puede utilizar las dos circunferencias que propone para hallar la mediatriz del segmento, repitiendo con Cabri un procedimiento que ya ha aplicado en cursos anteriores con lápiz, regla y compás. Profundiza estas estrategias para realizar la argumentación del procedimiento

propuesto. Para la segunda propuesta de solución, de nuevo el procedimiento es correcto.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; proponiendo dos construcciones correctas y comunicando claramente el procedimiento desarrollado.

CON AYUDAS: Ante la orientación del tutor, el alumno profundiza su nivel de reflexión para validar y justificar su propuesta utilizando argumentos geométricos, propiedades, relaciones, etc. Teniendo en cuenta que esta es una de las primeras actividades que propone este tipo de tarea matemática prácticamente desconocida por los alumnos y que se relaciona con las demostraciones sencillas; el alumno la resuelve de manera creativa y reflexiva.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo con claridad y corrección.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones, aunque para resolver la primera diversificación propuesta, fue necesaria una ayuda por parte del tutor.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.3.3. Actividad AEP3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.86)



Figura 15.86: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.87)

**Tutorización (1ª ayuda):** El alumno ha identificado que la circunferencia que busca es la circunferencia circunscrita a un triángulo AP1 pero que el punto 1 no puede ser cualquiera sino aquél para el que la circunferencia resulte a la vez tangente a la recta inicial. Escoge un punto 1 cualquiera y lo manipula manualmente hasta obtener una posición de aparente corrección; pero la construcción pierde las propiedades al mover el punto 1. “La circunferencia que propones parece ser la que



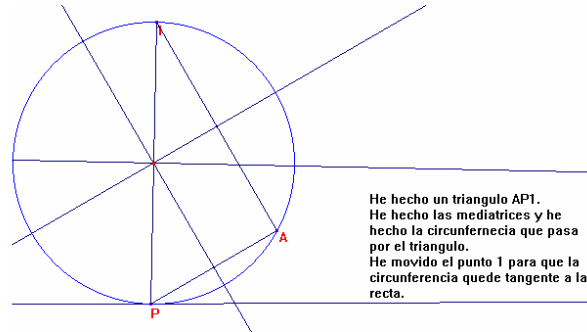


Figura 15.87: Primera versión

buscamos, pero ¿qué ocurre si mueves el punto 1? Debes lograr que la circunferencia siga cumpliendo las condiciones por más que modifiquemos el dibujo. Intenta analizar cuál es la posición del punto 1 para el que la circunferencia resulta tangente a la recta.”

**Segunda versión.** Resolución propuesta (archivo Cabri):(ver Figura 15.88)

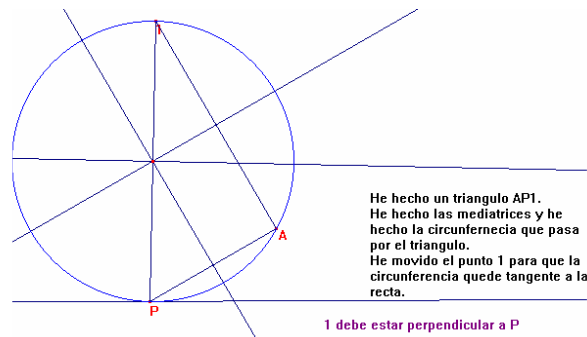


Figura 15.88: Segunda versión

**Tutorización (2ª ayuda:)** “Has encontrado correctamente cuál debe ser la posición del punto 1 para que la circunferencia resulte tangente a la recta (aunque intenta expresarlo más claramente), ¿podrías encontrar un procedimiento para hallar

*exactamente la posición de 1 de manera que el dibujo no admita deformaciones?”*

**Tercera versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.89)

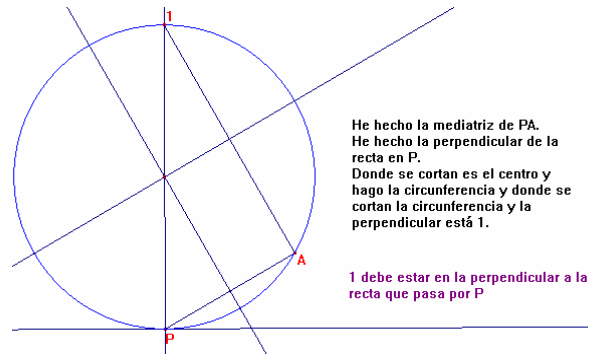


Figura 15.89: Tercera versión

**Tutorización (3ª ayuda):** *“Has encontrado correctamente la circunferencia, ¿podrías explicitar las propiedades que justifican tu construcción?”*

**Cuarta versión.** *Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.90)

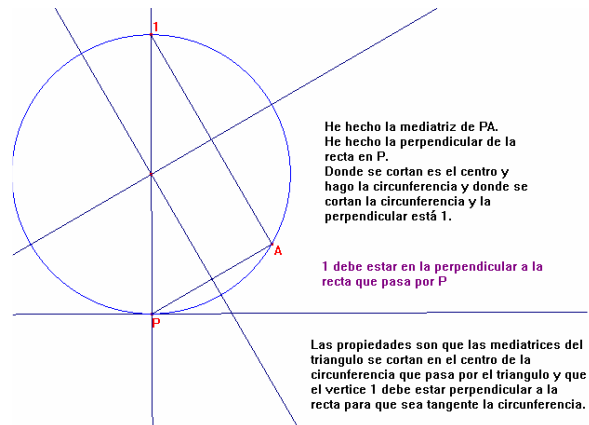


Figura 15.90: Cuarta versión

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

El texto no contiene contradicciones ni repeticiones y muestra un nuevo avance respecto a las actividades anteriores en cuanto a la coherencia. Se describe paso a paso el procedimiento llevado a cabo.

Aunque la construcción inicial no es totalmente correcta, y responde a una búsqueda intuitiva de la circunferencia, los textos resultan coherentes y claros y dan cuenta de esa búsqueda.

En algunas frases, se hace mención de la circunferencia que pasa por el triángulo (en referencia a la circunferencia circunscrita), se menciona que el punto 1 debe ser perpendicular al punto P, etc.; lo que genera ambigüedades, incorrecciones y pérdida de coherencia.

#### ■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El texto se corresponde en todos los casos con las construcciones propuestas para resolver el problema, que en algunos casos son correctas y en otros no.

#### ■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

No se analiza en este caso.

#### ■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo la falta de todas las tildes.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien es adecuada la notación empleada para el segmento y los puntos mencionados; hubiera sido necesario un mayor y mejor uso del lenguaje geométrico y de sus reglas ortográficas para mejorar el texto. Se hace mención de la circunferencia que pasa por el triángulo (en referencia a la circunferencia circunscrita), se menciona que el punto 1 debe ser perpendicular al punto P, etc.; lo que genera ambigüedades y pérdida de coherencia.

#### ■ **Análisis Vocabulario:**

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados, aunque en algunos casos se generan ambigüedades o errores de interpretación:

- el alumno habla de “la circunferencia que pasa por el triángulo”, refiriéndose a la circunferencia circunscrita al triángulo;
- se dice que el punto 1 debe ser perpendicular al punto P, en vez de decir que está sobre la perpendicular a la recta que pasa por P

Un mejor uso del vocabulario específico mejoraría asimismo la claridad en el enunciado de las propiedades.

#### ■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

El alumno recurre a su creatividad para explicar su procedimiento sin utilizar las palabras circuncentro ni circunferencia circunscrita (términos que de los no recuerda su nombre aunque sí utiliza bien los conceptos en la construcción); habla entonces de la circunferencia que pasa por el triángulo, una expresión que resulta imprecisa (hubiera sido claro si se hubiera especificado que pasa por los vértices del triángulo) pero que le permite superar ese vacío producido por la falta de la expresión.

Las propiedades que fundamentan la construcción se mencionan explícitamente sólo ante el pedido del tutor; se propone entonces un enunciado coloquial y contextualizado a la situación del problema.

No obstante, mientras el alumno describe su procedimiento, las mismas aparecen implícitas en esos textos.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* no se considera
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 1
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 2
- *Máximo asignado:* 9
- *Ponderación general:* 5/9 (55,56%)
- *Discurso aceptable pero emjorable* (de Nivel 2).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica los conceptos, relaciones y propiedades involucrados en la resolución: que el centro de la circunferencia que busca es el circuncentro de cierto triángulo AP1; que existe una única posición para el punto 1 de manera tal que se cumplan todas las condiciones.

CON AYUDAS: Probando por tanteo, ante la sugerencia del tutor de estudiar cuál es la condición de esa posición; el alumno encuentra que se trata de la perpendicularidad de P1 respecto a la recta; y utiliza ese hallazgo para su construcción definitiva. Fue necesaria una nueva ayuda para que el alumno explicitara las propiedades involucradas; aunque el alumno ha manejado todo el tiempo de manera implícita las mismas en su resolución.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica que el centro de la circunferencia que busca es el circuncentro de cierto triángulo AP1; construye dicho triángulo, traza sus mediatrices, determina el circuncentro, traza la circunferencia circunscrita y manipula el vértice 1 hasta ubicarlo en la única posición para la cual se cumplen todas las condiciones.

CON AYUDAS: A partir de esa construcción visualmente correcta pero no correcta por construcción y de las intervenciones del tutor, el alumno estudia

cuál es la condición de esa posición, encuentra que se trata de la perpendicularidad de P1 respecto a la recta; y utiliza ese hallazgo como estrategia para su construcción definitiva. Se destaca que la construcción inicial propuesta por el alumno, aunque incorrecta, le permitió identificar esa condición faltante (el alumno mueve el vértice 1y analiza qué relación existe entre 1 y P en la posición de aparente tangencia).

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre él; aunque la construcción que propone en principio no cumple todas las condiciones pedidas, su manipulación, conjuntamente con las ayudas del tutor, favorece la visualización de la condición faltante.

CON AYUDAS: Si bien fueron necesarias algunas ayudas para favorecer una reflexión más profunda, el alumno controla el proceso, proponiendo una solución provisoria, sobre la cual analizará variables; análisis que favorecerá la elaboración de la resolución definitiva.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno describe, utilizando lenguaje verbal, el proceso de construcción llevado a cabo. Explicita claramente su proceder dejando claro qué hace y porqué lo hace (implícitamente hace referencia a las relaciones y propiedades involucradas en la resolución de la actividad).

CON AYUDAS: Si bien se refiere correctamente de manera implícita a las propiedades que justifican su solución; recién las explicita de manera más clara cuando el tutor se lo pide (aunque en el enunciado se pide, “explica justificadamente”, el alumno sigue asociando esta tarea a la de describir el procedimiento realizado, pero no hace hincapié en las propiedades o relaciones que lo justifican).

Como se ha dicho en relación a la actividad anterior, estas actividades son el comienzo del trabajo con este tipo de tarea matemática diferente (que involucra demostraciones o justificaciones).

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Dado que fueron necesarios varias ayudas (tres) y varios intentos de solución para la resolución de la actividad inicial, el alumno en este caso termina su itinerario con dicha resolución; es decir que no resuelve ninguna diversificación.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

#### 15.3.4. Actividad ACE1: Presentación profesor virtual- alumno y propuesta de trabajo

1. *Itinerario de resolución* (esquema):

No procede en este caso

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico*

**De:** stefan@ext.unirioja.es

**Enviado:** Lunes, Marzo 7, 2005 12:10 pm

**A:** Guillermina Marcos “guillermina.marcos@alum.unirioja.es”

**Asunto:** correo

Hola me llamo Stefan XXX YYY y tengo 15 años me gusta jugar a baloncesto, escuchar musica, salir con los amigos por alli ir a la discoteca, etc. . . . .

Un cordial saludo para José Francisco.

3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*■ **Análisis Coherencia intratextual:**

El mensaje es coherente, la presentación que realiza de sí mismo es escueta pero apropiada. No justifica el porqué de la elección de la materia. La presentación de Stefan, se extenderá en el próximo correo, como respuesta al interés por parte del profesor en conocer más aspectos de su persona.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

No se analiza en este caso

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: el registro utilizado es adecuado respecto al destinatario y el tono es amable y cordial. Al final, incorpora incluso un saludo “cordial”. La formalidad en el trato, será una constante en los mensajes de Stefan (manera de saludar, trato de usted al profesor) que coincide con su trato personal que se diferencia del resto de los alumnos caracterizándose quizá por una educación anterior más rigurosa en cuanto a esas formas (en Rumania).

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen algunos errores de ortografía: no se utilizan tildes (sólo en el nombre del profesor, donde e ha prestado especial atención), fallos en la utilización de los signos de puntuación (faltan algunas comas en las enumeraciones), y algunos errores que son más bien de mecanografía (más relacionados con el uso de las TIC que con la ortografía en sí), como la omisión de alguna letra.

■ **Análisis Vocabulario:**

El vocabulario es correcto. Si bien sólo corresponde al lenguaje natural, la elección de palabras y expresiones es apropiada.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

En este caso, aunque realizar una presentación personal se presenta como un ejercicio libre y sencillo; no siempre resulta fácil para los alumnos elegir qué aspectos de su persona exponer en dicha presentación, qué registro de discurso emplear, etc. Aparece así un problema comunicativo que en este caso se ha resuelto parcialmente, porque el alumno pone algún reparo en extenderse; aunque se seguirá resolviendo en próximos envíos en los que el alumno irá ganando confianza y extendiendo su presentación personal.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia*: 2
- *Componente Cortesía y Adecuación*: 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario*: 2
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos*: 1
- *Máximo asignado*: 9
- *Ponderación general*: 7/9 (58,33%)
- *Discurso aceptable pero mejorable* (de Nivel 2).

#### 4. *Análisis del Aprendizaje de la Geometría:*

No corresponde en esta actividad.

### 15.3.5. Actividad ACE2

#### 1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.91)



Figura 15.91: Itinerario de resolución

#### 2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico, primer envío*<sup>13</sup>:

Me he alegrado al recibir su correo.

Yo soy de Rumania y llevo aquí unos 5 años y vine aquí porque mi padre viajaba mucho por Europa y paso por España también y decidió quedarse aquí y para no dejrle solo decidimos venir toda la familia para estar todos junto.

Espero que me conteste pronto al correo. Un saludo de Stefan.

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.92)

**Tutorización (1ª diversificación):** *“Has encontrado perfectamente la circunferencia y para ello has trazado las bisectrices de tres ángulos: el ángulo BAC, el ángulo DBO y el ángulo ECO. Piensa ahora en las siguientes cuestiones: ¿es imprescindible que los puntos D y E estén sobre la perpendicular a la bisectriz de BAC? ¿es imprescindible determinar el punto O? ¿es imprescindible trazar tres bisectrices*

<sup>13</sup>Aunque en los primeros casos, a modo de ejemplo, hemos incluido toda la información que contiene el correo electrónico enviado por el alumno (fecha y hora de envío, destinatarios, asunto, etc.); a partir de aquí, sólo incorporaremos los textos escritos por el alumno en el cuerpo de dichos correos electrónicos. En dichos textos se ha respetado la redacción y ortografía de los originales, de ahí la presencia de fallos ortográficos, omisión de algunas letras, etc.

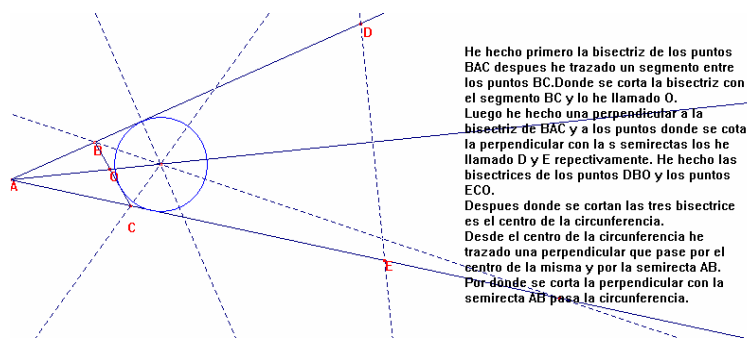


Figura 15.92: Primera versión

para hallar el centro de la circunferencia?”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola José Francisco

Le envío las respuestas a las preguntas en color verde.

Un saludo de: Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.93)

**Tutorización (2ª diversificación):** “Lo que has analizado es muy correcto, y está muy bien expresado. Piensa ahora cuál es la propiedad de las bisectrices que te ha permitido resolver el problema.”

**Tercera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola José Francisco

La propiedad de la bisectriz que me ha permitido realizar esta actividad es la siguiente: La bisectriz divide los ángulos en dos partes iguales y que desde cualquier punto de la bisectriz la distancia a las dos semirectas es siempre la misma.

### 3. *Análisis de la Competencia Comunicativa:*

#### ■ **Análisis Coherencia intratextual:**

En todos los casos, el alumno describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no justifica por qué esos procedimientos conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.



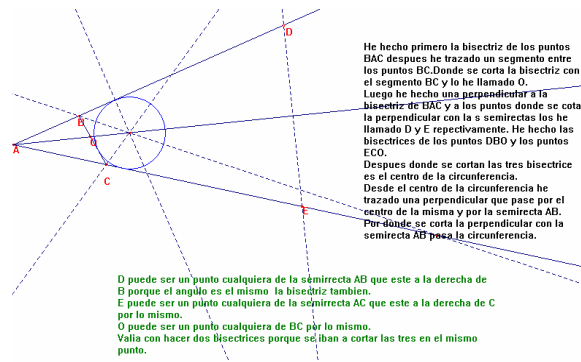


Figura 15.93: Segunda versión

El alumno muestra una preocupación por describir el proceso que ha llevado a cabo, pero realiza una descripción lineal, más bien de tipo técnico y no incluye las propiedades y relaciones para argumentar dicho proceso.

Ante la solicitud de las justificaciones faltantes, el alumno escribe la definición de bisectriz y la propiedad involucrada en esta resolución; ambas de manera clara y correcta (se destaca esta característica, porque a la mayor parte de los alumnos les ha costado bastante identificar esta propiedad y enunciarla con corrección).

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (se observa un avance en la construcción de la relación e intercambio entre profesor y alumno, ante una respuesta del tutor, que muestra interés por conocer al alumno y su situación, lo que hace que Stefan se anime a contarle más cosas); esto favorece el buen clima de trabajo y la buena predisposición. El alumno no tutea al profesor, se dirige a él llamándolo de usted (característica común a todos los alumnos rumanos del curso), y sus mensajes presentan una formalidad mayor que la de otros alumnos.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, específicamente la no utilización de tildes.

Para Stefan el castellano es una lengua nueva, quizá por eso pone mucho empeño en utilizarla con corrección y logra incluso superar la calidad en su uso a sus compañeros españoles (tanto en la corrección de la ortografía como en la riqueza y precisión de su vocabulario).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son muy adecuadas las notaciones empleadas para los ángulos, puntos y semirrectas.

■ **Análisis Vocabulario:**

El vocabulario general y específico (geométrico) es correcto; aspecto que destacamos por el hecho de ser el alumno extranjero con lengua materna diferente al castellano. Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están muy bien empleados (semirrecta, circunferencia, segmento, ángulo, centro, perpendicular, etc.).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

No se evidencia; la resolución propuesta no ofrece para el alumno desafíos de este tipo y respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo se ha superado satisfactoriamente ante el pedido del profesor al igual que el análisis sobre las cuestiones planteadas por el tutor.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia: 2*
- *Componente Cortesía y Adecuación: 2*
- *Componente Ortografía y Vocabulario: 3*
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos: 1*
- *Máximo asignado: 12*
- *Ponderación general: 8/12 (66,66%)*
- *Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2).*

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica que es el concepto de bisectriz el que está involucrado en la resolución del problema; y también sin ayuda también encuentra que necesita la perpendicular para trazar la circunferencia en cuestión.

Fue capaz, sin ayuda, de establecer una estrategia adecuada para aplicar dichos conceptos a esta problemática concreta. Aunque dicha estrategia es un caso particular de una más general, da solución al problema.

CON AYUDAS: Con ayuda del tutor, el alumno reflexiona sobre algunas de las condiciones de su construcción que no eran imprescindibles para su corrección.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica una estrategia correcta, quizá un poco sofisticada y con condiciones que no eran imprescindibles pero correcta en tanto que da respuesta a la problemática planteada. Se destaca este hecho, porque ha sido uno de los poquísimos alumnos que ha logrado diseñar y aplicar esta estrategia sin ayudas.

CON AYUDAS: El tutor le envía algunas cuestiones que le ayudan a pensar sobre algunas de las condiciones propuestas en su solución para hallar la circunferencia y el alumno reflexiona correctamente al respecto e indica claramente esas ideas en un comentario.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso y lo controla. En el primer versión, propone una estrategia que ha sido el resultado de probar varias otras (que involucraban variados conceptos, relaciones y procedimientos) y controlarlas a través de variaciones en el dibujo; seleccionando los apropiados y descartando los que no resultaban adecuados. Así ha arribado a la solución que propone. Todavía no enumera las propiedades involucradas, porque no identifica que esta tarea es una parte importante de la resolución.

CON AYUDAS: Ante la primera versión, el tutor le propone algunas cuestiones para reflexionar y el alumno analiza y explica correctamente cada una de ellas. También ante la solicitud del tutor, el alumno ha explicitado la propiedad de la bisectriz involucrada en esta resolución.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de comunicar sus resultados a partir del modelo propuesto. Describe además, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.

CON AYUDAS: También ha sido capaz de justificar mediante propiedades, pero lo ha hecho como respuesta a un nuevo pedido del tutor.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.

### 15.3.6. Actividad ACE3

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.94)
2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico, primer envío:*

Hola José Francisco

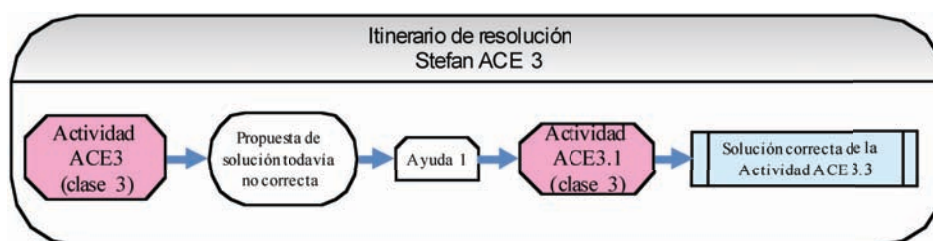


Figura 15.94: Itinerario de resolución

Aquí le envío la actividad ya acabada

Un saludo de: Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.95)

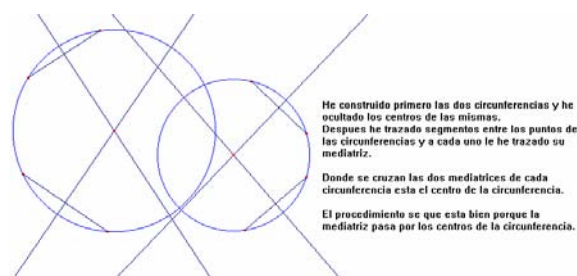


Figura 15.95: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “*Tu propuesta de solución es correcta y muy ingeniosa; ¿cómo enunciarías la propiedad que la justifica?*”

**Segunda versión.**

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.96)

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

Como en la actividad anterior, se describe linealmente el proceso llevado a cabo pero no se justifica totalmente mediante propiedades geométricas porque los procedimientos aplicados conllevan necesariamente a una construcción que cumple con las condiciones requeridas por la actividad. Por esta razón, si bien

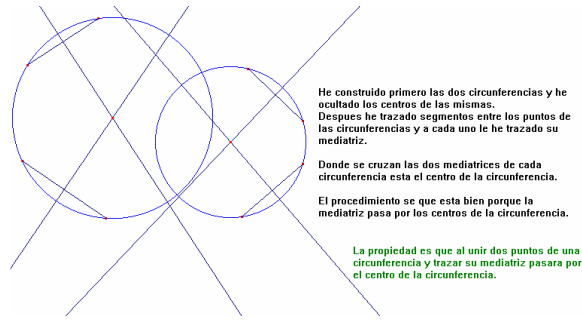


Figura 15.96: Segunda versión

el texto propuesto resulta coherente, la información es insuficiente en relación a los requisitos iniciales.

No obstante, el último apartado, se observa un esfuerzo por cumplir este requisito (justificar porqué los procedimientos geométricos aplicados son válidos para resolver la actividad); esto evidencia un avance respecto a la actividad anterior (en la que ni siquiera se evidenciaba esta necesidad y fue necesaria la intervención del tutor) pero todavía no se logra cumplir con este requisito dado que sólo justifica el procedimiento aludiendo a la coincidencia entre los centros hallados y los originales (que estaban ocultos en el gráfico) más allá de las variaciones producidas en el dibujo. No se recurre a propiedades o relaciones para dicha argumentación.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

El procedimiento descrito coincide perfectamente con el desarrollado en la construcción.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto del mensaje es cortés y adecuado: es adecuado al destinatario y se mantiene un tono cortés (incluye un saludo y mantiene su formalidad característica).

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen pocos errores de ortografía, sólo las tildes que siguen sin utilizarse salvo en el nombre del tutor.

Se utilizan muy bien los signos de puntuación y los espacios entre párrafos (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, en este caso no se han utilizado notaciones geométricas para ningún elemento.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, segmento, circunferencia, centro, etc.)

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece desafíos de este tipo; de hecho el alumno propone una solución que no es de las más comunes entre los alumnos.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, que sí ha supuesto un escollo comunicativo, el mismo se ha superado con corrección. Si bien esta justificación no aparecía en la primera versión, ante la solicitud del tutor el alumno ha sido capaz de enunciar una propiedad (que incluso no recordaba o no conocía) de manera clara, correcta y contextualizada.

El avance respecto a la actividad anterior radica en el hecho de que esta instancia es ahora reconocida por el alumno como un requisito que forma parte de la resolución de las actividades.

Un aspecto más a destacar radica en el hecho de que el alumno utiliza en su construcción “cuerdas de circunferencia”; y si bien no recuerda esta expresión para denominarlas, supera esa dificultad recurriendo a una frase alternativa (“he trazado segmentos entre los puntos de las circunferencias”).

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia: 2*
- *Componente Cortesía y Adecuación: 2*
- *Componente Ortografía y Vocabulario: 2*
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos: 3*
- *Máximo asignado: 12*
- *Ponderación general: 9/12 (75%)*
- *Discurso aceptable pero mejorable (de Nivel 2).*

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones dadas a un modelo geométrico que las respeta.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación; aunque o hace de manera muy intuitiva. Utiliza el hecho de que las mediatrices a una cuerda de circunferencia pasarán por su centro; propiedad que no conocía, o al menos no recordaba, pero la manipulación de la construcción le permitió encontrarla sin ayudas del tutor.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables, diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes e identifica la dependencia o independencia existente entre objetos. Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas (incluso propone un procedimiento más general que el solicitado, dado que sería válido incluso para hallar el centro de una única circunferencia, sin que estuviera la otra circunferencia secante): traza dos cuerdas en cada circunferencia, traza sus mediatrices, compara los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos para validar el procedimiento, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno controla el proceso y reflexiona sobre el proceso. Valida la solución propuesta comparando los centros obtenidos con los centros de las circunferencias que están ocultos y produciendo variaciones en la construcción. Logró hacer su construcción sin ayuda; aunque para arribar a la construcción definitiva requirió de varios intentos y pruebas.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto y de intentar justificarlos, aunque todavía no ha logrado justificar correctamente por sí mismo en la primera versión (no ha recurrido a propiedades para argumentar sino solamente a procedimientos de verificación visuales e intuitivos). Describe de manera clara y correcta, utilizando lenguaje verbal, el proceso de resolución llevado a cabo.

CON AYUDAS: En este caso, el alumno incorpora la justificación de las relaciones y propiedades que intervienen en el procedimiento propuesto, ante la solicitud del tutor. Pero lo hace de manera muy correcta.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

En este caso, el alumno no resuelve ninguna diversificación; aunque realizó un muy trabajo (prácticamente sin ninguna ayuda) sobre la resolución propuesta para la actividad inicial.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Segunda clase, que se corresponde con un Nivel 2.

### 15.3.7. Actividad ACE4

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.97)
2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola:



Figura 15.97: Itinerario de resolución

Le mando esta actividad que espero que este bien.

Un saludo de Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.98)

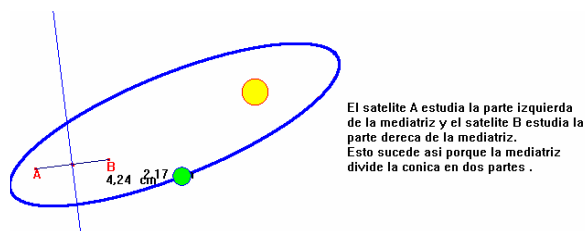


Figura 15.98: Primera versión

**Tutorización (1ª diversificación):** “La solución que propones es correcta, pero intenta explicar más claramente porqué; para hacerlo puedes completar tu última frase: la mediatriz divide la cónica en dos partes, ¿con qué características? ¿por qué?”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola:

Le mando de nuevo la actividad con lo que me ha pedido y espero que este bien.

Un saludo de Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.99)

**Tutorización (2ª diversificación):** “Lo que has escrito es correcto, ¿podrías relacionarlo con alguna propiedad de la mediatriz que conozcas?”



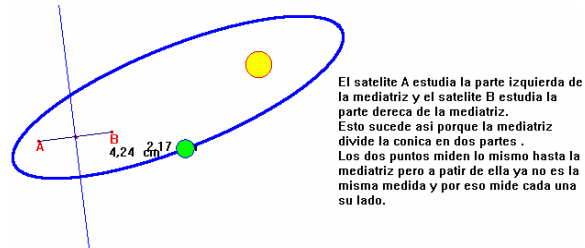


Figura 15.99: Segunda versión

Tercera versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.100)

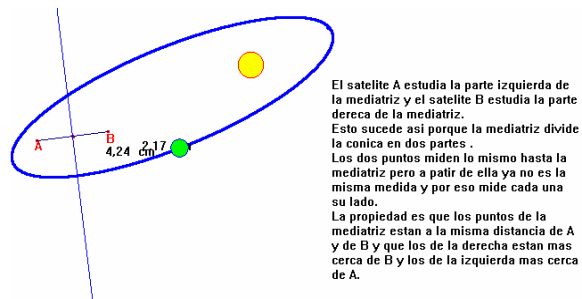


Figura 15.100: Resolución propuesta

**Tutorización (3ª diversificación):** “Has encontrado y explicado muy bien la propiedad. Piensa ahora qué ocurriría los satélites debieran estudiar una nave C, que puede encontrarse en cualquier lugar del plano, ¿en qué casos sería estudiada por cada uno de los satélites?”

Cuarta versión.

Resolución propuesta en Cabri (ver Figura 15.101)

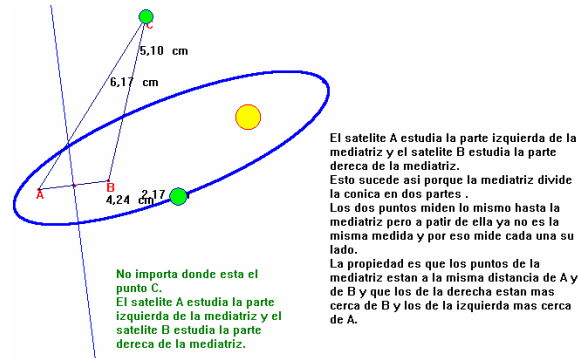


Figura 15.101: Resolución propuesta

**Tutorización:** “Has hecho un buen trabajo geométrico; para el próximo problema estaría bien que además revisaras la ortografía (específicamente el uso de tildes).”

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

1ª versión: El alumno encuentra una solución gráfica al problema y la explica utilizando lenguaje natural de manera clara y completa. Si bien no se menciona explícitamente la propiedad que fundamenta la solución, ni se propone una justificación de la solución gráfica, aparece un intento de hacerlo (“esto sucede porque”) que queda finalmente en una frase inconclusa.

2ª versión: Ante el pedido del tutor, respecto a explicitar porqué la solución gráfica es correcta, se incorpora una frase que explicita mejor la relación analizada para proponer la solución.

3ª versión: ante la nueva solicitud, se explicita la propiedad de la mediatriz que se relaciona con la solución propuesta de manera muy clara y contextualizada.

4ª versión: Finalmente el alumno resuelve de manera satisfactoria, gráfica y verbalmente, una diversificación que propone el análisis de un caso más general. o resulta acorde y está contextualizado en la resolución.

#### ■ Análisis Coherencia extratextual:

Los conceptos, relaciones, procedimientos y propiedades descritos, coinciden con los involucrados en la solución gráfica del problema.

#### ■ Análisis Cortesía y adecuación:

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación (incluyen saludos y conservan su formalidad característica); aunque también se

observa que se dedica menos a los textos de correo debido a la dedicación más exhaustiva a la resolución de las actividades (corroborado en las observaciones de clase y registrado en el diario del profesor- investigador).

■ **Análisis Ortografía:**

Stefan sigue sin utilizar tildes (el tutor llama su atención sobre ello en la última intervención). Sin embargo por lo demás su ortografía en el uso del castellano es perfecta, no comete ningún fallo, utiliza muy bien los signos de puntuación (lo que ayuda también a una mejor coherencia del texto); aspecto que destacamos especialmente dado que se trata de un alumno extranjero que lleva cuatro años en España.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las pocas notaciones empleadas.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (mediatriz, cónica, distancia, etc.).

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la resolución gráfica propuesta no ofrece desafíos de este tipo. Para la comunicación de resultados, Stefan encuentra que no conoce el nombre de la forma que tiene la órbita (elipse), pero soluciona ese problema llamándola con el nombre que aparece en las herramientas de Cabri (cónica), resultando este apropiado y solucionando así ese obstáculo en la comunicación.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien nuevamente las mismas vinieron en respuesta a una nueva demanda por parte del profesor; es muy correcto su enunciado, dado que se propone una forma adecuada a la situación del problema. En la versión final, incluso, se caracteriza el lugar geométrico de los puntos del plano más cercanos a uno u otro extremo de un segmento de manera coloquial y simple pero correcta.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 2
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 3
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 10/12 (83,33%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

SIN AYUDAS: El alumno convierte las condiciones del problema real a un enunciado matemático.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno traduce las condiciones anteriores a un modelo geométrico que respeta las condiciones planteadas; propone incluso un modelo geométrico muy claro al utilizar distintos colores, trazos, grosores, etc.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: SEl alumno identifica los conceptos, propiedades y relaciones involucrados en la relación: distancia entre dos puntos, mediatriz, segmento, equidistancia de un punto perteneciente a la mediatriz respecto a los extremos del segmento (consecuencia sobre la distancia entre los puntos ubicados en cada semiplano respecto a la mediatriz y los extremos del segmento).

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS:El alumno aplica estrategias adecuadas. Distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables (los puntos correspondientes deben considerarse “fijos” y para esa ubicación fija, la que varía es la posición del punto, aunque siempre sobre la elipse, y por ende sus distancias a los puntos interiores fijos), diferencia los elementos relevantes de los irrelevantes (por ejemplo: el hecho de que la trayectoria tenga forma elíptica es sólo un elemento distractor), identifica la dependencia o independencia existente entre objetos (la distancia a los satélites no depende estrictamente de la elipse en sí sobre la que se mueve el cometa sino de la relación entre esa posición y la mediatriz del segmento determinado por las posiciones de los satélites). Elige técnicas apropiadas que se ajustan a las condiciones dadas: mide, produce variaciones, traza la mediatriz, etc.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: EEEl alumno controla el proceso y reflexiona sobre el mismo. Valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno es capaz de dar resultados correctos a partir del modelo propuesto.

CON AYUDAS: Las orientaciones del tutor lo ayudan a explicitar y justificar de manera más completa el porqué de los resultados obtenidos y a generalizar el resultado a un caso más amplio.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver tres diversificaciones.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

TTeniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.

### 15.3.8. Actividad ACE5

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.102)

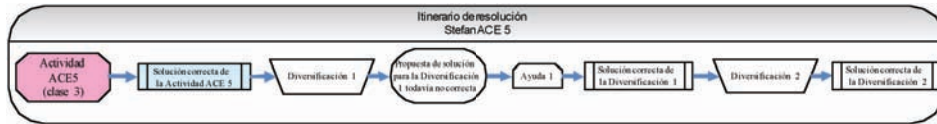


Figura 15.102: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola:

Le mando esta actividad que espero que este bien.

Un saludo de Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.103)

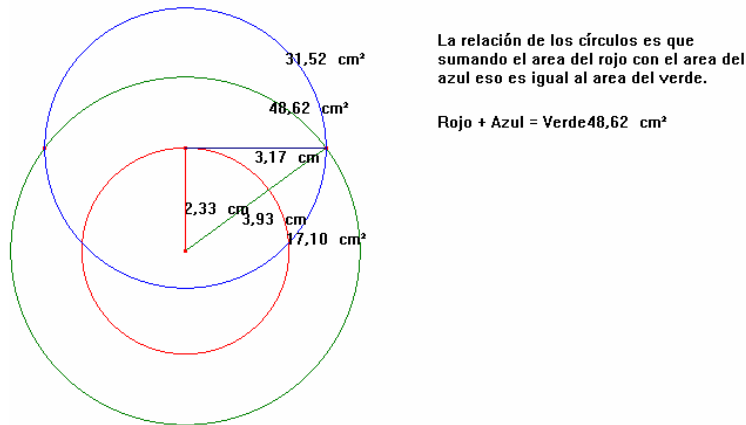


Figura 15.103: Primera versión

**Tutorización (1<sup>a</sup> diversificación):** “Has encontrado la relación que existe entre las áreas, ¿podrías demostrar porqué se cumple esta relación?”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:*

¡Hola!

Le mando esta actividad y espero que este bien al igual que las otras.

El papa nuevo días me parece muy bien pero a nosotros los ortodoxos no nos afecta mucho esto por que nosotros tenemos el nuestro que todavía esta vivo.

Para nosotros este fin de semana y estos días es la pascua y hemos ido a la iglesia para asistir a la misa de la pascua.

Un saludo!!! de Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.104)

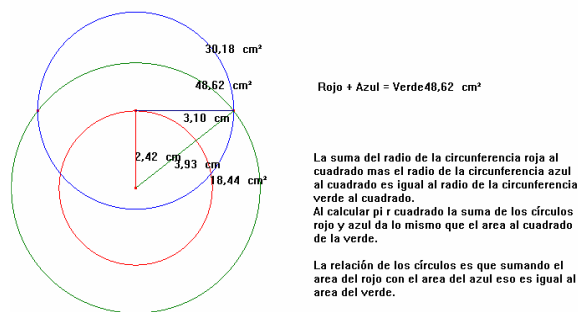


Figura 15.104: Segunda versión

**Tutorización (1<sup>a</sup> ayuda de la 1<sup>a</sup> diversificación):** “Lo que dices es cierto, los tres radios cumplen esa relación que escribes; seguramente ya sabes porqué pero, ¿podrías explicarlo más claramente?”

**Tercera versión.**

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.105)

**Tutorización (2<sup>a</sup> diversificación):** “Es cierto como dices que los tres radios forman un triángulo rectángulo, y aplicando el Teorema de Pitágoras, se obtiene la relación que mencionas. Ahora bien, ¿Cómo sabes que el triángulo en cuestión es un triángulo rectángulo?”

**Cuarta versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola!!!

El nombre de nuestro papa no se cual es pero se que es mayor tiene ya sus años de mandato.

La fiesta muy bien todos en familia y en nuestro rectángulo es una tradición pintar los huevos y por la mañana al levantarte o durante todo ese día chocar los huevos con amigos y familiares.

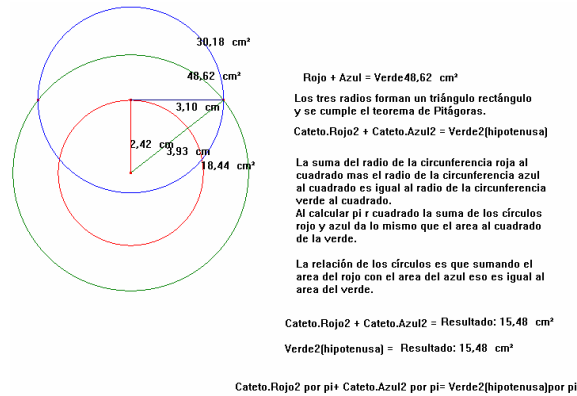


Figura 15.105: Resolución propuesta

Un de ellos tiene que decir Jesús ha renacido y el otro tiene que decir de verdad ha renacido y chocar los huevos y al que no se le ropa se dice que va a tener mucha suerte.

Esta es la respuesta a la pregunta de por que el triángulo que forman los radios es rectángulo.

El triángulo es rectángulo porque uno de los radios es la tangente de otro radio y estos son siempre perpendiculares y los triángulos rectángulos siempre tienen un ángulo recto.

Espero que este bien la actividad que le he mandado al igual que la respuesta a la pregunta que me había formulado. Un saludo

Stefan

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

En este caso, ya no se pide la descripción de un procedimiento de construcción sino encontrar una relación geométrica, pero siempre el procedimiento debe ir acompañado de explicaciones, justificaciones, etc.

1ª versión: La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuentra y se explicita la relación entre las áreas de los círculos, aunque no se menciona la propiedad que fundamenta la relación encontrada. Las ideas se presentan de forma concisa pero clara, y se acompañan de una expresión simbólica de la relación que aunque resulta un poco vaga (no queda claro que lo que se suman son las áreas), muestra un intento por escribir relaciones geométricas utilizando un lenguaje simbólico.

2ª versión: El alumno encuentra la relación pitagórica entre los radios de los círculos; escribe dicha relación y la vincula con la relación entre las áreas (a través de la multiplicación por  $\pi$ ), trabajando sobre el triángulo rectángulo que

determinan, dicho triángulo aparece claramente en su gráfico, aunque recién lo mencionará de manera explícita en la siguiente versión ante la solicitud del tutor. El texto es claro, aunque lo hubiera sido más si se apoyara con una expresión simbólica de las relaciones que se enuncian.

3ª versión: En esta versión el alumno aclara en el texto que está trabajando sobre un triángulo que es rectángulo y que por ende cumple con la relación pitagórica. Incorpora además algunas expresiones simbólicas que le dan más claridad a sus comentarios; resultando un texto coherente, consistente y completo.

4ª versión: Se explicita, dentro del texto del correo electrónico, cual es la propiedad que permite asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo (susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras): la perpendicularidad entre la tangente a una circunferencia y el radio hasta ese punto.

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

La construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, responde a las condiciones dadas y permite el análisis solicitado. Existe coherencia entre el texto y la construcción propuesta.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se observa que el alumno, que al principio tenía una actitud un tanto tímida y reservada (que es la que suele tener en todas las clases), comienza a abrirse al diálogo y al intercambio con el tutor en la medida que siente que éste se interesa no sólo en corregir sus actividades sino también en su vida personal.

■ **Análisis Ortografía:**

Prácticamente no aparecen errores de ortografía, Stefan comienza a prestar atención al uso de tildes (sugerencia realizada por el tutor poco antes) y mejora mucho este aspecto de su ortografía, observándose que faltan muy pocas (en éste y área).

Se sigue apreciando el buen uso de los signos de puntuación, lo que ayuda también a una mejor coherencia y claridad del texto.

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, si bien no se utilizan notaciones para los segmentos, puntos y circunferencias, se emplea un código de colores que da lugar a un mensaje claro, sin ambigüedades, en el que las ideas se expresan con corrección.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (circunferencia, radio, área, tangente, perpendicular, hipotenusa, catetos, triángulo rectángulo, etc.); aspecto que sigue destacándose como especialmente meritorio dado que el castellano no es la lengua madre del alumno.

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.



Se superan los escollos comunicativos que suponen la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas (asegurar que el triángulo mencionado es rectángulo, susceptible de la aplicación del Teorema de Pitágoras, relación entre radios y consecuencia sobre la relación entre áreas).

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; su enunciado resulta apropiado y claro en todos los casos, proponiéndose una forma contextualizada a la situación del problema. Las afirmaciones que se realizan, se apoyan e ilustran con mediciones y cálculos que aparecen integrados en los textos y con expresiones simbólicas de las relaciones que se mencionan.

Asimismo, el código de colores utilizado, termina de mejorar la comunicación de los razonamientos realizados.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 3
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 2
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 3
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 11/12 (91,67%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área del círculo, Teorema de Pitágoras, perpendicularidad entre radio y tangente; seleccionándolos y contextualizándolos con total idoneidad.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: La pregunta formulada es abierta (“¿Qué relación...”) y para dar respuesta a esta cuestión, el alumno aplica y adapta diversas estrategias: mide y compara radios y áreas; busca regularidades analizando variaciones del modelo que ha construido, realiza los cálculos pertinentes, encuentra la relación entre las áreas (la suma de dos de ellas coincide con el área del círculo mayor) y la enuncia con corrección.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*  
 SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.
- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*  
 SIN AYUDAS: Comunica de manera clara una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas.  
 CON AYUDAS: Como respuesta a las intervenciones del tutor, avanza en la calidad de su solución, haciendo que la misma resulte cada vez más consistente y esté mejor argumentada.
- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*  
 Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver dos diversificaciones.
- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*  
 Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.

### 15.3.9. Actividad ACE6

1. *Itinerario de resolución* (esquema):(ver Figura 15.106)

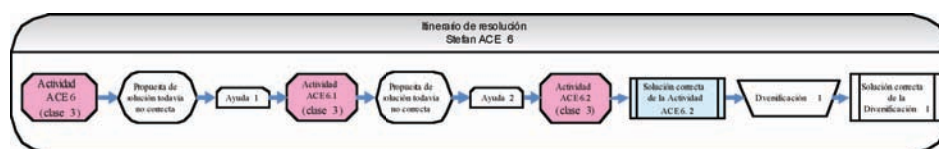


Figura 15.106: Itinerario de resolución

2. *Itinerario de resolución* (detalle):

**Primera versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola!!!

El nombre de nuestro papa no se cual es pero se que es mayor tiene ya sus años de mandato.

La fiesta muy bien todos en familia y en nuestro rectángulo es una tradición pintar los huevos y por la mañana al levantarte o durante todo ese día chocar los huevos con amigos y familiares.

Un de ellos tiene que decir Jesús ha renacido y el otro tiene que decir de verdad ha renacido y chocar los huevos y al que no se le ropa se dice que va a tener mucha suerte.

Esta es la respuesta a la pregunta de por que el triángulo que forman los radios es rectángulo.

El triángulo es rectángulo porque uno de los radios es la tangente de otro radio y estos son siempre perpendiculares y los triángulos rectángulos siempre tienen un ángulo recto.

Espero que este bien la actividad que le he mandado al igual que la respuesta a la pregunta que me había formulado. Un saludo

Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.107)

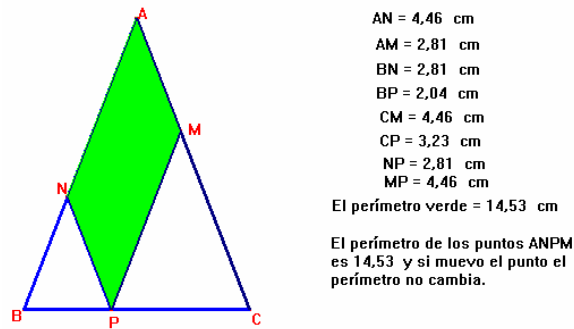


Figura 15.107: Primera versión

**Tutorización (1ª ayuda):** “Lo que dices del perímetro es cierto, por más que movamos el punto  $P$  (siempre sobre  $BC$ ), el perímetro del cuadrilátero no cambia; faltaría que analices porqué ocurre esto y que expreses lo sucedido en forma de teorema. Analiza además, la otra cuestión: ¿En qué posición del punto  $P$  es máxima el área del cuadrilátero? ¿Cuánto vale esa área máxima? Muestra tu razonamiento.”

**Segunda versión.** *Texto de correo electrónico:*

Hola!!!

Le vuelvo a mandar esta actividad con todo lo que pedía el ejercicio solo que he cambiado los colores del triángulo y los he puesto como los de la bandera de rumania.

Cuando acabe de enviarle este correo nos vamos a jugar un partido de voleibol en la daraga el campeonato de España de voleibol y el equipo de este instituto representara a La Rioja y espero que quedemos en un buen lugar.

Un saludo de: Stefan

*Resolución propuesta* (archivo Cabri):(ver Figura 15.108)

**Tutorización (2ª ayuda):** “Lo que dices está muy bien, el perímetro del cuadrilátero amarillo es igual a la suma de los dos lados iguales del triángulo  $ABC$ , faltaría

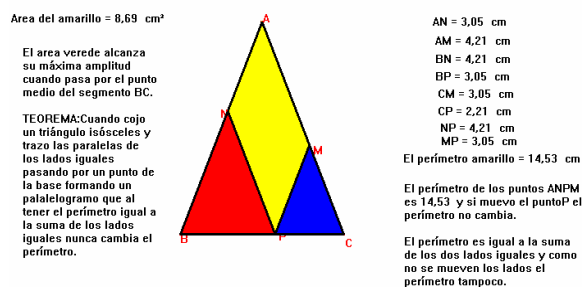


Figura 15.108: Segunda versión

que justifiques por qué (¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?). El teorema que has formulado está bastante bien, pero revisa la manera en que lo has expresado intentando mejorarla para que quede más claro.”

**Tercera versión.** *Texto de correo electrónico:* Hola

La respuesta a la pregunta esta dentro de la actividad y espero que este bien.

En cuando a los partidos de voley perdimos el del barsa y el de canarias lo perdimos por el arbitro y quedamos 8 de España o asi.

Un saludo

Stefan

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.109)

**Tutorización (1<sup>a</sup> diversificación):** “El razonamiento que propones está muy bien, y es muy claro tu dibujo para explicarlo paso a paso. Respecto al área del cuadrilátero, es cierto que es máxima cuando P coincide con en el punto de BC, intenta relacionar ese valor máximo con el área del triángulo ABC y justificar lo sucedido.”

**Cuarta versión.**

**Resolución propuesta en Cabri** (ver Figura 15.110)

### 3. Análisis de la Competencia Comunicativa:

#### ■ Análisis Coherencia intratextual:

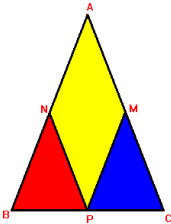
En este caso, nuevamente lo que se pide no es la descripción de un procedimiento de construcción sino que lo que se solicita es encontrar una relación geométrica, para lo cual la construcción adecuada es un requisito.

La construcción es realizada con corrección por el alumno (cumpliendo las condiciones indicadas en el enunciado de la actividad) y también se encuen-

El área del amarillo =  $8,92 \text{ cm}^2$

El área amarillo alcanza su máxima amplitud cuando pasa por el punto medio del segmento BC.

TEOREMA: Cuando cojo un triángulo isósceles y trazo las paralelas de los lados iguales pasando por un punto de la base queda formado un paralelogramo que al tener el perímetro igual a la suma de los lados iguales nunca cambia el perímetro.



AN = 3,65 cm  
 AM = 3,62 cm  
 BN = 3,62 cm  
 BP = 2,62 cm  
 CM = 3,65 cm  
 CP = 2,65 cm  
 NP = 3,62 cm  
 MP = 3,65 cm

El perímetro amarillo = 14,53 cm  
 El perímetro de los puntos ANPM es 14,53 y si muevo el punto P el perímetro no cambia.

El perímetro es igual a la suma de los dos lados iguales y como no se mueven los lados el perímetro tampoco.

Esta es la respuesta a la pregunta ¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?

Se coje el lado NP y se pone en el lugar del lado NB porque miden lo mismo y se cambia el lado MP por el lado MC porque tambien miden lo mismo porque se han formado apartir de los lados y de las paralelas de los lados y con el triángulo inicial es isósceles y los dos pequeños también son isósceles. Con estos triángulos y con este ejemplo he podido hallar la respuesta.




Figura 15.109: Resolución propuesta

El área del amarillo =  $8,92 \text{ cm}^2$   
 El área de ABC =  $17,83 \text{ cm}^2$

El área amarillo alcanza su máxima amplitud cuando pasa por el punto medio del segmento BC.

El área amarillo es la mitad del área de ABC.

Para que el área del amarillo sea máxima, el paralelogramo tiene que ser un rombo para que su anchura sea máxima. Para convertir el amarillo en un rombo tengo que mover P hasta el punto medio de BC.



AN = 3,65 cm  
 AM = 3,62 cm  
 BN = 3,62 cm  
 BP = 2,62 cm  
 CM = 3,65 cm  
 CP = 2,65 cm  
 NP = 3,62 cm  
 MP = 3,65 cm

El perímetro amarillo = 14,53 cm  
 El perímetro de los puntos ANPM es 14,53 y si muevo el punto P el perímetro no cambia.

El perímetro es igual a la suma de los dos lados iguales y como no se mueven los lados el perímetro tampoco.

Esta es la respuesta a la pregunta ¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?

Se coje el lado NP y se pone en el lugar del lado NB porque miden lo mismo y se cambia el lado MP por el lado MC porque tambien miden lo mismo porque se han formado apartir de los lados y de las paralelas de los lados y con el triángulo inicial es isósceles y los dos pequeños también son isósceles. Con estos triángulos y con este ejemplo he podido hallar la respuesta.

TEOREMA: Cuando cojo un triángulo isósceles y trazo las paralelas de los lados iguales pasando por un punto de la base queda formado un paralelogramo que al tener el perímetro igual a la suma de los lados iguales nunca cambia el perímetro.



Figura 15.110: Resolución propuesta

tran las condiciones para que el área del cuadrilátero sea máxima y la particularidad que se cumple para el perímetro. En todos los casos, los comentarios son claros, completos y consistentes.

En la 1ª versión sólo se explicita la relación hallada para el perímetro de manera correcta y clara, pero no se justifica porqué ocurre.

En la 2ª versión, se produce un avance importante y el alumno relaciona ese perímetro constante con las medidas del triángulo inicial (aunque todavía no justifica porqué ocurre); escribe el enunciado del teorema solicitado de manera casi perfecta (incluye las condiciones iniciales que deben cumplirse

y la relación que ocurrirá a partir de ellas) salvo por un pequeño fallo en la utilización de los verbos; y encuentra las circunstancias para las cuales el área del cuadrilátero se hace máxima.

En la 3ª versión, además de corregir el enunciado de su teorema, el alumno parte de la pregunta formulada por el tutor en la ayuda y explica perfectamente, proponiendo para ellos una secuencia de razonamiento que acompaña de dibujos aclaratorios, porque el perímetro del cuadrilátero coincide con la suma de los lados iguales del triángulo ABC. En esa explicación, el alumno incluye incluso la justificación de porqué los "triángulos pequeños resultan isósceles refiriéndose a su construcción mediante paralelas a los lados del triángulo isósceles inicial (esta justificación no suele incluirse por los alumnos a menos que el tutor lo solicite a través de una diversificación que en este caso no fue necesaria).

En la 4ª versión, el alumno relaciona el área máxima del cuadrilátero con la del triángulo ABC y da una explicación intuitiva de porqué el área es máxima en esas condiciones (no se pretendía una demostración de esta relación sino simplemente una explicación intuitiva).

■ **Análisis Coherencia extratextual:**

En todos los casos, la construcción es acorde a las condiciones enunciadas por el problema, y permite el análisis solicitado; existiendo total coherencia entre textos y construcciones.

■ **Análisis Cortesía y adecuación:**

El texto de los mensajes sigue manteniendo la cortesía y la adecuación; se observa un gran avance en la construcción de la relación interpersonal. Se produce un intercambio con el tutor que abarca temas culturales, religiosos, deportivos y geométricos; todos ellos de manera amena e integrada (puede notarse en los textos de correo, la manera en que el alumno se refiere a estos distintos temas, cambiando de uno a otro en los distintos párrafos en los que la geometría aparece como un tema más de conversación e intercambio).

La forma de comunicación a través del correo electrónico de Stefan, siempre respetuosa pero cada vez más extrovertida y predispuesta al intercambio, contrasta con su actitud en las clases (no sólo en las clases de esta materia sino en otras que se han observado), en las que es un alumno de lo más callado, silencioso, los profesores no conocen prácticamente nada de él más que es rumano.

Destacamos este aspecto como muy positivo, en el sentido de lograr que el alumno se sienta ante un interlocutor que lo escucha (en realidad lo lee), se interesa por los distintos aspectos de su vida permitiéndole que su cultura, sus costumbres adquieran importancia en el intercambio; sirviendo todo esto además para que el alumno logre una excelente conexión respecto a la materia y sus actividades.

■ **Análisis Ortografía:**

Aparecen muy pocos errores de ortografía, faltan algunas tildes (en Se, esta, solo, representara, area, este, arbitro, etc.); pero el uso de las mismas ha mejorado muchísimo.

Aparece algunas omisiones de letras o uso de unas en lugar de otras (perdido en lugar de partido, ropa en vez de rompa), pero dichos errores son más de

tipo mecanográfico que ortográficos.

Se sigue apreciando el mejor uso de los signos de puntuación (lo que contribuye a la coherencia y claridad del texto).

En cuanto al uso del lenguaje geométrico, son adecuadas las notaciones empleadas para los segmentos, puntos, triángulos y cuadriláteros.

■ **Análisis Vocabulario:**

El uso del vocabulario general y el geométrico en particular es muy correcto.

Los términos geométricos utilizados para hacer referencia a elementos y relaciones geométricas están bien empleados (área, punto, paralela, triángulo isósceles, perímetro, área, teorema, etc.); la única observación es que hace referencia, por ejemplo, al "perímetro del amarillo." al "perímetro de los puntos ANPM", se supone que refiriéndose al "perímetro del polígono amarillo." al "perímetro del cuadrilátero ANPM".

■ **Análisis Creatividad y solución de problemas comunicativos:**

Nuevamente, la construcción propuesta no ofrece dificultades y resulta apropiada para resolver las cuestiones planteadas por la actividad.

Se superan los escollos comunicativos que supone la explicitación de las propiedades que justifican las relaciones encontradas.

Respecto a la identificación y contextualización de propiedades involucradas, si bien algunas vinieron en respuesta a demandas por parte del profesor; ha mejorado su enunciado, el orden en que se proponen, y la contextualización de las mismas logrando explicitarlas de una forma acorde a la situación del problema que aunque sería mejorable supone un gran avance respecto a lo realizado en actividades anteriores.

Destacamos que ha sido de los poquísimos alumnos que ha propuesto un enunciado del teorema que, si bien requirió de una orientación del tutor para ser totalmente claro, resultaba claro y completo; respondiendo a las condiciones necesarias para un enunciado de teorema.

Asimismo, ante una pregunta del tutor ("¿por que el perímetro del paralelogramo es siempre igual a la suma de los lados iguales?"); el alumno explicita sus ideas paso a paso, e incluso se ayuda de un esquema que ha improvisado utilizando Cabri, para ilustrar gráficamente su razonamiento.

■ **Valoración/ponderación:**

- *Componente Coherencia:* 3
- *Componente Cortesía y Adecuación:* 3
- *Componente Ortografía y Vocabulario:* 3
- *Componente Creatividad y solución de problemas comunicativos:* 3
- *Máximo asignado:* 12
- *Ponderación general:* 12/12 (100%)
- *Discurso correcto* (de Nivel 3).

4. **Análisis del Aprendizaje de la Geometría:**

- **Indicador:** *¿Convierte el enunciado real en un enunciado matemático? (si es necesario)*

Esta fase no aparece en esta actividad.

- **Indicador:** *¿Traduce el enunciado matemático en una estructura geométrica (respetando la correspondencia entre las condiciones planteadas por el enunciado y su representación geométrica)?*

SIN AYUDAS: El alumno propone una estructura geométrica que responde a las condiciones planteadas en el enunciado sin necesidad de ayuda.

- **Indicador:** *¿Identifica, selecciona y aplica los conceptos y relaciones construidos anteriormente, necesarios para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: El alumno recurre, en los distintos momentos de su resolución, a conceptos y relaciones ya aprendidos como área y perímetro, características de triángulos isósceles y de paralelogramos, punto medio, noción de teorema, comparación de medidas de segmentos.

- **Indicador:** *¿Aplica y adapta las estrategias necesarias para resolver el problema?*

SIN AYUDAS: Para dar respuesta a las cuestiones planteadas por la actividad, el alumno aplica y adapta diversas estrategias; elige las técnicas, propiedades y relaciones que mejor se ajustan a las condiciones dadas: mide y compara perímetros, áreas y segmentos, busca regularidades y relaciones analizando variaciones del modelo que ha construido, distingue los elementos, propiedades y relaciones invariantes de los variables y los elementos relevantes de los irrelevantes.

- **Indicador:** *¿Reflexiona y controla el proceso de resolución?*

SIN AYUDAS: El alumno reflexiona sobre el proceso propuesto, valida la solución propuesta a través de procesos de visualización, medición, intentos de variaciones sobre la construcción.

CON AYUDAS: Las orientaciones del tutor, no obstante, le llevan a reflexionar sobre cuestiones puntuales, indicando por ejemplo qué le falta hacer todavía, pero en ningún caso, las ayudas aportan información adicional respecto a la que se ofrecía en el enunciado original del problema: en este caso la ayuda del tutor no aporta nuevas informaciones, simplemente sugiere la autorreflexión sobre las ideas propuestas por el mismo alumno.

- **Indicador:** *¿Comunica acerca del modelo y de sus resultados dando una solución justificada al problema propuesto*

SIN AYUDAS: El alumno comunica de manera clara y coherente, una respuesta que se corresponde con lo solicitado por la actividad y con las diversificaciones propuestas. Realiza además una descripción, utilizando lenguaje verbal, del proceso de resolución del problema geométrico planteado y del razonamiento llevado a cabo para justificar las relaciones involucradas.

- **Indicador:** *¿Cuántas diversificaciones resuelve? (¿hasta qué nivel de profundización avanza?)*

Una vez resuelta la actividad inicial, el alumno avanza y es capaz de resolver una diversificación.

- **Valoración/ponderación:** *Clase de actividad que resuelve el alumno y nivel que le corresponde.*

Teniendo en cuenta el análisis del itinerario realizado, el alumno ha resuelto una Actividad de Tercera clase, que se corresponde con un Nivel 3.



## Capítulo 16

# Glosario y Esquemas

Presentamos un breve glosario de términos y esquemas utilizados para la representación de itinerarios de resolución

### Glosario

- AEP: actividad de etapa presencial
- ACE: actividad de etapa correo electrónico
- AFE: actividad de etapa foro electrónico
- AG: Aprendizaje de la Geometría
- CC: competencia comunicativa
- EVA: entorno virtual de aprendizaje
- GD: Geometría Dinámica
- SA1: primera secuencia de actividades
- SA2: segunda secuencia de actividades
- SGD: software de Geometría Dinámica
- T: tutorización
- TIC: Tecnologías de la Información y la Comunicación

## Esquemas

Esquemas utilizados para la representación de itinerarios de resolución

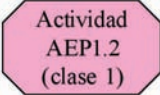
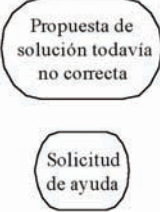

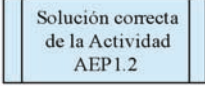

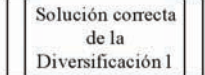
| <b>Esquema:</b>   | <b>Representa:</b>   |
|---|--|
|    | <p><i>Actividad a resolver por el alumno: etapa a la que corresponde, versión de dicha actividad, y clase según complejidad.</i></p> <p>En el ejemplo: Segunda versión de la Primera Actividad de la etapa presencial (según su complejidad corresponde a la Clase 1).</p> |
|    | <p><i>La solución propuesta por el alumno todavía no es correcta (requiere ayuda por parte del profesor) o bien el alumno solicita más ayuda para resolver la actividad.</i></p>   |
|  | <p><i>El tutor aporta una ayuda.</i></p>   |
|  | <p><i>Solución correcta de la actividad.</i></p>   |
|  | <p><i>El tutor propone una diversificación al alumno.</i></p>  |
|  | <p><i>Solución correcta de una diversificación.</i></p>  |

Figura 16.1: Esquemas utilizados para la representación de itinerarios

# Bibliografía

- [1] ABREU, G. (2000). Relationships between macro and micro sociocultural contexts: Implications for the study of interations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 41 (1), pp. 1-29.
- [2] ABREU, G. (2001). Towards a cultural psychology perspective on transitions between contexts of mathematical practices, en ABREU, G. et al. (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practice*, pp. 173-192. London: Kluwer Academic Publishers.
- [3] ALÀS, A.; BARTOLOMÉ, A.; BAUTISTA, F. et al. (2002). *Las tecnologías de la información y de la comunicación en la escuela*. Barcelona: Graó.
- [4] ALBALADEJO, T. (1992). *Semántica de la narración: la ficción realista*. Madrid: Taurus.
- [5] ALMEIDA, M. (2002). *Desarrollo profesional docente en Geometría: análisis de un proceso de formación a distancia*. Tesis doctoral. Universidad de Barcelona, Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas.
- [6] ALONSO, J. (1995). La evaluación de la comprensión lectora. *Textos de Didáctica de la Lengua y la Literatura*, 5, pp. 63-68. Barcelona: Graó.
- [7] ALSINA C., BURGÚÉS C., FORTUNY, J et al. (1995). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.
- [8] ALSINA, C., FORTUNY, J. M, et al. (1997). *¿Por qué Geometría? Propuestas didácticas para la ESO*. España: Síntesis.

- [9] ÁLVAREZ, Q. (1999). *La comunicación relacional y la interacción profesor- alumno*. España: Grupo Editorial Universitario.
- [10] APPLE, M. (1996). *El conocimiento oficial*. Barcelona: Paidós.
- [11] ÁREA, M. (1999). Desigualdades, educación y nuevas tecnologías. *Quaderns Digital, Quaderns Digital*, 11, recuperable en [www.quadernsdigitals.net](http://www.quadernsdigitals.net)
- [12] ARSAC, G. (1988). Les recherches actuelles sur l'apprentissage de la démonstration et les phénomènes de validation en France. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), pp. 247-280.
- [13] ARTIGUE, M. (1990). Epistémologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (2-3), pp. 243-285.
- [14] ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos, en P. Gómez (editor) *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamericano/ Una empresa docente.
- [15] ARTIGUE, M. (1998). Teaching and Learning Elementary Analysis, en ALSINA, C. et al. (eds.), *ICME 8 (1996) Selected Lectures* (pp. 15-29). Sevilla: S.A.E.M. THALES.
- [16] ARTIGUE, M. (2003). The teaching and learning of mathematics at university level, en HOLTON, D. et al. (eds.), *An ICMI Study* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [17] ATIENZA, E. (1999). *Propuesta de evaluación del texto escrito en Enseñanza Secundaria, Propuesta de evaluación normativa y criterial para el texto expositivo académico*. Tesis Doctoral. Departament De Didàctica De La Llengua I La Literatura De La Universitat De Barcelona.
- [18] AUSUBEL, D.P.; NOVACK, J.D. y HANESIAN, H. (1978). *Psicología educativa, un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.
- [19] AUSTIN, J. (1998). *Cómo hacer cosas con palabras*. Barcelona: Paidós.
- [20] ÁVILA, P. (2000). Aprendizaje con nuevas tecnologías: paradigma emergente, en DE LOS SANTOS, J. (comp.), *La investigación educativa y el conocimiento sobre los alumnos* (pp. 174.187). Colima: Universidad de Colima.

- [21] BACHMAN, L. (1995). Habilidad lingüística comunicativa, en LLOBERA, M. (coord.), *Competencia comunicativa* (pp. 105-127). Madrid: Edelsa.
- [22] BALACHEFF, N. (1982). Preuve et démonstration en mathématique au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(3), pp. 261-304.
- [23] BALACHEFF, N. (1990). Towards a “problématique” for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, (4), pp. 259-272.
- [24] BALACHEFF, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas, en GORGORIO, N.; DEULOFEU, J. et al. (coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 93-108). Barcelona: Graó.
- [25] BACHELARD, G. (1972). ). *La formación del espíritu científico*. Buenos Aires: Siglo XXI.
- [26] BARTOLINI, M. G. y BOERO, P. (1998). Teaching and Learning Geometry in Contexts, en C. MAMMANA y V. VILLANI (eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century* (pp. 52-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- [27] BARTOLINI, M. (2000). Early approach to mathematical ideas related to proof making. *La Lettre de la Preuve*, Janvier/Février 2000, ICME9 TSG-12.
- [28] BEAUGRANDE, R. (1981). *Introduction to Text Linguistics*. Londres: Longman.
- [29] BEAUGRANDE, R. (1984). *Text production: Toward a science of composition*. Nordwood: N. J. Ablex.
- [30] BEAUGRANDE, R. (1990). Naïve Respondents and Creative Response. *SPIEL*, 8(2), pp. 233-254.
- [31] BELLEMAIN, F. y CAPPONI, B. (1992). Specificité de l’organisation d’une séquence d’enseignement lors de l’utilisation de l’ordinateur. *Educational Studies in Mathematics*, 23 (1), pp. 59-97

- [32] BEREITER, C. (1980). Development in writing, en GREGG y STEINBERG (eds.), *Cognitive processes in writing* (pp. 73-96). Hillsdale: NJ Erlbaum.
- [33] BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M. (1983). Does learning to write have to be so difficult?, en FREEDMAN, A.; PRINGLE, I. y YALDEN, J. (eds.), *Learning to write: first language, second language* (pp. 20-33). Londres: Longman.
- [34] BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M. (1987). *The psychology of written composition*. Hillsdale: N. J. Erlbaum.
- [35] BEREITER, C. y SCARDAMALIA, M. (1992). Two models of classroom learning using a communal database, en Dijkstra, S.; Krammer, M. y Merriënboer, J. (Eds.), *Instructional models in computer-based learning environments* (pp. 229-261). Berlin: Springer-Verlag.
- [36] BERNSTEIN, B. (1996). *Pedagogy, symbolic control and identity: Theory, research critique*. London: Taylor y Francis.
- [37] BERTINETTO, P. M. (1982). Can we give a unique definition of de concept text ?, Reflexions on the status of textlinguistics, en PETOF, J. S. (ed.), *Text vs. Sentence* (pp. 143-159). Hamburg: Buske.
- [38] BETTETINI, G y COLOMBO, F. (1995). *Las nuevas tecnologías de la educación*. Barcelona: Paidós.
- [39] BEYER, W. (2002). *Elementos de didáctica de las matemáticas*. Mérida: Escuela Venezolana para la enseñanza de la Matemática.
- [40] BISHOP, A. (1999). *Enculturación matemática*. Barcelona: Paidós.
- [41] BLÁZQUEZ, S. (1999). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales*. Tesis doctoral. Departamento de Análisis matemático y Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Valladolid.
- [42] BLECUA, J. M. (1984). *Qué es hablar*. Barcelona: Salvat.
- [43] BLOOR, D. (1998). *Conocimiento e imaginario social*. Barcelona: Gedisa.
- [44] BOE. (2003). *Real Decreto 831/2003, de 27 de junio*, por el que se establece la ordenación general y las enseñanzas comunes de la Educación Secundaria Obligatoria, (artículo 6.2).

- [45] BOERO, P., GARUTI, R., LEMUT, E. y MARIOTTI, M. A. (1996). Challenging the traditional school approach to theorems: a hypothesis about the cognitive unity of theorems. *Proceedings of PME XX*, 2, Valencia.
- [46] BOURDIEU, P. (1985). *¿Qué significa hablar? Economía de los intercambios lingüísticos*. Madrid: Akal.
- [47] BRITTON, J.; BURGESS, N.; MARTIN, A. et al. (1975). *The Development of Writing Abilities*. Londres: MacMillan Education.
- [48] BRIZ, E. (2003). El enfoque comunicativo, en MENDOZA FILLOLA, A. (coord.), *Didáctica de la Lengua y la Literatura para primaria* (pp.79-123). Madrid: Prentice Hall.
- [49] BRONCKART, J. P. y SCHNEUWLY, B. (1996). La didáctica de la lengua materna: el nacimiento de una utopía imprescindible. *Textos de Didáctica de la Lengua y la Literatura*, 9, pp. 61- 80.
- [50] BROUSSEAU, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4 (2), pp. 165-198.
- [51] BROUSSEAU, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 33-115. (Traducción de Julia Centeno, Begoña Melendo y Jesús Murillo).
- [52] BROUSSEAU, G. (1990). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (primera parte). *Enseñanza de las ciencias*, 8(3), pp.259-267.
- [53] BROUSSEAU, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las ciencias*, 9(1), pp. 10-21.
- [54] BROUSSEAU, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970-1990*. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer academic publishers.
- [55] BROUSSEAU, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

- [56] BRUNER, J. (1975). *Early Social Interaction and Language Acquisition*. London: Academic Press.
- [57] BROWN, G. y YULE, G. (1983). *Análisis del discurso*. Madrid: Visor.
- [58] BURGER, W. F., y SHAUGHNESSY, J. M. (1986). Characterising the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17 (1).
- [59] BURTON, L. (1999). The Implications of a Narrative Approach to the Learning of Mathematics, en BURTON, L. (Ed.), *Learning Mathematics: From hierarchies to networks* (pp.21- 35). London: Falmer Press.
- [60] CALSALMIGLIA, H. Y TUSÓN, A. (1999). *Las cosas del decir. Manual de análisis del discurso*. Barcelona: Ariel.
- [61] CANALE, M. (1983). From communicative competence to communicative language pedagogy, en RICHARDS, J. C. y SCHMIDT, R. (eds.), *Language and communication* (pp. 2-27). Londres: Longman.
- [62] CANALE, M. (1995). De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje", en M. LLOBERA (coord.), *Competencia comunicativa: Documentos básicos en la enseñanza de lenguas extranjeras* (pp. 63-81). Madrid: Edelsa.
- [63] CANALE, M. (1995). *De la competencia comunicativa a la pedagogía comunicativa del lenguaje en Competencia comunicativa*. Madrid: Edelsa
- [64] CANTERO, F., MENDOZA, A. y ROMEA C. (eds.) (1997). *Didáctica de la Lengua y la Literatura para una sociedad plurilingüe del siglo XXI*. Barcelona: Publicaciones de la Universitat de Barcelona.
- [65] CARDEÑOSO, J. et al. (editores) (2001). *Investigación en el aula de Matemática. Atención a la diversidad*. España: Editorial de la Universidad de Granada y Thales.
- [66] CARDEÑOSO, J. et al. (editores) (2002). *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas. Conferencia, Talleres, Comunicaciones*. España: Editorial de la Universidad de Granada y Thales.
- [67] CARRASCO, L. H. M. (2000). Leitura e escrita na matemática, en NEVES, I. C. B. et al. (org.), *Ler e escrever: compromisso de todas as áreas* (pp. 192- 204). Porto Alegre: Editora da Universidade.



- [68] CARRILLO, J. (1994). Resolución de problemas: clave del desarrollo profesional. *Epsilon*, 30, pp. 27-38.
- [69] CARRILLO, J. (1995). La resolución de problemas en Matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación? *Investigación en la Escuela*, 25, pp. 79-86.
- [70] CARRILLO, J. y CONTRERAS, L. C. (1995). Un modelo de categorías e indicadores para el análisis de las concepciones del profesor sobre la Matemática y su Enseñanza. *Educación Matemática*, 7(3), pp. 79-92.
- [71] CARVAJAL, F. y RAMOS, J. (2003). Leer, comprender e interpretar en un aula que investiga. *Textos de Didáctica de la Lengua y de la Literatura*, 33, pp. 11- 23. Barcelona: Graó.
- [72] CASSANY, D. (1988). *Describir el escribir*. Barcelona: Paidós.
- [73] CASSANY, D. (1996). La cultura de la escritura: planteamientos didácticos, en AA.VV., *Aspectos didácticos de lengua y literatura*, 8, pp. 11-46. Zaragoza: ICE.
- [74] CASSANY, D., LUNA, M. y SANZ, M. (1995). *Enseñar Lengua*. Barcelona: Graó.
- [75] CASTELLS, M y HALL, P. (1994). *Tecnópolis del mundo. La formación de los complejos industriales en el siglo XXI*. Madrid: Alianza editorial.
- [76] CASTRO, E. y DE LA TORRE, E. (eds.) (2004). *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM*. A Coruña: Universidad da Coruña.
- [77] CERROTTA, C. (1997). Las nuevas tecnologías en el aula: perspectivas teóricas y experiencias, en LITWIN, E. (comp.), *Enseñanza e innovaciones en las aulas para el nuevo siglo*, pp. 73-90. Buenos Aires: El Ateneo.
- [78] COBO, P y FORTUNY, J. M. (2000). Social interactions and cognitive effects in contexts of area-comparison problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 42, pp. 115-140.
- [79] COBO, P y FORTUNY, J. M. (2005). El sistema tutorial AgentGeom y su contribución a la mejora de las competencias de los alumnos en

- la resolución de problemas de matemáticas. *Actas del IX Simposio de la SEIEM*, pp. 55-70. Córdoba: Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba y la SEIEM.
- [80] COLL, C.; PALACIOS, J. y MARCHESI, A. (comp.) (1992). *Desarrollo Psicológico y Educación II*. Madrid: Alianza.
- [81] CONNELLY, M. y CLANDININ, J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa, en LARROSA, J. et al., *Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa e educación*, (pp. 11-59). Barcelona: Laertes.
- [82] COURTÉS, J. (1997). *Análisis semiótico del discurso*. Madrid: Gredos.
- [83] CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- [84] CHEVALLARD, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1), pp. 73-112.
- [85] CHOMSKY, N (1964). *Problemas actuales de la lingüística. Temas teóricos de gramática generativa*. México: Siglo XXI.
- [86] CHOMSKY, N (1965). *Aspectos de la teoría de la sintaxis*. Madrid: Aguilar.
- [87] CHOMSKY, N (1974). Problemas de la explicación lingüística, en BORGES, R. y CIOFFI, F., *La exploración en las ciencias de la conducta* (pp. 265-300). Madrid: Alianza.
- [88] DAVIS, P. y HERSH, R. (1988). *Experiencia Matemática*. Barcelona: Labor- MEC.
- [89] DE LA TORRE, E. (2003). *Didáctica de la geometría y demostración de propiedades*. Texto de la ponencia presentada en la reunión del Grupo de Aprendizaje de la Geometría. 7º Simposio de la SEIEM. Granada.
- [90] DE LA TORRE, S.; MALLART, J. et al. (1994). *Errores y currículo*. Barcelona: P.P.U. S.A.
- [91] DELORME, Ch. (1984). *De la animación pedagógica a la investigación-acción*. Madrid: Narcea.

- [92] DE MIGUEL, E., FERNÁNDEZ, M. y CARTONI, F. (eds.) (2000). *Sobre el lenguaje: miradas plurales y singulares*. Madrid: Arrecife- UA.
- [93] DE PABLOS, J. (1994). Visiones y conceptos sobre la tecnología educativa, en SANCHO, J., *Para una tecnología educativa* (pp.39-58). Barcelona: Horsori.
- [94] DEPOVER, C., GIARDINA, M. y MARTON, P., (1998). *Les environnements d'apprentissage multimédia*. Francia: L Harmattan, Série Références.
- [95] DRAE. *Diccionario de la Real Academia Española* (2001). 22º edición.
- [96] DUVAL, R. (1991). Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics*, 22.
- [97] DUVAL, R. (2001). *La Geometría desde un punto de vista cognitivo*. PMME: UNISON
- [98] ECO, U. (1968). *Apocalípticos e integrados*. Barcelona: Lumen.
- [99] EDMONSON, W. (1981). *Spoken Discourse. A model for analysis*. Londres: Longman.
- [100] EDWARDS, D. y MERCER, N. (1988). *El conocimiento compartido. El desarrollo de la comprensión en el aula*. Barcelona: Paidós/ MEC.
- [101] ELLIOT, J. et al. (1986). *Investigación-acción en el aula*. Valencia: Conserjería de educación y Ciencia de la Comunidad Valenciana.
- [102] ELLIOT, J. (1990). *La investigación-acción en educación*. Madrid: Morata.
- [103] ELLIOT, J. (1993). *El cambio educativo desde la investigación-acción*. Madrid: Morata
- [104] ERNEST, P. (1998). *Social constructivism as a philosophy of mathematics*. New York: SUNY.
- [105] ERNEST, P. (1998). Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics, en ALSINA, C. et al. (eds.), *ICME 8. Selected Lectures* (pp.153-171). Sevilla: SAEM THALES.
- [106] ESCANDELL, M. V. (1993). *Introducción a la pragmática*. Barcelona: Anthropos.

- [107] EVANS, J. (2000). *Adults mathematical thinking and emotions: A study of numerate practices*. London: Routledge Falmer.
- [108] FEGUEL, C. (2000). *Interacción en el aula*. España: Praxis.
- [109] FIGUEIRAS, L. (2000). *Written Discourse in Virtual Environments*. Barcelona: U.A.B.
- [110] FISCHBEIN, E. (1982). Intuition and Proof. *For the learning of Mathematics*, 3 (2).
- [111] FORTUNY, J.M., MURILLO, J., MARTÍN, J.F. et al. (1999). Un modelo de diseño interactivo como soporte y ampliación instruccional en la enseñanza de la geometría en la E.S.O. *Contextos educativos, Revista de Educación*, 2, pp. 27-52.
- [112] FORTUNY, J. M. y JIMÉNEZ, J. (2000). *Teletutorización Interactiva en Matemáticas para asistencia hospitalaria*. Barcelona: Proyecto TIMAH. PIE.
- [113] FORTUNY, J. M., MARTÍN, J. F., MURILLO, J. et al. (1999). Un modelo de diseño interactivo como soporte y ampliación instruccional en la enseñanza de la geometría en la ESO. *Contextos educativos: Revista de educación*, 2, pp. 27-52, UR.
- [114] FORTUNY, J. M. y MURILLO, J. (2003/2004). Interactividad en la red con actividades CABRI. *Contextos educativos: Revista de educación*, 6-7, pp. 295-316, UR.
- [115] FOUCAULT, M. (1966). *Las palabras y las cosas*. Madrid: Siglo XXI.
- [116] FOUCAULT, M. (1969). *La arqueología del saber*. Madrid: Siglo XXI.
- [117] Frigerio, G. (Comp.) (1991). *Currículum presente, ciencia ausente*. Buenos Aires: Miño y Dávila Editores.
- [118] GALERA, F. (2003). La lectoescritura: métodos y procesos, en MENDOZA FILLOLA, A. (coord.), *Didáctica de la Lengua y la Literatura*. Madrid: Prentice Hall.
- [119] GAIRÍN, J.M. (1998). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Tesis Doctoral, Departamento de Matemáticas. universidad de Zaragoza.

- [120] GASCÓN, J. (1998). Evolución de la didáctica de la matemática como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(1), pp. 7-34.
- [121] GIMENO, J. (1985). *Teoría de la enseñanza y desarrollo del currículo*. Madrid: Anaya.
- [122] GODINO, J. D. et al. (editores) (1991). *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.
- [123] GODINO, J. (2001). Confrontación de herramientas teóricas para el Análisis Cognitivo en Didáctica de las Matemáticas. Recuperable en [www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm](http://www.ugr.es/local/jgodino/semiotica.htm)
- [124] GODINO, J. D. (2002). *Perspectiva de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica*. Universidad de Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- [125] GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), pp. 325-355.
- [126] GODINO, J. D. (2004). *Marcos teóricos de referencia sobre la cognición matemática*. Documento de trabajo del curso de doctorado "Teoría de la educación Matemática". Recuperable en: [www.ugr.es/local/jgodino](http://www.ugr.es/local/jgodino)
- [127] GÓMEZ- VILLALBA, E. et al. (1995). Animación a la lectura y composición escrita, en GUERRERO, P. y LÓPEZ, A. (eds.), *Aspectos de didáctica de la lengua y la literatura*. Murcia: SEDLL.
- [128] GORGORIÓ, N., DEULOFEU, A. y BISHOP, A. (Comp.) (2000). *Matemáticas y educación*. Barcelona: Graó.
- [129] GRICE, P. (1991). Las intenciones y el significado del hablante, en VALDÉS, L. M. (ed.), *La búsqueda del significado* (pp. pp.495-523). Madrid: Tecnos.
- [130] GRICE, P. (1975). Lógica y significado, en VALDÉS, L. M. (ed.) (1991), *La búsqueda del significado* (pp. 511-530). Madrid: Tecnos.
- [131] GRUPO PI (CAÑADAS, S.; M., DURÁN, F. et al.) (2002). Materiales didácticos en la resolución de problemas, en CARDEÑOSO, J. M. et al. (editores), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de*

- problemas. Conferencia, Talleres, Comunicaciones* (pp.99-110). España: Editorial de la Universidad de Granada y Thales.
- [132] GUMPERZ, J. J. (1982). *Discourse Strategies*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [133] GUMPERZ, J. J. (1982). *Language and social identity*. Cambridge: Cambridge University Press.
- [134] GUMPERZ, J. J. (1988). La sociolingüística interaccional en el estudio de la interacción, en J. COOK- GUMPERZ (comps.), *La construcción social de la alfabetización* (pp. 61 83). Barcelona: Paidós/ MEC.
- [135] GUMPERZ, J. J. y HYMES, D. (1964). The Ethnography of Communication. *American Anthropologist*, 66 (6), parte 2.
- [136] GUTIÉRREZ, Á. y JAIME, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los giros. *Revista Educación Matemática*, 3 (2), pp. 49-65.
- [137] GUTIÉRREZ, A. (2005). Aspectos metodológicos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploraciones con software de geometría dinámica, en MAZ, A.; GÓMEZ, B.; TORRALBO, M. (eds.), *Actas del 9º Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, (pp. 27-44). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- [138] GUTIÉRREZ, A. (1997). *Educación Multimedia y Nuevas Tecnologías*. Madrid: Ediciones de la Torre.
- [139] GUTIÉRREZ MARTÍN, A. (2000). Educación multimedia: nuevos textos, nuevos contextos. *Tabanque: Revista pedagógica*, 14, pp. 75 90.
- [140] GUTIÉRREZ MARTÍN, A. (2000). Evaluación de la comunicación en las aplicaciones multimedia educativas, en APARICI, R. et al., *Evaluación de las Tecnologías* (pp. 123-151). Madrid: UNED.
- [141] HYDE, R. (1996). Matemáticas y lenguajes: un estudio sobre la descripción de patrones geométricos por parte de niños. *Matemáticas y lenguajes. Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional. IC-ME 8*. pp. 113 130 Sevilla: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.

- [142] HYMES, D. H. (1984). *Vers le compétence de communication*. París: Hatier.
- [143] HYMES, D. H. (1995). Acerca de la competencia comunicativa, en LLOBERA, M., *Competencia comunicativa: Documentos básicos en la enseñanza de lenguas extranjeras* (pp. 27-46). Madrid: Edelsa.
- [144] IBÁÑEZ, M. (2001). *Aspectos cognitivos del aprendizaje de la demostración matemática en alumnos de primer curso de bachillerato*. Tesis doctoral. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid.
- [145] IBÁÑEZ, T. (2003). El giro lingüístico, en ÍÑIQUEZ RUEDA, L. (editor), *Análisis del discurso. Manual para las Ciencias Sociales* (pp. 21-42). España: UOC.
- [146] IGUAZ DE MIGUEL, P. (2001). Comprensividad, atención a la diversidad y convivencia, en CARDEÑOSO, J. et al. (editores) *Investigación en el aula de Matemática. Atención a la diversidad* (pp. 13-20). Granada: Editorial de Sociedad Thales.
- [147] ÍÑIQUEZ, L. editor (2003). *Análisis del discurso. Manual para las Ciencias Sociales*. España: UOC.
- [148] ÍÑIGUEZ, L. y ANTAKI, C. (1994). El análisis del discurso en psicología social. *Boletín de Psicología*, 44, pp. 57-75.
- [149] ÍÑIGUEZ, L. y ANTAKI, C. (1998). Análisis del discurso. *Revista Anthropos: Huellas del conocimiento*, N° 177, pp 59-66.
- [150] JACKSON, P. W. (1992). *La vida en las aulas*. Madrid: Morata.
- [151] JACQUINOT, G. (1997). *La escuela frente a las pantallas*. Buenos Aires: Aique.
- [152] JIMÉNEZ, J. (1999). La eficacia comunicativa de los sistemas multimedia educativos. *Cuadernos de Documentación Multimedia. Revista del Servicio de Documentación Multimedia de la Facultad de Ciencias de la Información (UCM)*, 8. Recuperable en <http://www.ucm.es/info/multidoc/multidoc/revista/num8/jsegura>
- [153] JOHNSON, D. y JOHNSON, R. (1991). *Learning together and alone. Cooperative, competitive and individualistic learning*. Needham Heights MA: Allyn and Bacon.

- [154] JOHNSON, D., JOHNSON, R. y HOLUBEC, E. (1999). *El aprendizaje cooperativo en el aula*. Barcelona: Paidós.
- [155] JOHNSON, D. y JOHNSON, R. (2001). *An overview of cooperative learning* (Online). Recuperable en: <http://www.clcrc.com/pages/overviewpaper.html>
- [156] JOHNSON, S. y DUPIN, J. J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Francia: puf.
- [157] KAY, M. (1985). Parsing in functional unification grammar, en DOWTY, D. R.; KARTTUNEN, L. y ZWICKY, A. (eds.), *Natural language parsing. Psychological, computational and theoretical perspectives* (pp. 251-278). Cambridge: Cambridge Univ. Press.
- [158] KEMMIS, S. y MCTAGGART, R. (1988). *Cómo planificar la investigación-acción*. Barcelona: Laertes.
- [159] Kieran, C., Forman, E. y Sfard, A. (2001). Learning discourse: Sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 46, pp. 1-12.
- [160] KILPATRICK J., GÓMEZ P. y RICO L. (1994). *Educación matemática*. España: Síntesis.
- [161] KLIMOVSKY, G. (1995). Posmodernidad versus Ciencia. *Revista Noticias*, 19 de marzo de 1995. Buenos Aires: Perfil.
- [162] LABORDE, C. y CAPPONI, B. (1994). Cabri-géometre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, 14, pp. 165-210.
- [163] LEÓN, B. et al. (2005). *Técnicas de aprendizaje cooperativo en contextos educativos*. Badajoz: Abecedario.
- [164] LERMAN, S. (2001). The social turn in mathematics education research, en BOALER, J. (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Westport: Ablex Publishers.
- [165] LEVINSON, S. C. (1989). *Pragmática*. Barcelona: Teide.
- [166] LESCANO, M. y LOMBARDO, S. (2002). La competencia comunicativa, en *Documentos de Prodyemes II* (pp. 21-30). Buenos Aires: Prodyemes II.



- [167] LITWIN, E. (comp.) (1997). *Enseñanza e innovaciones en las aulas para el nuevo siglo*. Buenos Aires: El Ateneo.
- [168] LITWIN, E. (1997). La tecnología y sus desafíos en las nuevas propuestas para el aula, en LITWIN, E. (comp.), *Enseñanza e innovaciones en las aulas para el nuevo siglo*. (pp. 4-49). Buenos Aires: El Ateneo.
- [169] LOMAS, C. (1994). *La enseñanza de la lengua y el aprendizaje de la comunicación*. G ón: TREA.
- [170] LOMAS, C. (1996). La comunicación en el aula. *Signos. Teoría y práctica de la educación*, 17, pp. 4-5. G ón.
- [171] LOMAS, C. (1999). *Cómo enseñar a hacer cosas con las palabras. Teoría y práctica de la educación lingüística*. Barcelona: Paidós.
- [172] LOMAS, C. (2003). Aprender a comunicarse. *Revista Ágora Digital*, 5. Recuperable en: <http://www.uhu.es/agora/version01/digital/numeros/05/05-articulos/monografico>
- [173] LOMAS, C., OSORO, A. y TUSÓN, A. (1993). *El enfoque comunicativo de la enseñanza de la lengua*. Barcelona: Paidós.
- [174] LOMAS, C., OSORO, A. y TUSÓN, A. (1997). *Ciencias del lenguaje, competencia comunicativa y enseñanza de la lengua*. Barcelona: Paidós.
- [175] LYÚBICH, Y.I., SHOR, L.A. (1976, original ruso, 1978 edición en español. ). *Método cinemática en problemas geométricos. Lecciones populares de matemáticas*. Moscú: Editorial Mir. (traducción de Lozhkin, G.A.)
- [176] LLOBERA, M. (1995). *Competencia comunicativa: Documentos básicos en la enseñanza de lenguas extranjeras*. Madrid: Edelsa.
- [177] MALDONADO, M. (2003). *Texto y comunicación*. Madrid: Fundamentos.
- [178] MAMMANA, C. y V. VILLANI (editores) (1998). *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century*. London: Kluwer Academic Publishers.
- [179] MARABOTTO, E. (1999). Tecnología para pocos. *Diario Clarín*. Buenos Aires, 27 de junio de 1999.

- [180] MARTÍN, E. (1998). Gramática y enseñanza de segundas lenguas. *Carabela*, 43, pp. 5 - 33.
- [181] MAZ, A. et al. (editores) (2005). *Noveno Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática*. Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- [182] MARTÍN OLARTE, J. (2002). *El trabajo colaborativo y la demostración matemática*. Trabajo de investigación. DEA. Departamento de Matemáticas y Computación. Universidad de La Rioja
- [183] MARTÍNEZ, F. (1996). La enseñanza ante los nuevos canales de comunicación, en TEJEDOR, F. y VALCÁRCEL, A. (ed.), *Perspectivas de las nuevas tecnologías en la educación* (pp. 101-119). España: Narcea
- [184] MEC (2003). BOE N° 158 (3 7 2003), 25683, RD 831/2003. *Enseñanzas comunes de la ESO*.
- [185] MEC (2006). RD 1631/2006. *Decreto de Contenidos Mínimos para la Educación Secundaria Obligatoria*.pp. 677 773.
- [186] MENDOZA, A. (coord.) (2003). *Didáctica de la Lengua y la Literatura*. Madrid: Prentice Hall.
- [187] MENDOZA, A. y CANTERO SERENA, F. (2003). Didáctica de la lengua y la literatura: aspectos epistemológicos, en MENDOZA, A. (coord.), *Didáctica de la Lengua y la Literatura* (pp.3-33). Madrid: Prentice Hall.
- [188] MEIX, F. (1994). *La dialéctica del significado lingüístico*. Salamanca: Universidad de Salamanca.
- [189] MENEZES, M. y FIORENTINI, D. (2004). Comunicación y Formación: el papel de la escritura en la formación inicial de profesores de matemática. *XVI SIMPOSIO IBEROAMERICANO*. Castellón: Servicio de Publicaciones. Recuperable en: <http://www.iberomat.uji.es/carpeta/comunicaciones>
- [190] MIRET, I. y TUSÓN, A. (1996). La lengua como instrumento de aprendizaje. *Textos de Didáctica de la Lengua y la Literatura*, 8, (pp. 4-6). Barcelona: Graó.
- [191] MORENO, M. F. et al. (editores) (2002). *Investigación en Educación Matemática. Quinto Simposio de la SEIEM*. Almería: Universidad de Almería.

- [192] MORGAN, C. (1998). *Writing Mathematically. The Discourse of Investigation*. Londres: Falmer Press.
- [193] MURILLO, J. (2001). *Un entorno interactivo de aprendizaje con Cabri-actividades aplicado a la enseñanza de la geometría en la ESO*. Tesis doctoral. UAB.
- [194] MURILLO, J. et al. (editores) (2002). *Investigación en Educación Matemática. Sexto Simposio de la SEIEM*. Logroño: Ediciones de la Universidad de La Rioja.
- [195] MURILLO, J. y MARCOS, G. (2005). Un modelo de análisis de competencias matemáticas en un entorno interactivo", en MAZ, A. y otros (editores), *Noveno Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 215-226). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.
- [196] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (1991). *Professional Standards for Teaching Mathematics*. Reston: VA, NCTM.
- [197] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (2000). *Professional Standards for Teaching Mathematics*, Reston, VA, NCTM. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, Primera versión en castellano (2003). Traducción: Manuel Fernández Reyes
- [198] NEGROPONTE, N. (1995). *Ser digital*. Buenos Aires: Atlántida.
- [199] NESHER, P. et al. (2000). Posibles relaciones entre lenguaje natural y lenguaje matemático, en GORGORIÓ, N.; DEULOFEU, J. et al. (coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 109-124). Barcelona: Graó.
- [200] NISS, M. (1999). Competencies and Subject Description. *Uddanneise*, 9, pp. 21-29.
- [201] NOVAK, J. y GOWIN, B. (1988). *Aprendiendo a Aprender*. Barcelona: Martínez Roca.
- [202] OCDE/PISA (2003). Competencias en Matemáticas. *The PISA 2003 Assessment Framework*. París: OCDE. Recuperable en: <http://www.pisa.oecd.org/>

- [203] OLIVEIRA, M. (1995). Letramento, cultura e modalidades de pensamento, en KLEIMAN, A. (org.), *Os significados do Letramento: uma nova perspectiva sobre a prática social da escrita* (147-160). Campinas, SP: Mercado de Letras.
- [204] ORTEGA, T. (2005). *Conexiones matemáticas. Motivación del alumnado y competencia matemática*. Barcelona: Graó.
- [205] ORTON (1990). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: MEC- Morata.
- [206] OTAOLA, C. (1989). El análisis del discurso. Introducción teórica. *EPOS, Revista de Filología*, 5, pp. 81-98.
- [207] PARRA C. Y SAIZ I. (Compiladoras) (1994). *Didáctica de matemáticas*. Buenos Aires, Barcelona, México: Paidós.
- [208] PÉREZ, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La Muralla.
- [209] PÉREZ, A. (1998). *Cultura escolar en la sociedad neoliberal*. Madrid: Morata.
- [210] PÉREZ, G. (1994). *Investigación cualitativa. Retos e interrogantes*. Madrid: La Muralla.
- [211] PIAGET, J. e INHELDER, B. (1969). *Psicología del niño*. Madrid: Morata.
- [212] PIAGET, J. y GARCÍA, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: S.XXI.
- [213] PIMM, D. (1990). *El lenguaje matemático en el aula*. Madrid: MEC-Morata.
- [214] PINXTEN, R. (1997). Applications in the teaching of mathematics and sciences, en POWELL, A.B. y FRANKENSTEIN, M. (Eds.), *Challenging eurocentrism in mathematics education* (pp. 373-402). New York: SUNY.
- [215] PLANAS, N. (2001). *Obstacles en l'aprenentatge matemàtic: La diversitat d'interpretacions de la norma*. Tesis doctoral. UAB.
- [216] PLANAS, N. (2002). Obstáculos en el aprendizaje matemático generadores de interrupciones en la participación. *Educación Matemática*, 14 (1), pp. 5-25.

- [217] PLANAS, N. (2002). Nociones sociales recontextualizadas en Educación Matemática: el caso de la competencia comunicativa, en MURILLO RAMÓN, J. et al. (editores), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Sexto Simposio de la SEIEM* (pp. 175- 185). Logroño: Ediciones de la Universidad de La Rioja.
- [218] POLYA, G. (1981). *Mathematical Discovery*. USA: Wiley.
- [219] PORLÁN, R. (1991). *El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula*. Sevilla: Díada Editora.
- [220] PORLÁN, R. (1993). *Constructivismo y escuela*. Sevilla: Díada Editora.
- [221] PORTOLÉS, J. (1998). *Marcadores del discurso*. Barcelona: Ariel.
- [222] POSTER, M. (1990). *The Mode of Information. Poststructuralism and Social Context*. Chicago: University of Chicago Press.
- [223] POWELL, A. y LÓPEZ, J. (1995). A escrita como veículo de aprendizagem da matemática: Estudo de um caso. *Boletín GEPEN*, Río de Janeiro, N° 33, pp.: 9-41.
- [224] POWELL, A. (2001). Captando, examinando e reagiendo ao pensamento matemático. *Boletín GEPEN*, Río de Janeiro, N° 39, pp.: 73-84.
- [225] POZO, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.
- [226] POZO, J. I. (1996). *Aprendices y maestros*. Madrid: Alianza Editorial.
- [227] POZO, J. I. y GÓMEZ, M. A. (2000). *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Ediciones Morata.
- [228] POZO, J. I. (2001). Del cambio de contenido al cambio representacional en el conocimiento conceptual. *Infancia y Aprendizaje*, 24(4), pp. 407-423.
- [229] PRESMEG, N. C. (2001). Shifts in meaning during transitions, en ABREU, G. et al. (Eds.), *Transitions between contexts of mathematical practice* (pp. 213-228). London: Kluwer Academic Publishers.

- [230] PROYECTO PISA (2001). La medida de los conocimientos y las destrezas de los alumnos, La evaluación de la lectura, las matemáticas y las ciencias en el Proyecto Pisa 2000. *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)*. Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- [231] PROYECTO PISA (2001). Conocimientos y destrezas para la vida, Primeros resultados del Proyecto Pisa 2000. *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)*. Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- [232] PROYECTO PISA (2001). La medida de los conocimientos y las destrezas de los alumnos. Un nuevo marco para la evaluación. *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)*. Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- [233] PROYECTO PISA (2003). Marcos teóricos y especificaciones de evaluación de TIMSS 2003. *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)*. Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- [234] PROYECTO PISA (2003). Pruebas de Matemáticas y de solución de problemas. *Proyecto internacional para la producción de indicadores de rendimiento de los alumnos, OCDE (Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos)*. Versión en español editada por Secretaría General Técnica, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, INCE.
- [235] QUESADA, J. et al. editores (1996). *Matemáticas y lenguajes. Perspectivas Lógica, Semiótica, Social y Computacional. ICME 8*. Sevilla: Editorial: Servicio de Publicaciones de la SAEM Thales.
- [236] QUERO, O. (2003). Procedimiento metodológico para potenciar el desarrollo de la comunicación matemática mediante el estudio de la

- geometría sintética en la enseñanza preuniversitaria. Recuperable en:  
<http://www.mfc.uclv.edu.cu/scmc/Boletin/N2/textos>
- [237] RADFORD, A. (1988). *Introducción a la sintaxis transformacional*. Barcelona: Teide.
- [238] *Revista C y P (Comunicación y Pedagogía)*. Números 184 (año 2002), 186 (año 2003), 189 (año 2003). España.
- [239] REYES, G. (1990). *La pragmática lingüística. El estudio del uso del lenguaje*. Barcelona: Montesinos.
- [240] RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX, en KILPATRICK, J.; RICO, L. y SIERRA, M. (eds.), *Educación matemática e investigación* (pp. 99-207). Madrid: Síntesis.
- [241] RICO, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003, en CASTRO, E. y DE LA TORRE, E. (eds.), *Investigación en Educación Matemática, 8º Simposio de la SEIEM*, (pp. 89 102). A Coruña: Universidad da Coruña.
- [242] RICO, L. (2006). Las competencias matemáticas en el informe PISA 2003: el caso de la geometría. *II Escuela de Educación Matemática Miguel de Guzmán: En torno a la geometría de Miguel de Guzmán*. Madrid: Fundación Santillana.
- [243] RICO, L. (2006). Marco teórico de evaluación en PISA sobre matemáticas y resolución de problemas. *Revista de Educación*, número extraordinario, pp. 275 294.
- [244] RICO ROMERO, L. (2007). La Competencia Matemática en PISA. PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática, 1 (2), pp. 47 66.
- [245] SAATI, T. (1963). *Métodos matemáticos de investigación de las operaciones*. Editorial Voenizdat.
- [246] SALINAS, J. (1997). *Nuevos ambientes de aprendizaje para una sociedad de la información*. España: Universidad de Islas Baleares.
- [247] SANCHO GIL, J. (1994). *La tecnología: un modo de transformar el mundo cargado de ambivalencia*. Barcelona: Horsori.
- [248] SANCHO GIL, J. (1994). *Para una tecnología educativa*. Barcelona: Horsori.

- [249] SÁNCHEZ, M. y FARFÁN, R. (2005). Un Estudio sobre Interacciones y Comunicación en Educación Matemática a Distancia, en LEZAMA, J.; SÁNCHEZ, M. y MOLINA, J.G. (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Volumen 18, pp. 687-692). México: CLAME.
- [250] SANTALÓ, L. (1986). *La enseñanza de la matemática en la escuela media*. Argentina: Editora Docencia.
- [251] SAPON-SHEVIN, M.; AYRES, B. y DUNCAN, J. (2001). Cooperative learning and inclusion (Online). Recuperable en: <http://www.clcrc.com/pages/overviewpaper.html>
- [252] SFARD, A., NESHER, P. et al. (1998). Learning mathematics through conversation: Is it as good as they say? *Learning of Mathematics*, 18(1), pp. 41-51.
- [253] SFARD, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics*, 46, pp. 13-57.
- [254] SELINKER, L. (1972). Interlanguage. *International Review of Applied Linguistics*, 10, pp. 209-231.
- [255] SPERBER, D. y WILSON, D. (1994). *La relevancia*. Madrid: Visor.
- [256] SHANNON, C. y WEAVER, W. (1949). *The mathematic theory of communication*. Urbana: Illinois University Press.
- [257] STUBBS, A. (1987). *Análisis del discurso*. Madrid: Alianza.
- [258] TERCEIRO, J. (1996). *Sociedad digit@l. Del homo sapiens al homo digitalis*. Madrid: Alianza.
- [259] TIFFIN, J. y RAJASINGHAM, L. (1997). *En busca del aula virtual*. Barcelona: Paidós.
- [260] VALDES, L. M. editor (1991). *La búsqueda del significado*. Madrid: Tecnos.
- [261] VAN DIJK, T. (comp.) (2000). *El discurso como estructura y proceso*. Barcelona: Gedisa.
- [262] VYGOTSKY, L.S. (1978). *Mind and society*. Massachusetts: Harvard University Press.



- 
- [263] VYGOTSKY, L.S. (1979). *Los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Gr albo Grupo Editor.
- [264] VILARNOVO, A. y SÁNCHEZ, J. F. (1992). *Discurso, tipos de texto y comunicación*. Pamplona: Eunsa.
- [265] WERTSCH, J. (1993). *Voces de la mente: Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid: Visor Distribuciones.
- [266] WERTSCH, J. (1995). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós
- [267] YÁBAR, J. M. y BARBARÀ, P. L. (1999). La Universitat Autònoma de Barcelona: el camino hacia una universidad bimodal en el marco de las Tecnologías de la Información y la Comunicación. *Educa*, Vol. 25, pp. 113-118. Barcelona.
- [268] YÁBAR, J. M. y BARBARÀ, P. L. (1999). Desarrollo de un campus virtual de la comunicación en el marco de una educación bimodal. *Proyecto TEL97-1104*. Universidad de Navarra. [http://cvc.cervantes.es/obref/formacion\\_virtual/campus\\_virtual/yabar.htm](http://cvc.cervantes.es/obref/formacion_virtual/campus_virtual/yabar.htm)
- [269] YACKEL, E. y P. COBB (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol. 27, pp. 458-477.