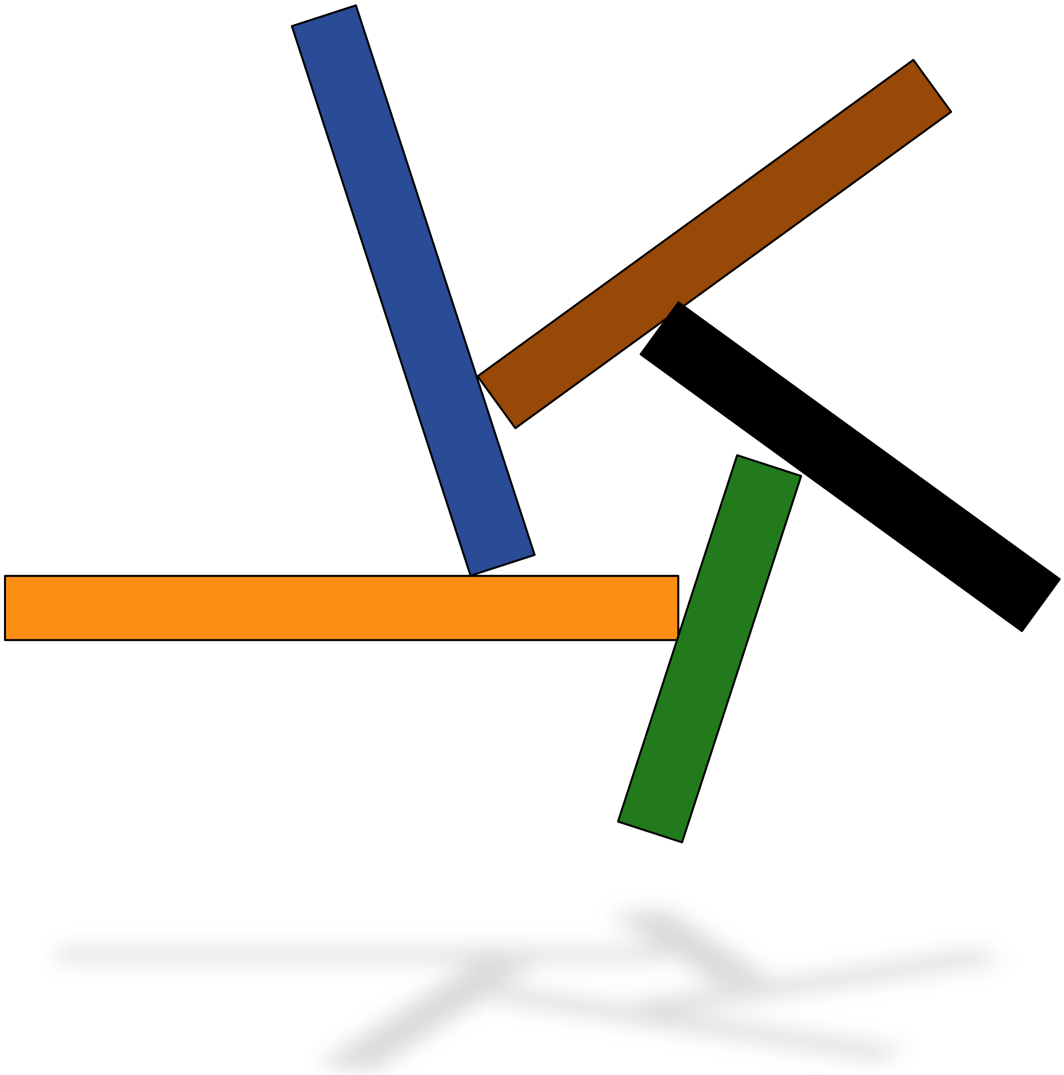


Investigación en Educación Matemática XVII

Ainhoa Berciano Alcaraz
Guadalupe Gutiérrez Pereda
Antonio Estepa Castro
Nuria Climent Rodríguez
(Eds.)

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

Investigación en Educación Matemática XVII

eman ta zabal zazu

Universidad del País Vasco
Euskal Herriko Unibertsitatea

ARGITALPEN ZERBITZUA
SERVICIO EDITORIAL

Investigación en Educación Matemática XVII

Ainhoa Berciano Alcaraz, Guadalupe Gutiérrez Pereda,
Nuria Climent Rodríguez, Antonio Estepa Castro (Eds.)

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática

Bilbao, septiembre de 2013

Investigación en Educación Matemática XVII

Edita:
© Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).
© Ainhoa Berciano Alcaraz
© Guadalupe Gutiérrez Pereda
© Antonio Estepa Castro
© Nuria Climent Rodríguez

Las comunicaciones aquí publicadas han sido sometidas a evaluación y selección por parte de investigadores miembros de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM).

Diseño de la portada: Jon Anasagasti Aguirre y Lola Fernández Alonso

© Servicio Editorial de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitateko Argitalpen Zerbitzua. ISBN: 978-84-9860-843-4 Lege gordailua/Depósito Legal: BI-1019-2013

ÍNDICE

COMUNICACIONES

PRESENTACIÓN

Desde su fundación en 1996, la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática ha desarrollado un trabajo ímprobo en relación a la Investigación en la Enseñanza-Aprendizaje de la Matemática. Entre sus actividades está el Simposio anual de la Sociedad. En este contexto enmarcamos el XVII Simposio de la SEIEM, celebrado del 5 al 7 de septiembre de 2013 en la E. U. de Magisterio de Bilbao de la Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, que ha reunido a más de 130 investigadoras/es en el área.

Desde 1997, año en el que se celebró el primer Simposio en Zamora, se han celebrado 16 Simposios en diferentes Universidades, a lo largo de toda la geografía: Galicia (A Coruña 2004), Andalucía (Huelva 2000, Almería 2001, Granada 2003, Córdoba 2005 y Baeza 2012), Castilla y León (Zamora y Valladolid 1999), Cataluña (Lleida 2010), Cantabria (Santander 2009), Navarra (Pamplona 1998), La Rioja (Logroño 2002) Aragón (Huesca 2006), Extremadura (Badajoz 2008), Canarias (La Laguna 2007) y Castilla la Mancha (Ciudad Real 2011). En 2013 se realiza en el País Vasco, en Bilbao.

Siguiendo la estructura de anteriores Simposios se han realizado cinco tipos de actividades:
-Los Seminarios de Investigación, en los que a partir de las ponencias presentadas por los especialistas invitados se facilita la profundización y el debate en temas de relevancia actual. En el primero de ellos, coordinado por el profesor Enrique de la Torre, se han abordado las perspectivas de Investigación en Didáctica de la Geometría. En el segundo, coordinado por las profesoras Núria Planas y Nuria Climent se ha afrontado la continuidad de la investigación tras la tesis doctoral.

- Las Comunicaciones, presentadas por distintos autores en las que se han expuesto trabajos de investigación en estado avanzado de desarrollo. En esta ocasión se han propuesto más de ochenta comunicaciones de las que se han aceptado cuarenta y tres tras el arbitraje por pares ciegos de expertos/as.

- Los Grupos de Investigación, en los que se han presentado trabajos en temas de interés para sus miembros, buscando el debate y las aportaciones de los asistentes Estas investigaciones son avaladas por los/as directores/as del trabajo, y tienen criterios de valoración uniformes, que dan el rigor necesario a los presentados en cada apartado.

- Los pósteres, en los que se han presentado trabajos incipientes de investigación y que dan ocasión a sus autores al debate con diferentes especialistas en el área de conocimiento en un contexto más informal.

- La Asamblea anual de socias y socios de la SEIEM.

Estas Actas recogen las ponencias de los dos seminarios de Investigación así como las réplicas presentadas al segundo y las comunicaciones presentadas en el XVII Simposio de la SEIEM. Éstas, para facilitar su localización, se han ordenado alfabéticamente por autoras/es, aunque en el Simposio se presentan en núcleos temáticos organizados a los largo de los tres días.

En esta edición el Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales de la UPV/EHU ha asumido la responsabilidad de la organización del Simposio en colaboración con la SEIEM. Quisiéramos agradecer a la Junta Directiva la confianza mostrada en este Departamento, y en especial, en el Comité Organizador, al brindarle la oportunidad de celebrar el Simposio en la UPV/EHU ofreciendo toda la ayuda y asesoramiento necesario para la consecución de las jornadas.

Queremos reconocer a todas las personas que han formado el Comité Organizador su dedicación y buen hacer para que este Simposio tuviera lugar. En particular, expresamos nuestro agradecimiento a las compañeras del área de Ciencias Experimentales de la sección de Bilbao del Departamento, que generosamente han contribuido a la organización de este evento. A Gurutze y Araitz cuya colaboración ha sido imprescindible en la gestión de las ayudas económicas. A Teresa e Isabel por la organización de los eventos sociales. A Lola por la colaboración en el diseño gráfico de las portadas y los logos. A Maite por la gestión de la secretaria técnica.

Agradecemos la ayuda económica (singularmente valiosa en los tiempos de profunda crisis económica que vivimos) que nos ha concedido el Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales, la Escuela Universitaria de Magisterio de Bilbao, el Vicerrectorado de Responsabilidad Social y Proyección Universitaria y el Vicerrectorado de Investigación de la UPV/EHU, el Gobierno Vasco/Eusko Jaurlaritza y la propia SEIEM. Sin su apoyo económico, difícilmente hubiera sido factible la consecución del Simposio, ya que han facilitado en gran medida los recursos de los que hemos dispuesto.

Por último, esperamos que los trabajos aquí publicados sirvan para mejorar la enseñanza-aprendizaje de la matemática, e impulsar la investigación en Educación Matemática.

Ainhoa Berciano Alcaraz
Coordinadora del Comité Orgarnizador

SEMINARIO I

PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Coordinador:

Enrique de la Torre Fernández, Universidade da Coruña

Introducción al Seminario I "Perspectivas de Investigación en Didáctica de la Geometría"

Ponentes:

María Teresa Fernández Blanco, Universidade de Santiago de Compostela

La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro

Joxemari Sarasua Fernández, Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO I SOBRE PERSPECTIVAS DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA GEOMETRÍA

Enrique de la Torre Fernández

Universidade da Coruña

No es esta la primera vez que en nuestros Simposios de la SEIEM se organiza un Seminario alrededor de la geometría. En el tercer Simposio, en Valladolid en 1999, tuvimos el primer Seminario dedicado a la geometría, abordando diferentes cuestiones. Más recientemente, en Lleida en 2010, el Seminario fue dedicado a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Este año el seminario está dedicado a la investigación en didáctica de la geometría.

Como ya se comentaba en este último seminario, la investigación en didáctica de la geometría no está entre las agendas de investigación más activas, tanto a nivel internacional como nacional. Sin embargo, en los últimos años se puede apreciar un creciente interés y un ligero aumento en las publicaciones en este campo de investigación. En cierta medida algunas investigaciones toman como objeto de trabajo el software de geometría dinámica, cada vez más extendido en todos los niveles de la enseñanza.

Las dos ponencias que se presentan en este seminario ilustran maneras diferentes de mirar hacia los problemas que hoy se presentan en relación a la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. La primera está elaborada por la Dra. Teresa Fernández Blanco, de la Universidad de Santiago de Compostela, y la segunda por el Dr. Joxemari Sarasua Fernández, de la Universidad del País Vasco.

La ponencia de Teresa Fernández aborda el problema de la visualización y el razonamiento espacial. Después de una justificación de la importancia de la visualización, la ponente hace una revisión de la bibliografía recordando las direcciones que ha tomado la investigación en relación a la visualización y las cuestiones que aún siguen abiertas.

En la segunda parte de la ponencia, se describe una investigación sobre la evaluación de las habilidades de visualización y razonamiento espacial, desde un enfoque ontosemiótico, que pone de manifiesto las carencias y dificultades de los futuros maestros de Educación Primaria en tareas que impliquen las citadas habilidades. Termina esta ponencia presentando algunas de las investigaciones actuales en este campo y se muestran posibles caminos y cuestiones abiertas hacia las que se pueden enfocar nuevas investigaciones.

La ponencia de Joxemari Sarasua se centra en la representación de figuras planas. Toma como marco de referencia el modelo de Van Hiele y establece varias categorías en relación a los objetivos de aprendizaje de las figuras planas. Su estudio toma como sujetos de investigación a estudiantes de educación primaria, secundaria y de universidad.

Del análisis de los resultados obtenidos encuentra correspondencias entre el desarrollo de las destrezas de representación consideradas y los niveles de Van Hiele. Además, para dar respuesta a algunas carencias en relación a cómo aparecen reflejadas las destrezas de representación externa entre los descriptores de los niveles, propone nuevos descriptores de los niveles, para caracterizarlos también en términos de este tipo de destrezas.

De la Torre, E. (2013). Introducción al Seminario I “Perspectivas de Investigación en Didáctica de la Geometría”. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 17-17). Bilbao: SEIEM.

LA INVESTIGACIÓN EN VISUALIZACIÓN Y RAZONAMIENTO ESPACIAL. PASADO, PRESENTE Y FUTURO

Research on visualization and spatial reasoning. Past, present and future.

Teresa Fernández Blanco

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En este trabajo intentaré poner de manifiesto que la visualización sigue siendo un tema de interés para futuras investigaciones en el ámbito de la geometría y el razonamiento espacial. Un breve recorrido por los antecedentes recordará aquellos tópicos que han sido objeto de estudio en este campo y aquellas líneas de investigación que permanecen abiertas. Para terminar expondré los resultados de una investigación reciente que pone de manifiesto las carencias de los futuros maestros en este tema y la importancia de planificar y desarrollar acciones formativas.

Palabras clave: *investigación, visualización, razonamiento espacial y geometría.*

Abstract

In this work I will try to show that visualization keeps on being of great interest for future investigations in the field of geometry and spatial reasoning. A brief overview of the background will remember us those topics that have been studied in this field and those research lines that are still open. To finish I will show the results of a recent investigation that show us deficiencies of future teachers in this field and the importance of planning and developing training activities.

Keywords: *Research, visualization, mathematics, spatial reasoning and geometry.*

INTRODUCCIÓN

A lo largo las dos últimas décadas se ha podido constatar un resurgimiento de la investigación centrada en la visualización (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Gutiérrez, 1998; Hershkowitz, Parzysz y van Dormolen, 1996; Phillips, Norris, y Macnab, 2010; Presmeg, 2006, 2008; Rivera, 2011; Zimmerman y Cunningham, 1991) debido principalmente a dos razones. La primera de ellas tiene que ver con la presentación de conceptos, formas, relaciones y propiedades a través de nuevos elementos y entornos de aprendizaje propios del mundo altamente tecnológico en el que vivimos. Estos avances tecnológicos se convierten en potentes herramientas matemáticas y científicas al inferir dinamismo a muchas entidades que antes eran presentadas por medio de tablas, fórmulas y símbolos. Por otra parte, estos cambios en las herramientas tecnológicas conducen a cambios en los recursos semióticos y en las representaciones y viceversa lo que lleva a investigar sobre los procesos visuales que están teniendo lugar (Rivera, 2011, p.10).

La segunda de las razones antes citadas está relacionada directamente con cambios en la concepción de la propia naturaleza de la matemática, según los cuales la matemática es entendida como una búsqueda de patrones y la visualización será una herramienta fundamental para reconocer esos patrones (Hershkowitz et al., 1996, p. 163).

Uno de los grandes problemas de la visualización como objeto de investigación ha sido su propia definición y los diferentes nombres con los que se asocia. En Gutiérrez (1996a), Guillén (2010), Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012); Fernández (2012) aparecen listados de diferentes concepciones de la visualización espacial en las que el concepto de imagen juega un papel central,

Fernández, T. (2013). La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 19-42). Bilbao: SEIEM.

junto con otros tres elementos: las representaciones externas, los procesos para manipular esas imágenes y las habilidades para la creación y procesamiento de las imágenes (del Grande, 1990; Gutiérrez, 1991; 1996a). En este trabajo no trataremos estos aspectos de la visualización de forma específica sino que serán abordados desde la óptica de las investigaciones llevadas a cabo.

La principal característica atribuida por Arcavi (2003, p. 216) a la visualización es que "ofrece un método de ver lo invisible", tanto entendiendo la visualización como nombre (el producto, la imagen visual) o bien como verbo (el proceso, la actividad). Cuando Arcavi (2003) habla de "ver lo invisible", en su sentido más profundo y figurativo, se refiere a percibir un mundo abstracto que la tecnología (ni óptica ni electrónica) no puede ver por nosotros. Las matemáticas tratan con objetos y entidades diferentes de los fenómenos físicos, y dependen en gran medida de la visualización en sus diferentes formas y diversos niveles, mucho más allá del cuerpo de la geometría y la visualización espacial. En los monográficos de Batista (2007), Phillips, Norris y Macnab (2010), Presmeg (2006) y Rivera (2011) se puede encontrar información muy completa de artículos sobre visualización en diferentes áreas de la matemática.

En este documento me centraré en el análisis de la investigación en visualización y razonamiento espacial (VRE). Dado que la geometría tiene un soporte muy fuerte en elementos visuales, esta ha sido una de las áreas en las que más se ha investigado esta relación (Phillips, 2010). Sin embargo, como los objetos de estudio en geometría están relacionados casi siempre con una entidad física o visual, esta relación entre geometría y visualización es más complicada de lo que, a priori, puede parecer.

La primera parte del trabajo presenta una revisión bibliográfica con la intención de describir qué tópicos han sido objeto de estudio y análisis en las investigaciones. En la segunda parte se describirá una investigación reciente que pondrá de manifiesto diversas carencias de futuros maestros de Educación Primaria en actividades que implican visualización y razonamiento espacial. En la tercera parte se enunciarán algunos trabajos de investigación que se están llevando a cabo en este campo y se mostrarán posibles caminos a seguir teniendo en cuenta cuestiones de investigación que han sido propuestas por diversos autores (Guillén 2010, Presmeg, 2006, Phillips et al., 2010).

ANTECEDENTES

Esta revisión de la bibliografía sobre visualización y razonamiento espacial se hará a través de cuatro facetas o dimensiones (epistémica, cognitiva, instruccional y ecológica) descritas en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (Godino, Batanero y Font, 2007), que permitirá una visión desde una perspectiva diferente a la habitual. A causa de la evidente limitación de espacio, no se pretende proporcionar una relación exhaustiva de referencias sino presentar una idea más o menos general del estado de la cuestión.

Faceta epistémica

Las principales cuestiones epistemológicas abordadas por las investigaciones que nos ocupan son dos: una se refiere a la argumentación y demostración y la otra se deriva de la ambigüedad de la palabra *representación*.

La primera está relacionada con el estatus otorgado a la visualización en la educación matemática; puesto que, aunque la mayoría de los matemáticos confían y utilizan la argumentación visual en su trabajo, muchos de ellos son reacios a mostrarla como un recurso habitual. Ello se debe, principalmente, a que durante los siglos XIX y XX los estándares para la publicación se basaban en un pensamiento lógico y formal lo que implicaba cierta hostilidad hacia las argumentaciones visuales. Sin embargo, a finales del siglo XX los matemáticos redescubren el poder del razonamiento visual y sugieren demostraciones y teoremas puramente visuales.

Según Battista y Clements (1995, p. 53), tanto la teoría de Piaget como la de van Hiele indican que los estudiantes pueden comprender y trabajar explícitamente con sistemas axiomáticos sólo después de haber alcanzado los niveles más altos de ambas jerarquías:

> El camino más efectivo para engendrar un uso útil de la demostración en geometría en la escuela secundaria es evitar la demostración formal durante gran parte del trabajo con los estudiantes. Si nos centramos en ayudar a los estudiantes a construir unos cimientos empíricos y visuales para los niveles más altos del pensamiento geométrico, podemos llegar a conseguir que aprecien la necesidad de una prueba formal. Sólo entonces, serán capaces de utilizarlo significativamente como un mecanismo para justificar ideas.

Por su parte, Arcavi (2003, p. 224) argumenta que la visualización puesta al servicio de la resolución de problemas puede también ir más allá de su papel procedimental e inspirar una solución general y creativa. Asimismo, las representaciones de formas visuales pueden ser elementos legítimos en las demostraciones matemáticas.

Diversas investigaciones, como la de Soto-Andrade (2008), muestran que, a pesar de que el razonamiento visual está contemplado en los currículos, en general, los profesores lo siguen presentando como un argumento auxiliar o introductorio, un accesorio al que no asignan el estatus que debería tener. Como consecuencia, los alumnos no lo consideran como un tipo de razonamiento básico para su formación ni como una acción del todo válida para hacer matemáticas.

La otra cuestión epistemológica que adquiere un papel importante en el campo de la visualización es la noción de *representación*.

La noción abstracta de representación implica una relación entre dos o más configuraciones, en la cual una representa a la otra en un sentido que se determine (Goldin, 2002, p. 207). En el contexto de la psicología del aprendizaje matemático y de la resolución de problemas, es preciso considerar por un lado las configuraciones internas del individuo (configuraciones verbales y sintácticas, visual imaginería, reglas y algoritmos, esquemas, heurísticos, etc.) y por otro las configuraciones externas, generalmente observables a través del entorno (objetos de la vida real, gráficos, figuras geométricas, palabras escritas y habladas, etc.). Además, debemos considerar las posibles relaciones que representan o pueden representar.

El rechazo de la corriente conductista a las configuraciones internas y, por otra parte, el rechazo de los constructivistas radicales a las configuraciones externas, motiva que esta definición de representación no sea aceptada por ninguno de estos dos grupos. Estos enfoques se ven reflejados en dos puntos de vista en la educación matemática: el primero de ellos, el tradicional, tiende a centrarse en las producciones de los estudiantes, su rendimiento matemático, sus logros matemáticos, rechazando o no enfatizando los aspectos relacionados con lo interno. Por su parte, el otro punto de vista se centra en procesos cognitivos y cualitativos de la comprensión matemática, sin acentuar lo externo. Estas dos perspectivas se sustentan en un desequilibrio que provoca que la noción de representación como una interacción descriptiva de lo externo y lo interno no sea aceptada.

Sin embargo, según Goldin (2007), la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. El interés primario del proceso de instrucción se centra en la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden sustentar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación. Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Algunos autores como Presmeg (2006, p. 206), afirman que la imaginería visual (representación interna) es subyacente a la creación de una disposición espacial o a un dibujo o diagrama, por lo que no tiene sentido la separación entre representación interna y representación externa. Esta autora prefiere utilizar los términos *imaginería* e *inscripciones* (Roth, 2004) puesto que capturan de una manera muy concisa los aspectos visuales de esos dos tipos de representaciones.

Para Duval (1999, pp. 4-5) la distinción entre representaciones internas y externas se realiza atendiendo al modo de producción y no a su forma o naturaleza y que, en ese sentido, los signos no son ni una cosa ni la otra. Por ese motivo, este autor sostiene que la distinción debería hacerse entre un tipo de representaciones cognitivas que son producidas de forma intencional por un sistema semiótico (mental o externo), llamadas representaciones semióticas, y aquellas representaciones cognitivas que son producidas de forma casual o automática por un dispositivo físico (fotografías, reflexiones) o por un sistema orgánico (sueños, memoria visual de imágenes), que reciben el nombre de representaciones físicas/orgánicas.

Una cuestión más que atañe a la faceta epistemológica es el estudio de los contenidos matemáticos. El análisis de los distintos documentos revisados nos ha llevado a establecer seis categorías teniendo en cuenta el tipo de contenido propiamente matemático en el que se centran: representaciones planas de objetos tridimensionales, desarrollos planos de cuerpos espaciales, clasificación de figuras, comprensión de conceptos y propiedades, transformaciones geométricas y validez de la demostración o argumentación visual.

En Gonzato, Fernández y Godino (2011) se hace una revisión de la clasificación de tareas de visualización presentadas por diversos autores. La variedad de tipos de tareas muestra la complejidad del tema y apoya la propuesta de clasificar en tres familias los tipos de problemas en los que intervienen habilidades de visualización y orientación espacial.

Faceta cognitiva

Desde el punto de vista de la faceta cognitiva muchos trabajos se han centrado en el análisis de teorías para el desarrollo del aprendizaje geométrico. La Teoría de van Hiele es el marco teórico dominante cuando se trabaja en didáctica de la geometría. La teoría e investigación desde la perspectiva de Van Hiele tiene fuertes implicaciones en la instrucción en geometría de cara a organizar unidades de enseñanza y para evaluar el progreso de los estudiantes (Clements y Battista, 1992; Gutiérrez, 1998). Siguiendo esta teoría, la visualización aparece en primer plano en el primer nivel de razonamiento, imprescindible en la jerarquía del pensamiento geométrico. Gutiérrez (1992) aplica este modelo para comprender y organizar la adquisición de habilidades de visualización espacial en geometría tridimensional.

Según Batista (2008, p. 342) un "*objeto cognitivo* es una entidad mental sobre la que se opera durante el razonamiento y una *representación* es algo que se pone en el lugar de otra cosa". De esta manera, en geometría uno razona sobre objetos mediante representaciones. La mayor parte de los investigadores distinguen entre dos tipos de objetos cognitivos que se presentan durante el razonamiento geométrico: *dibujo y figura*. Este autor defiende que esta dicotomía es insuficiente para capturar la complejidad de los objetos del razonamiento geométrico y propone cuatro tipos de objetos geométricos:

> El objeto físico que es una entidad concreta (puerta, pelota, dibujo o figura arrastrable, etc.); el objeto perceptivo es una entidad mental percibida por un sujeto cuando está viendo un objeto físico; el objeto conceptual que es un modelo mental que es activado cuando un objeto es percibido, cuando una entidad es recordada mediante reflexión y análisis, o cuando se encuentra una descripción verbal. Por último, un objeto geométrico es una especificación verbal explícita formal de una relación espacial o de las características que definen una categoría de formas (p. 343).

Para Laborde (1993, p. 49), la distinción entre figura y dibujo está en que “el dibujo se refiere a la entidad material, mientras que la figura se refiere a un objeto teórico”. Esta distinción también la lleva al contexto de la geometría dinámica, donde una *figura* (como concepto geométrico abstracto) es invariante cuando pasa la prueba de arrastre (es decir, sigue manteniendo las mismas características que el objeto básico) mientras que un dibujo no las mantiene.

De igual forma, Presmeg (1997, p. 305) observó que “Un dibujo o un diagrama es, por su naturaleza, un caso concreto, que incluso para el pensamiento matemático más trivial es necesario abstraer y generalizar”. Esta autora sostiene que la concreción de un caso de dibujos e imágenes es el origen de muchas dificultades en el razonamiento matemático basado en la visualización.

Desde el punto de vista de Duval (1995) existen dos características por las cuales una figura geométrica no puede ser vista como un dibujo de un objeto físico: la primera surge de las limitaciones internas de organización que existen en las figuras geométricas y no existen en los dibujos físicos de los objetos; la segunda es debida a diferencias funcionales, pues una figura debe ayudar o dar una clave para resolver un problema. Esas diferencias se mantienen independientemente de si la representación es en papel o en la mente.

Las cogniciones de los sujetos y las relaciones entre ellas sobre los distintos objetos básicos que se identifican en el razonamiento geométrico y espacial son las que van a permitir comprender este tipo de razonamiento. Para ello hay que tener en cuenta dos consideraciones: La primera está relacionada con la manera en que la concepción afecta a la percepción. “Lo que uno ve está afectado por lo que uno sabe y piensa” (Battista, 2007, p. 844). La segunda consideración está relacionada con el papel que pueden jugar los diagramas, según actúen como datos o como representaciones. Battista (2008, pp. 348-349) sostiene que ambos, figura y dibujo, pueden ser representaciones u objetos dependiendo de la función que estén realizando. Este autor considera que la educación matemática no ha tenido en cuenta que los diagramas pueden ser objetos gráficos geométricamente analizables y se ha centrado en ellos como representaciones imperfectas de conceptos geométricos abstractos.

Podemos distinguir tres centros de interés, dentro de esta faceta, que han suscitado la atención de los investigadores:

1- Aprendizaje de conceptos

Según Vinner y Hershkowitz (1983, p. 20) existen dos dificultades importantes al tratar con la formación de conceptos: una es la propia noción de concepto y otra es cómo determinar si un concepto se ha formado en la mente de alguien. Al ser las matemáticas una ciencia deductiva, los conceptos se definen a partir de conceptos previos, salvo que sean conceptos primarios con lo cual siguen indefinidos. Por lo tanto, si un concepto no es primario la definición matemática únicamente determina todos los ejemplos y no ejemplos del concepto, y de este modo la actividad se centra en identificar los ejemplos del concepto.

Hershkowitz (1990, p. 81), destaca el papel de los procesos visuales en la formación de la imagen de un concepto, papel que es especialmente importante en el caso de objetos tridimensionales. Para ella, el concepto se deriva de su definición matemática, por lo que tiene atributos críticos (o relevantes, que son los que un concepto tiene que tener para ser modelo del concepto) y atributos no críticos (irrelevantes, que sólo los poseen algunos ejemplos). En general, los atributos irrelevantes se logran primero porque tienen fuertes características visuales y son los que permiten hacer las clasificaciones dentro de un mismo concepto. Para describir el desarrollo cognitivo de los estudiantes en relación con las imágenes de los conceptos, esta autora considera lo que denomina el *fenómeno prototipo*:

> Cada concepto tiene un conjunto de atributos críticos o rasgos relevantes y un conjunto de ejemplos. Todos estos ejemplos son matemáticamente equivalentes ya que satisfacen la definición del concepto

> y contienen todos sus atributos críticos, pero son diferentes el uno del otro visualmente o psicológicamente (Hershkowitz, 1989, p. 63).

Sin embargo, hay ejemplos que tienden a ser más populares que otros y esos son los llamados *ejemplos prototipo*. Generalmente, los ejemplos prototipo tienen la lista de atributos mayor, son los que primero se adquieren y existen en la imagen de concepto de la mayoría de los estudiantes.

Por otra parte cabe destacar la idea de concepto figural de Fischbein (1993). La principal tesis del trabajo de Fischbein es que la geometría trata con entidades mentales (las así llamadas figuras geométricas) que poseen simultáneamente características conceptuales y figurales.

> Los objetos de investigación y representación en el razonamiento geométrico son por tanto entidades mentales, llamadas por nosotros conceptos figurales, que reflejan propiedades espaciales (forma, posición, tamaño), y al mismo tiempo, poseen cualidades conceptuales como idealidad, abstracción, generalidad, perfección. (Fischbein, 1993, p. 143).

De la investigación de Fischbein y Nachlieli (1998) se deduce que hay que distinguir entre conceptos que se corresponden con figuras invariantes y conceptos que se corresponden con variedad de figuras. Por ejemplo, la diferencia de resultados entre el concepto de ángulo recto y el de paralelogramo es que la forma del primero es siempre la misma mientras que el segundo puede aparecer en formas diferentes. Este hecho conduce a que, con la edad, este conflicto entre lo figural y lo conceptual se supere, ya que el primero es más un problema perceptivo que matemático.

La clasificación también se halla relacionada con el aprendizaje y formación de conceptos, tal y como muestran De Villiers (1994) y Jones (2000). La distinción entre las clasificaciones jerárquicas, que utilizan definiciones *inclusivas,* y las particionales, que utilizan clasificaciones exclusivas, pone de manifiesto este hecho.

En el modelo de formación de conceptos matemáticos descrito por Presmeg (1992, p. 607) las imágenes de patrones, como base de los conceptos matemáticos, son la única construcción propia de los individuos y no es accesible a otros. Sin embargo, estas construcciones están basadas, en una cantidad más o menos elevada, de imágenes concretas que surgen de experiencias matemáticas y que pueden haber sido compartidas con otros.

2- Procesos y estrategias

Desde el punto de vista de la educación matemática cuando nos referimos a la visualización como “verbo” estamos centrándonos en el proceso, en la actividad, en el cómo de la visualización. Diversos investigadores han analizado este aspecto, bastante complejo y difícil pero muy interesante desde el punto de vista de la educación, a través de modelos, fases y modos cognitivos.

Según Bishop (1989, p. 177), las imágenes visuales, mentales o físicas, son aquellos objetos que se manipulan en la actividad de la visualización. Esa manipulación se realiza según dos tipos de procesos:

- *Interpretación de información figurativa* (IFI). Es el proceso de comprensión e interpretación de representaciones visuales para extraer la información que contienen. Esto incluye la manipulación y transformación de representaciones visuales e imágenes visuales. Se trata de una capacidad de contenido y de contexto, y particularmente se refiere a la forma del estímulo material.
- *El procesamiento visual* (VP) es el proceso de conversión de información abstracta o no figurativa en imágenes visuales, así como el proceso de transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras. Se trata de una capacidad de proceso y no se refiere a la forma del estímulo del material presentado. Su naturaleza es privada y personal, siendo el proceso inverso del anterior.

En el modelo de Burden y Coulson (1981) toda estrategia de resolución de un determinado ítem espacial obedece a tres características: el modo de representación, aquello sobre lo que el sujeto concentra su atención y los medios concretos auxiliares. El modo de representación hace referencia a si el sujeto necesita formar o hacer uso de una imagen mental en el curso de la realización del ítem espacial. En cuanto al modo de concentrar la atención del sujeto, estos autores distinguen dos modos en que los alumnos dirigen su estrategia hacia el objeto considerándolo globalmente o parcialmente. Los medios concretos auxiliares utilizados por el sujeto durante la resolución del ítem espacial hacen referencia a los movimientos realizados por ciertos sujetos desplazando sus lápices en el aire, al tomar notas, si inclinan sus cuerpos o cabeza un cierto ángulo, etc.

Tomando como punto de inicio el estudio de Burden y Coulson (1981) y modificándolo para ajustarlo a sus objetivos, Gorgorió (1998) analiza las estrategias de los estudiantes desde tres puntos de vista, que no corresponden a tres tipos de estrategias cognitivas sino a tres aspectos diferentes de la estrategia de resolución del estudiante: la estructuración de la estrategia, el procesamiento de la estrategia y el centro de atención de la estrategia.

Por su parte, Duval (1995) distingue cuatro tipos de aprehensión cognitiva cada una con sus leyes de organización y procesamiento: aprehensión perceptiva, secuencial, discursiva y operativa. Según Duval (1995, p. 155) “La aprehensión operativa no trabaja independientemente de las otras, particularmente de la aprehensión discursiva, sino que usualmente el procesamiento heurístico figural está subordinado a esa aprehensión”. Asimismo, el contraste entre la representación física de un objeto (un dibujo en papel o en una pantalla) y la imagen mental de ese objeto no es la característica más importante desde el punto de vista de las figuras geométricas ya que tienen la misma complejidad cognitiva. Las figuras pueden ser internalizadas y las imágenes pueden hacerse manifiestas.

Una de las hipótesis del trabajo de Soto-Andrade (2008, pp. 5-6) es que “La visualización es provocada por la activación de metáforas previas que implican un cambio de modo cognitivo del estudiante”. Este autor entiende por modo cognitivo nuestra forma preferida de pensar, percibir, recordar, de conocer y que aparece por sí misma cuando estamos resolviendo un problema. Se puede hablar de cuatro modos cognitivos que son resultado de combinar dos dicotomías: verbal/no verbal y secuencial/no secuencial (relacionados con el hemisferio del cerebro derecho e izquierdo y el frontal y occipital). Ese cambio de modo cognitivo que se produce con la activación de las metáforas se mueve desde el verbal al no verbal (visual) y finalmente, desde el secuencial al simultáneo.

Gal y Linchevski (2010, p. 166) analizan las dificultades implicadas en los procesos figurales del aprendizaje de la geometría a través de tres fases: la organización perceptiva, la fase de reconocimiento y la fase de representación. Estos autores muestran cómo los principios de la Gestalt de la organización perceptiva pueden ser utilizados para explicar algunas de las dificultades encontradas en tareas geométricas. En la siguiente fase, la de reconocimiento, la forma y objetos, una vez percibidos, son reconocidos. El objeto es dividido en sub-objetos cada uno de los cuales es clasificado para posteriormente, cuando esas piezas y su configuración están determinadas, el objeto se reconoce como un patrón compuesto por dichas piezas. El reconocimiento de esos patrones se puede realizar mediante un proceso de abajo-arriba o de arriba-abajo. La última fase, la fase de representación, ocurre cuando, una vez que los objetos son reconocidos, se representan en la mente.

3- Preferencia del método.

El objetivo de las investigaciones se centra en analizar las características de los visualizadores y el efecto de una enseñanza visual o no visual sobre visualizadores y no visualizadores en términos de rendimiento en VRE.

Siguiendo la premisa de que todo problema matemático involucra lógica y razonamiento para su resolución, un método es visual si involucra imágenes visuales como una parte esencial del trabajo. En ese sentido, Presmeg (1986b, pp. 42-43) define un *visualizador* como una persona que prefiere usar métodos visuales al tratar con problemas matemáticos que pueden ser resueltos por ambos métodos, mientras que un *no visualizador* es aquel que los resuelve por métodos no visuales.

Partiendo de la clasificación anterior, una línea de investigación se ha interesado en los estudiantes que sobresalen en visualización. Una de las razones que nos da Woolner (2004, p. 450) para intentar explicar cuál es el motivo de que los visualizadores no estén entre los estudiantes de éxito matemático, tiene que ver con que el estilo de aprendizaje preferido por los visualizadores no concuerda con el estilo claramente verbal de la enseñanza y evaluación tradicional. Otra razón se deriva de que las diferencias entre enfoque visual y enfoque verbal pueden proceder de la existencia de distintos tipos de visualizadores. Kozhevnikov, Hegarty y Mayer (2002) argumentan que algunos visualizadores tienden a utilizar imágenes pictóricas concretas mientras que otros obtienen el éxito a través de imágenes más abstractas que requieren de más habilidades espaciales. De ahí que los visualizadores puedan tener alta o baja capacidad espacial. También se ha sugerido que los problemas de los visualizadores provienen de la falta de equilibrio entre la comprensión visual y la verbal.

Presmeg (1986a, pp. 103-105) explica que este fenómeno puede deberse a factores externos (la propia naturaleza de las matemáticas, limitación en los tiempos de evaluación, los libros de texto y métodos de enseñanza) e internos (requieren más carga cognitiva y las imágenes concretas pueden hacer pensar en detalles irrelevantes o incluso introducir información falsa). Ambos factores pueden interactuar para producir una preponderancia de no visualizadores entre alumnos de alto rendimiento matemático.

Faceta instruccional

Según Ben-Chaim, Lappan y Houang (1988, p. 68), "los efectos de la instrucción para incrementar las habilidades de visualización espacial proporcionan evidencia que soporta la noción de que esas habilidades pueden ser enseñadas y aprendidas".

La mayor parte de los trabajos presentan propuestas para trabajar la conversión de representaciones planas de objetos 3D, conceptos geométricos básicos, exploración de transformaciones geométricas en el plano y desarrollos planos de sólidos. También se analiza el efecto de los recursos en esa instrucción, tanto de los materiales manipulativos como de los nuevos entornos tecnológicos. A continuación comentaré sólo algunos trabajos a modo de ejemplo.

Hershkowitz et al. (1996), describen tres proyectos centrados principalmente en la perspectiva de la educación visual para la interacción de las formas con el espacio real. Desde el punto de vista de estos autores, estos proyectos muestran una importante contribución a la educación visual: en los tres el punto de partida de la actividad de enseñanza aprendizaje son las formas en el espacio, a los estudiantes se les guía hacia la matematización del entorno visual con el que interactúan y, las herramientas y acciones matemáticas son ricas y variadas, yendo más allá de la identificación y análisis de las componentes y propiedades de entidades visuales, considerando relaciones dinámicas y niveles superiores entre entidades visuales en el espacio.

Tal y como señala Gutiérrez (1998, p. 6), hay numerosos estudios que han analizado las componentes específicas de la visualización en la geometría espacial. Varios de ellos se centran en las representaciones planas de objetos tridimensionales. Pittalis, Mousoulides y Christou (2009) parten de la base de que en la representación plana de objetos tridimensionales hay una pérdida de información que dificulta tanto el análisis de las propiedades de los objetos como el propio reconocimiento de los mismos. La comunicación de información espacial a partir de figuras bidimensionales demanda la aplicación de ciertos convencionalismos, no triviales, que no son enseñados en la escuela tradicional y que son fundamentales para interpretar dichas representaciones planas y poder reconstruir el objeto tridimensional.

La premisa de Malara (1998) se basaba en que la única forma de que los profesores incluyeran cierto tipo de actividades de sólidos geométricos en sus clases (no habituales en los planes de estudio) era que ellos mismos discutieran y comprobaran la potencia, las dificultades y problemas que podrían surgir de los mismos. Este trabajo se centra exclusivamente en la representación de objetos en una trama isométrica con una propuesta de ejercicios que implican la habilidad de visualizar mentalmente los sólidos en nuevas posiciones, desde varios puntos de vista, dibujar tales representaciones, identificar objetos y completar su representación, etc.

Según Pallascio, Allaire y Mongeau (1993, pp. 8-9), desde la investigación en visualización emergen dos tipos de imágenes mentales, aquellas que pertenecen a un consumo de datos inmediato y que están relacionadas con competencias analíticas (percepción) y las que tratan con la reconstrucción mental de objetos, relacionadas con competencias sintéticas (representación). El trabajo de estos autores pretende mostrar el desarrollo de competencias espaciales a través de una propuesta de actividades que alternen o combinen competencias analíticas y sintéticas.

Cohen (2003, p. 229) sugiere que hay una diferencia fundamental en el proceso mental que se necesita para visualizar desarrollos de sólidos curvos frente al que se necesita para desarrollar poliedros, ya que en estos últimos toda la superficie del sólido aparece en la misma forma, mientras que en los primeros (conos y cilindros) hay superficies curvas que tienen un aspecto totalmente diferente cuando se tumban sobre el plano. Según Cohen imaginar estos desarrollos depende en gran medida de las experiencias llevadas a cabo con acciones de plegar y desplegar sólidos.

Según Gutiérrez (1996b) el software especial que permite ver diferentes representaciones de sólidos en pantalla y poder transformarlos favorece la creación y manipulación de imágenes mentales. Un ejemplo de ello lo tenemos en la investigación de Pittalis, Mousoulides, y Antreou (2009) cuyo objetivo es examinar los procesos de visualización de los estudiantes para construir imágenes visuales dinámicas de formas 3D cuando estaban trabajando en un entorno dinámico. Estos autores hablan de habilidades espaciales dinámicas como aquellas que se requieren para razonar sobre estímulos en movimiento (visualización dinámica). Normalmente, el aprendizaje a través de estos entornos combina representaciones simbólicas, estáticas y dinámicas que pueden ser modificadas de forma interactiva. A su vez, estos nuevos entornos demandan de los estudiantes la necesidad de procesar y relacionar diferentes representaciones, así como controlar y evaluar interacciones con esas representaciones para construir representaciones mentales coherentes. Sus conclusiones afirman que el software permitió a los estudiantes construir imágenes visuales dinámicas, poniendo de manifiesto el gran potencial de estas para mejorar su aprendizaje.

Las propuestas didácticas de Guillén (2001, 2005), centradas en la clasificación de sólidos, muestran la gran ventaja del material manipulativo así como de los entornos dinámicos que permiten construir o generar familias de sólidos.

Por otra parte, Acuña y Larios (2008) abordan dos fenómenos relacionados con la operación de arrastre que obstaculizan una visualización adecuada. El primero surge cuando los estudiantes son incapaces de visualizar todos los momentos intermedios de la transformación, de manera que sólo consideran la construcción hecha antes de ser modificada por el arrastre y la construcción final (esto puede ser considerado como una forma de rigidez geométrica ya que trata con la incapacidad de imaginar cada una de las situaciones intermedias como una posición discreta de la construcción). El segundo tiene que ver con la internalización de la propia herramienta y la capacidad de proporcionar un significado matemático coherente. “Para que esta internalización tenga lugar los atributos figurativos deben alcanzar un cierto grado de identificación y fusión con los atributos conceptuales” (Acuña y Larios, 2008, p. 7).

El trabajo de Sinclair (2003) resalta la distinción entre los diagramas de los libros de texto y los bocetos en geometría dinámica para poder extraer todos los beneficios de la realidad visual. Los estudiantes que tratan las imágenes dinámicas como modelos de los libros de texto pierden la evidencia visual que podría proporcionar una mayor comprensión de las relaciones geométricas. Esto también es corroborado por la investigación llevada a cabo por Sack y Vazquez (2008, p. 222).

Pese a que la mayor parte de los estudios sobre la importancia de la visualización en el aprendizaje de la geometría se centran en la geometría espacial, algunos investigadores, como Orton (1997) se han preocupado por analizar su influencia en el aprendizaje de conceptos de geometría plana. Este autor analiza modelos de reconocimiento de figuras planas en diferentes orientaciones mediante la manipulación mental de las mismas.

White y Mitchelmore (2003, p. 403), teniendo en cuenta que el reconocimiento visual del concepto de ángulo no es trivial, presentan una propuesta para la enseñanza de este concepto que va desde actividades físicas con materiales concretos al concepto abstracto general.

Al igual que en la geometría espacial, en la geometría plana el uso de entornos de geometría dinámica y software adecuado puede facilitar la construcción y definición de conceptos (Pratt y Davison, 2003). Así mismo, permite desarrollar conexiones entre las figuras y sus propiedades, formando relaciones jerárquicas entre clases de formas y facilitando el paso de un nivel de van Hiele a otro (De Villiers, 1998; Markopoulus y Potari, 1996).

En general, muchos investigadores consideran, sobre todo en el nivel de enseñanza secundaria, que la finalidad de las actividades de construcción en entornos de geometría dinámica es actuar de puente hacia la justificación y la demostración (Healy y Hoyles, 2001; Mariotti, 2001; Marrades y Gutiérrez, 2000).

Faceta ecológica

En la faceta ecológica se recogen aquellas investigaciones que tratan diferencias de género y diferencias culturales en cuanto a rendimiento en test de VRE. Además, también se contemplan trabajos en los que la visualización opera con conceptos matemáticos que no contienen aspectos espaciales y aquellas investigaciones que intentan enfatizar la importancia de la visualización de cara a incluirla en los documentos curriculares así como aquellas que realizan propuestas concretas.

En la revisión hecha por Gutiérrez (1998), se concluye que existe un amplio acuerdo en que la capacidad de visualización está más desarrollada en los hombres que en las mujeres, sin embargo, en cuanto a razonamiento lógico las capacidades son muy similares. Otros investigadores, como Arrieta (2003, 2006) y Presmeg y Bergsten (1995), presentan conclusiones diferentes, observando que, en ciertas etapas, las chicas superan a los chicos.

Los trabajos de Clements y Battista (1992) y Gorgorió (1996, 1998) señalan que es importante comprender la complejidad de la investigación en términos de diferencia de géneros, esas diferencias se han atribuido a factores culturales, biológicos o a ambos. Además, incluso cuando no se encuentran esas diferencias en una tarea determinada, no se debería asumir que los chicos y las chicas hayan usado las mismas estrategias para resolverlas.

Algunas investigaciones, como la de Bishop (1983) y la de Mitchelmore (1980), han mostrado que los estudiantes no pertenecientes a culturas occidentales son pobres en habilidades espaciales, debido, principalmente, a la falta de familiaridad con las convenciones occidentales. Presmeg (1989) indica que, al igual que en las culturas occidentales, hay preferencias individuales a la hora de utilizar o no métodos visuales en la resolución de problemas. Esta autora centra su atención en mostrar de qué manera la visualización puede mejorar la comprensión y el aprendizaje de las matemáticas en clases multiculturales. La necesidad de imágenes adquiere gran importancia cuando nos encontramos en situaciones de instrucción en las que el lenguaje empleado no es la lengua materna de muchos de los estudiantes, por lo tanto, en pequeña o gran medida, la visualización facilitará una comprensión que la falta de fluidez verbal no permite (Presmeg, 1989, p. 9).

En cuanto a implicaciones curriculares, los educadores matemáticos involucrados en el currículum recomendaban, desde hace ya más de dos décadas, que se debería impartir un curso de intuición visual en geometría antes de empezar con el curso deductivo. La educación visual es fundamental para una buena adaptación a esta nueva sociedad tecnológica y debe estar recogida desde propuestas curriculares (Arcavi, 2003; Battista, 2007; Cunningham, 1991; Phillips et al., 2010; Guillén, 2000; Hershkowitz et al., 1996; Mariotti, 2001; Rivera, 2011; Stylianou, 2001).

Ben-Chaim et al. (1989), Hershkowitz, et al. (1996) recalcan la fuerte relación que tiene la visualización con muchos aspectos del currículo en la escuela infantil y primaria (razonamiento deductivo/inductivo, razonamiento proporcional, formación de conceptos matemáticos, etc.). En estas etapas adquiere gran importancia debido a que los niños tienen una fuerte dependencia de las representaciones visuales de las ideas matemáticas y confían en ellas mucho más que los adultos.

Para Bishop (1989, p. 11) tanto la visualización como la imaginería visual son cuestiones muy personales; ya que cada alumno necesita un tiempo específico para la creación de las imágenes y, además, la forma de operar con esas visualizaciones depende de cada uno. Esas características han de ser contempladas en la enseñanza, pues muchos profesores esperan que los alumnos creen imágenes idénticas como resultado de procesos que son personales. Así mismo, comprender en profundidad el proceso de visualización supone tener en cuenta diferentes contextos, variedad de tareas y diversos estímulos.

Desde la teoría de los conceptos figurales, Fischbein (1990, pp. 155-156) llega a la conclusión de que el proceso de construcción de conceptos figurales en la mente de los estudiantes no debe ser considerado como un efecto espontáneo de los cursos usuales de geometría. El proceso de integrar las propiedades figurales y conceptuales en una misma unidad mental con predominancia de las limitaciones conceptuales sobre las figurales no es un proceso natural, por lo que debe ser objeto de preocupación para el profesor.

Según Presmeg (1989, p. 20), una forma de ayudar a los estudiantes a comprender las diferentes formas de vida, a entender y apreciar los elementos y el pensamiento propio de cada cultura, sería incorporar al currículo todas esas actividades que introducen elementos visuales que emanan de ellas.

La propuesta del informe “Learning to Think Spatially” publicado por las academias Nacionales de US (National Academy of Sciencies, National Academy of Engineering, Institute of Medicine) (National Research Council, 2006), incluye el pensamiento espacial en el currículo como un paso necesario para promover una alfabetización espacial que se hace fundamental en el tecnológico siglo XXI.

Diezmann y Lowrie (2009, p. 423) nos indican seis formas de conseguir el objetivo anterior: introducir en el currículo el desarrollo de habilidades espaciales y variedad de tareas espaciales; ayudar y apoyar a los estudiantes en el desarrollo de su vocabulario espacial y proporcionar situaciones para que lo utilicen; fomentar el desarrollo de habilidades espaciales (memoria visual, visualización de zonas oscuras y colocación y orientación de formas); proporcionar ejemplos de tareas para que sea más fácil después visualizar situaciones y fomentar la conexión con experiencias previas; hacer un seguimiento de las dificultades y errores de los alumnos, y finalmente, obtener rendimiento del uso de las tecnologías, como los juegos 3D, que proporcionan entornos informales para el aprendizaje sobre orientación.

UNA APROXIMACIÓN ONTOSEMIÓTICA A LA VISUALIZACIÓN Y EL RAZONAMIENTO ESPACIAL.

El objetivo principal de esta investigación se centra en la evaluación de habilidades de visualización y razonamiento espacial de futuros profesores de Educación Primaria. El enfoque del trabajo es de índole cognitivo, en el sentido de que se pretende evaluar conocimientos, formas de razonar y habilidades de pensamiento de los sujetos sobre los que se realiza el estudio. Teniendo en cuenta la diversidad de planteamientos y de nociones cognitivas usadas en las investigaciones, así como la finalidad educativa del estudio, se ha optado por utilizar un marco teórico integrativo sobre el conocimiento y la instrucción matemática, como es el "enfoque ontosemiótico" (EOS) que Godino y colaboradores vienen desarrollando para la Didáctica de las Matemáticas (Godino y Batanero, 1998; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007).

El interés de abordar este objetivo se basa en el papel que la visualización tiene en el aprendizaje matemático en general y, de manera especial, en el aprendizaje de la geometría, por lo que su evaluación y desarrollo debe ser un objetivo de la enseñanza en los distintos niveles educativos. En el caso de la Educación Primaria así se reconoce en los diseños curriculares de los diversos países (NCTM, 2000; MEC, 2006), lo que plantea un reto para la formación de profesores, tema que ha sido objeto de un menor número de investigaciones. El conocimiento de las habilidades iniciales de los futuros profesores sobre visualización y razonamiento espacial es, sin duda, una información necesaria para el diseño de acciones formativas fundamentadas sobre este contenido curricular.

Se ha empleado como instrumento de evaluación para analizar las habilidades de visualización y razonamiento espacial un cuestionario elaborado específicamente para esta investigación, el cual se ha pasado a una muestra de 400 alumnos. El análisis se ha centrado en aplicar las categorías de objetos matemáticos primarios que propone el EOS (objetos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos, argumentos, situaciones-problemas), y las dualidades cognitivas (ostensivo – no ostensivo, particular – general, unitario – sistémico, expresión – contenido y personal – institucional) con el fin de elaborar una caracterización de la visualización espacial, que servirá de base para describir las habilidades de los estudiantes a la hora de resolver las tareas propuestas y comprender los conflictos que manifiestan.

En este marco teórico se considera que el análisis de la actividad matemática, de los objetos y procesos que intervienen en la misma, centra la atención inicial en las *prácticas* que realizan las personas implicadas en la solución de determinadas situaciones-problema. La aplicación de este planteamiento a la visualización nos lleva a distinguir entre "prácticas visuales" y "prácticas no visuales" o simbólico/analíticas. Con dicho fin se fija el interés en los tipos de objetos lingüísticos y artefactos que intervienen en una práctica los cuales serán considerados como visuales si ponen en juego signos icónicos, diagramáticos o índices (Peirce, 1965). Aunque las representaciones simbólicas (lengua natural o lenguajes formales) consisten en inscripciones visibles, no consideraremos dichas inscripciones como propiamente visuales, sino como analíticas o sentenciales.

Desde este marco se asume, en términos generales, la definición de visualización propuesta por Arcavi (2003, p. 217): "La visualización es la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre retratos, imágenes, diagramas, en nuestras mentes, en el papel o con herramientas tecnológicas, con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas previamente desconocidas y comprensiones avanzadas". Vamos a interpretar la noción cognitiva de habilidad en términos de las nociones teóricas del EOS como el sistema de prácticas operativas y discursivas que una persona realiza para resolver un determinado tipo de situaciones-problemas y de la configuración de objetos y procesos ligados a tales prácticas

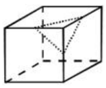
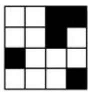
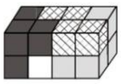
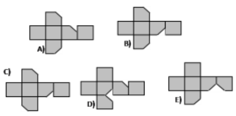
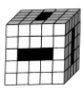
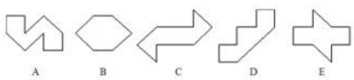
Las tareas seleccionadas serán cuestiones importantes desde el punto de vista de la investigación, al ser consideradas como tareas visuales según el marco teórico adoptado (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012) y por corresponderse con tipos de tareas de investigaciones previas, permitiendo una comparación con los resultados de las mismas. Por otra parte, en dichas actividades intervienen contenidos matemáticos que forman parte, explícita o implícitamente, del currículo de la formación de maestros. En la tabla 1 de describen brevemente las diferentes tareas seleccionadas.

Tabla 1. Clasificación de las tareas del cuestionario

Nº de ítem	Espacio	Acción (ejecutar/imaginar)	Tipo de respuesta
Ítem 1	3D	Conteo de elementos	Identificar
Ítem 2	2D	Realizar simetría	Dibujar e Identificar
Ítem 3	3D	Componer y descomponer en partes	Identificar
Ítem 4	3D	Plegar y desplegar	Identificar
Ítem 5	3D	Conteo de elementos	Identificar
Ítem 6	2D	Componer y descomponer en partes	Identificar
Ítem 7	3D	Rotar	Dibujar

Dada la distribución de respuestas correctas por ítem (Tabla 2), con porcentajes inferiores al 40% salvo en el ítem 4, se hace evidente que las tareas presentadas no forman parte de la práctica habitual de estos estudiantes. Se ha realizado un análisis de la varianza multifactorial para determinar qué factores tienen un efecto estadísticamente significativo sobre la puntuación total y, en nuestro caso, hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas en el factor género a favor de los hombres.

Tabla 2. Distribución del número de respuestas correctas por ítem

Ítem	Distintivo gráfico	Frecuencia	Porcentaje
1		73	18,25
2		34	8,50
3		154	38,50
4		304	76,00
5		85	21,25
6		151	37,75
7		16	4,00

Uno de los objetivos específicos del trabajo fue determinar los tipos de configuraciones de objetos y procesos que ponen en juego los sujetos cuando realizan las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE. Hablar de los objetos y procesos que ponen en juego los sujetos al realizar las prácticas requeridas en la solución de tareas de VRE es hablar de las configuraciones cognitivas en el marco del EOS (Fernández, Godino y Cajaraville, 2012). También se analizará en cada ítem la “efectividad” de cada una de las configuraciones asociadas. Esta idea de la “efectividad” se toma de Gorgorió (1998, p. 227) y se modifica para que sea pertinente sólo para aquellas configuraciones susceptibles de producir resultados correctos (configuración válida para lograr el resultado que se espera).

Atendiendo a la variedad de configuraciones cognitivas fue posible describir niveles de habilidad/competencia sobre VRE. Estos niveles están sujetos a ciertas condiciones que dependen directamente de la tarea que se está realizando. Por ejemplo, el nivel 1 en el ítem 1 no tiene por qué corresponderse con el nivel 1 en la tarea 2; sino que se refiere a que son los niveles más bajos encontrados. En cada nivel puede haber varias configuraciones y en cada configuración las habilidades de visualización (Del Grande, 1990) implicadas pueden tener distinto peso.

Clasificamos las configuraciones para cada ítem en aquellas que consideramos de alto nivel y aquellas que corresponden a niveles bajos. Se observa que en los ítems 3, 5 y 6 las configuraciones de alto nivel superan en porcentaje a las de bajo nivel. Eso pone de manifiesto que los estudiantes, en dichas tareas, tienen configuraciones dónde movilizan variedad y cantidad de objetos visuales (propiedades visuales, imágenes mentales, etc.). Esto no quiere decir que las acciones sobre esos elementos se hagan siempre de manera correcta, como se puede comprobar si se analiza la efectividad de dichas configuraciones. Probablemente esto último sea debido a que los estudiantes no saben cómo trabajar con esos objetos y procesos visuales o bien que no están habituados a hacerlo.

En los demás ítems se observa que la diferencia de porcentaje entre las configuraciones de bajo y alto nivel es muy significativo. Esta alta incidencia de las configuraciones cognitivas de bajo nivel se puede explicar en términos de la complejidad de los objetos y procesos requeridos para la resolución de las tareas de VRE incluidas en el instrumento de evaluación. En la búsqueda de algún tipo de característica común o diferenciadora de cada pareja, se observa que la respuesta solicitada en los ítems 2 y 7 supone el dibujo de una figura y que además los conceptos implicados se refieren a movimientos en el plano o en el espacio: eje de rotación/simetría, puntos fijos y las propiedades equidistancia al eje y perpendicularidad entre el eje y el segmento que une un punto con su transformado. En el ítem 7 aparece además el concepto de trayectoria, hueco y agujero. En el caso de los ítems 1 y 4 la conexión para estos resultados se establece en los conceptos: intersección de planos, sólidos truncados y ángulos poliedros.

Otro objetivo específico de la investigación fue determinar los principales conflictos manifestados por los sujetos ante la resolución de las tareas seleccionadas. Los principales conflictos que se han detectado están directamente asociados con la interpretación de la representación plana de los objetos tridimensionales y la de los diagramas presentados. También aparecen conflictos entre la definición verbal de una figura y la imagen que se presenta de la misma y dificultades en los estudiantes a la hora de argumentar la respuesta dada.

Se ha constatado que las características de la tarea, fundamentalmente la acción requerida (Gorgorió, 1998), es uno de los elementos que más afectó a la resolución de la misma. Así, aquellas que requieren la acción de dibujar, fueron las que menor porcentaje de aciertos tuvieron. También se ha observado que muchas configuraciones de alto nivel en VRE no alcanzan el 100% de efectividad debido, además, al tipo de respuesta exigido (Tabla 1).

Por otra parte, el análisis ontosemiótico ha permitido explicar que en la resolución de la mayoría de las tareas, las referencias o restricciones visuales son más fuertes para los alumnos que las que vienen dadas a partir de una sentencia verbal. Este poder de lo visual sobre lo verbal ha de ser canalizado, es decir, es necesario aprender a manipularlo para poder trabajar y razonar sobre esas imágenes.

Duval (1999, pp. 4-5) sitúa en el centro de la comprensión en matemáticas la representación y la visualización y, por tanto, es fundamental analizar en qué medida estos dos elementos interactúan para producir aprendizaje. A diferencia de otros campos de conocimiento, el uso de representaciones semióticas es esencial para tener acceso a los objetos matemáticos; sin embargo, hay que tener en cuenta que la comprensión de las matemáticas requiere distinguir un objeto de su representación. Hemos visto en este trabajo como uno de los mayores conflictos que se encontraron a la hora de resolver las tareas tiene que ver con esa falta de interrelación entre representación y visualización.

Desde una perspectiva formativa, esta investigación ha revelado las importantes carencias de los estudiantes para maestro en cuanto a conocimiento común y especializado del contenido de visualización y razonamiento espacial (Hill, Ball y Schilling, 2008). Se deriva por tanto la necesidad de diseñar, implementar y evaluar acciones formativas específicas para promover la mejora de dichos conocimientos.

CARACTERIZACIÓN DE LA VRE EN LOS ENFOQUES ACTUALES DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el campo de la Educación Matemática, Battista (2007), Gutiérrez (1996a, 1998), Nemirovsky y Noble (1997), Phillips (2010) y Presmeg (2006, 2008) nos ofrecen un amplio y variado conjunto de trabajos teóricos sobre visualización, a la vez que hacen un recorrido por el estado de la cuestión. La monografía de Rivera (2011) ha dejado fuera los resultados de investigación sobre estudios implicando estadística, geometría y tecnología en el aprendizaje matemático, sin embargo indica que hay coincidencias interesantes en términos de resultados e implicaciones. Este autor incide en que los avances en las herramientas tecnológicas van a proporcionar el impulso necesario para llevar a cabo más investigación en la visualización en matemáticas.

Presmeg (2006, pp. 233-234) apunta una serie de direcciones a seguir en cuanto a temas de investigación en este campo y también enumera una lista con trece cuestiones que parecen ser las más significativas para la investigación sobre visualización en educación matemática. Además, esta autora insiste en que la necesidad de investigación en visualización sigue siendo un asunto primordial tanto en la resolución de problemas como en la interacción de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las aulas a todos los niveles. Otras cuestiones formuladas por Presmeg se dirigen principalmente a cómo promover las habilidades de visualización en la enseñanza de las matemáticas.

En la búsqueda de un marco teórico para la visualización en educación matemática, Presmeg (2008) afirma que las teorías anteriores han resultado útiles como lentes para interpretar los resultados de investigaciones empíricas y propone ampliar la taxonomía sugerida por Marcou y Gagatsis (2003) y aspectos relacionados de la teoría lingüística que incluye metáfora y metonimia. Según esta autora, la base teórica descrita anteriormente puede proporcionar un punto de inicio para interpretar fenómenos de visualización matemática en muchas áreas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a muchos niveles; pero aún falta que esta teoría siga evolucionando y que pueda nutrirse de futuras investigaciones empíricas (Presmeg, 2008, pp. 9-10).

En Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato (2012) se intenta avanzar en dar una respuesta al problema de elaborar una teoría que esclarezca la naturaleza y componentes de la visualización y su relación con otros procesos implicados en la actividad matemática, su enseñanza y aprendizaje. Un aspecto clave de la elaboración de una teoría de la visualización en educación matemática debe incluir el estudio de las relaciones de esta forma de percepción con otras modalidades de expresión ostensiva (lenguajes analíticos o secuenciales), y sobre todo, su relación con los objetos matemáticos no ostensivos (sean considerados como mentales, formales, o ideales).

Phillips et al. (2010, pp. 88-89) enuncian cinco cuestiones que deberían ser abordadas empíricamente en futuras investigaciones. Una de ellas se refiere a estudiar en qué situaciones la visualización puede no ayudar, lo cual les lleva a formularse la pregunta de si es mejor tratar ciertos tópicos a nivel abstracto y, de ser así, analizar el porqué de estas diferencias entre unos y otros.

Partiendo de que el pensamiento visual subyace de forma obvia en la geometría, Clements y Battista (1992, p. 457) consideran que "el pensamiento visual tiene diferentes capas, desde la más primitiva a la más sofisticada y que cada una juega un papel diferente en el pensamiento, dependiendo de la capa que esté activada". Siguiendo esa línea, Battista (2007) incide en que sería conveniente que las nuevas investigaciones describan exactamente la interacción de la visualización y la conceptualización geométrica durante el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial.

A la hora de centrar mi recorrido por los trabajos realizados en el seno la SEIEM relacionados con la VRE, tomaré como fecha inicial el año 2010 puesto que en el simposio de ese mismo año ya se recogen los anteriores en el texto de una de las ponencias. En dicho simposio, se dedica un seminario a la enseñanza y aprendizaje de la geometría, presentado y coordinado por Ángel Gutiérrez. La ponencia de Guillén (2010, pp. 51-52) centrada en los sólidos no excluyó la visualización como línea de investigación en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Esta autora plantea una serie de cuestiones que abren caminos a explorar en este campo. En este mismo seminario, Fortuny, Iranzo y Morera (2010, p. 74) se centran en el papel de la tecnología en la educación geométrica y recogen las aportaciones sobre educación geométrica y tecnología durante los cinco años anteriores. Ello les lleva a considerar la visualización de procesos, relacionado con la interpretación de diagramas y representaciones gráficas que ofrecen los entornos informáticos, como uno de los procesos cognitivos implicados en la actividad geométrica que se deben coordinar con otros para el aprendizaje de la geometría. En ese mismo simposio se presenta una comunicación que reabre el debate entre la relación entre visualización y talento matemático en el campo de la geometría (Ramirez, Flores y Castro, 2010).

En la siguiente tabla (Tabla 3) recojo las investigaciones actuales sobre VRE en el seno de la SEIEM y reuniones asociadas.

Encuentro	Título	Autores
SEIEM 2010	Visualización y talento matemático. Una experiencia docente.	Ramirez, R. Flores, P. y Castro, E.
I Encuentro AprenGeom2010	Geometría y visualización 3D para maestros en formación.	Polo, I. y González, M. J
II Encuentro AprenGeom2011	Estrategias de resolución geométrica por insight.	Sánchez, F.
	Un estudio de la capacidad espacial desde la educación infantil hasta la universidad.	Arrieta, I.
SEIEM 2011 Grupo aprengeom	Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas.	Ramirez, R. Flores, P. y Castro, E.
SEIEM 2012 Grupo aprengeom	Resultados de una evaluación sobre habilidades de visualización y razonamiento espacial en futuros profesores de educación primaria.	Fernández, M. T.
SEIEM 2013	Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales.	Gonzato, M. Godino, J. D.; Contreras, A. y Fernández, T.

Los últimos trabajos presentados dentro de este campo de investigación se mueven, principalmente, en tres direcciones:

- Relación entre niveles de van Hiele y habilidades de visualización. El interés se orienta en términos de desarrollo de dichas habilidades y su efecto sobre los niveles y viceversa.
- Formación inicial y continua del profesorado. Los estudios realizados muestran que es necesario el desarrollo de acciones formativas encaminadas a mejorar la competencia de los futuros profesores a la hora de enfrentarse a tareas de visualización espacial y a la hora de seleccionar tipos de tareas para su práctica docente (conocimiento común y especializado del profesor).
- Los nuevos entornos de geometría dinámica. Ante el objetivo de explotar la potencia que ofrecen estos recursos, es preciso analizar el papel de la visualización, detectando nuevas variables y características, así como sus efectos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría.

Estas tres direcciones no son en absoluto excluyentes, como se puede observar en varias de las referencias descritas. Por otra parte, estas líneas intentan resolver cuestiones abiertas o propuestas por los principales trabajos de referencia en este tópico, citados en la primera parte del presente documento.

A nivel internacional, la visualización sigue estando presente en los principales foros y reuniones. Como ejemplos de ello tendríamos los casos del ICME12, donde uno de los tópicos sigue titulándose “Visualization in the teaching and learning of mathematics”, o en el grupo de pensamiento geométrico enmarcado dentro del CERME8, donde una de las líneas de trabajo llevaba el título de “Spatial and figural abilities, as geometric reasoning about two-dimensional and three-dimensional shapes”.

Por otra parte, recoger referencias correspondientes a las numerosas investigaciones que se están llevando a cabo sobre la visualización y las tecnologías en el campo de la geometría supondría un tarea que está fuera del alcance de los objetivos de este documento. El número de estudios publicados relacionados con la tecnología informática, animación y efectos visuales interactivos ha aumentado de forma exponencial desde el año 2000 (Phillips, 2010, p. 78).

CONCLUSIONES

La revisión bibliográfica nos ha permitido identificar aquellos tópicos que han sido objeto de interés para los investigadores a lo largo de más de cincuenta años y encuadrarlos en una de las cuatro facetas descritas dentro del marco teórico del enfoque ontosemiótico.

Por otra parte, se ha realizado un recorrido por las principales cuestiones de investigación formuladas alrededor de la visualización y el razonamiento geométrico y espacial desde diferentes marcos teóricos.

Presmeg, (2008, pp. 9-10) establecía que era necesario encontrar un marco teórico común para la visualización. Phillips (2010, p. 83) responde que hasta el momento no lo hay aunque contamos con modelos parciales. Según este último autor, tanto los educadores como los investigadores deberían utilizar los resultados disponibles sólo en contextos similares a aquellos en los que fueron encontrados. Esta cuestión del marco teórico se ha retomado desde el entorno ontosemiótico como se ha visto en la anterior sección.

Otra cuestión que surge en documentos referenciados en la revisión bibliográfica es la relacionada con la visualización y los alumnos con talento matemático. Woolner (2004) se preguntaba si la conclusión, de diversos estudios, de que los visualizadores logran bajo rendimiento en test de geometría podría ser distinta si ciertos factores externos cambian (metodología de enseñanza, tiempos de evaluación, libros de texto, etc.). La investigación llevada a cabo por Ryu, Chong y Song (2007) sigue sugiriendo que alumnos con rendimiento alto en geometría presentan dificultades en procesos de visualización espacial. Por otro lado, la idea de que los alumnos con talento matemático evitan estrategias propias de visualizadores no concuerda con los resultados del trabajo de Ramírez, Flores y Castro, (2010, 2012), que pueden arrojar un poco de luz sobre estas cuestiones.

Diversos estudios recientes indican que la reticencia al empleo de la visualización está disminuyendo, debido en parte a las reformas de los currículos, que inciden en las representaciones visuales, y a la creciente facilidad que tienen los estudiantes para acceder a la tecnología gráfica. Sin embargo, estos cambios, en relación a los estudiantes, pueden ser superficiales ya que a pesar de que puedan estar dispuestos a utilizar formas de representación visual, carecen de entrenamiento en este tipo de habilidades (Stylianou, 2001, p. 230).

Arcavi (2003, p. 235) apunta la necesidad de crear flexibilidad entre las representaciones visuales y analíticas de una misma situación de cara a obtener una adecuada comprensión de las matemáticas. Ello supone que la clásica dicotomía analítico/visualizador no es la más adecuada para describir los procesos de aprendizaje, sino que esa dicotomía debe ser analizada en términos de estrategias, enfoques y experiencias más que en términos de preferencias individuales. De igual modo intenta mostrar cómo los enfoques analíticos se enriquecen mediante la visualización y como el pensamiento analítico beneficia los enfoques visuales. Esta idea también se puede extraer del trabajo de Godino, Fernández, Gonzato y Wilhelmi (2013).

Tal y como indica Presmeg (2006, p. 233) un tema que no ha sido tratado en profundidad hasta ahora es la manera en que la visualización interactúa con la Didáctica de la Matemática. De hecho, los pocos trabajos que hay sobre ello son el de la citada Presmeg (1991) y el de Woolner (2004).

En la actualidad, la visualización en el aprendizaje de las matemáticas no sólo es contemplada como una propuesta ilustrativa sino que está siendo reconocida como una componente clave del razonamiento, la resolución de problemas y la demostración, como se puede observar en Battista (2007); Presmeg (2006), Phillips et al. (2010) y Rivera (2011). Todos ellos inciden en que una de las vías que abre más líneas de trabajo para la investigación en geometría es la que contempla el uso de las nuevas tecnologías como entornos de aprendizaje y/o como herramientas. Ese camino no se puede recorrer sin tener en cuenta la presencia de la visualización (estática y/o dinámica), lo que necesariamente debe implicar la implementación de acciones formativas centradas en el desarrollo de habilidades y procesos visuales para la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Referencias

Acuña, C. & Larios ,V. (2008). Prototypes and learning of geometry. A reflection on its pertinence and its causes. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/193

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215-241.

Arrieta, M. (2003). Capacidad espacial y educación matemática: tres problemas para el futuro de la investigación. *Educación Matemática*, 15 (3), 57-76.

Arrieta, M. (2006). La capacidad espacial en la educación matemática: estructura y medida. *Educación matemática*, 18 (1), 99-132.

Arrieta, I. (2011). Un estudio de la capacidad espacial desde laeducación infantil hasta la universidad. *II Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/836

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. In F. Lester, (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publising.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In K. Heid & G. Blume (Eds.), *Research on technology in the learning and teaching of mathematics: Syntheses and perspectives*. Greenwich, CY: Information Age Publishing Inc.

Battista, M. T. & Clements, D. H. (1995). Geometry and Proof. *Mathematics Teacher*, 88(1), 48-54.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1988). The effect of instruction on spatial visualization skills of middle school boys and girls. *American Educational Research Journal*, 25, 51-71.

Ben-Chaim, D., Lappan, G. & Houang, R.T. (1989). The role of visualization in the middle school mathematics curriculum. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 49- 59.

Bishop, A. J. (1983). Space and Geometry. In R. Lesh & M. Landau (Eds), *Acquisition of Mathematics Concepts and Process* (pp. 175-203). New York: Academic Press.

Bishop, A. J. (1989). Review of research on visualization in mathematics education. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11 (1), 7-16.

Burden & Coulson, S. A. (1981). *Processing of spatial tasks*. Thesis, Monash University, Melbourne.

Clements, D. H. & Battista, M. T. (1992). Geometry and spatial reasoning. In Grouws, D. A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 420-464). New York : Macmillan Publishing Co.

Cohen, N. (2003). Curved solid nets. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), *Proceedings of the 27th PME International Conference*, 2, 229-236.

Cunningham, S. (1991). The visualization environment for mathematics education. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 19 (pp. 67-76). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

De Villiers, M. (1994). The role and function of Hierarchical classification of Quadrilaterals. *For the learning of Mathematics*, 14(1), 11-28.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or teach to define? *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 2, 248−255.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic Teacher*, *37* (6), 14-20.

Diezmann, C. & Lowrie, T. (2009). Primary students´ spatial visualization and spatial orientation; an evidence base for instruction. En Tzekaki, M.; Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference*, 2, 417-424.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of Representation and specific Processes. In R. Sutherland & J. Mason (Eds.), *Exploting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlin: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME*, 3-26.

Eisenberg, T. (1994). On understanding the reluctance to visualize. *Zentralblatt fur Didactic der Mathematik*, 26(4), 109-113.

Eisenberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. In W. Zimmermann & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*, 19 (pp. 25-37). Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Fernández, M. T. (2012). *Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial*. Tesis doctoral. Santiago de Compostela. Universidad de Santiago de Compostela.

Fernández, M. T. (en prensa). Resultados de una evaluación sobre habilidades de visualización y razonamiento espacial en en futuros profesores de primaria. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI. Comunicaciones de los grupos de investigación* (pp. 285 - 294). Jaén: SEIEM.

Fernández, M. T.; Godino, J. D. y Cajaraville, J. A. (2012). Razonamiento geométrico y visualización espacial desde el punto de vista ontosemiótico. *Bolema*, 26 (42).

Fischbein, E. (1990). Intuition and information processing in mathematical activity. *International Journal of Educational Research, 14* (1).

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics,* 24, 139-162.

Fischbein, E. & Nachlieli, T. (1998). Concepts and figures in geometrical reasoning. *International Journal of Science Education,* 20(10), 1193-1211.

Fortuny, J.M., Iranzo, N., Morera, L. (2010). Geometría y tecnología. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.

Gal, H. & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74 (2), 163-183.

Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matematica e la sua didattica*, 4, 434-450.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics Education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-*The International Journal on Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A.; Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias,* 30 (2), 163-184.

Godino, J. D.; Fernández, M. T.; Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (en prensa). Synergy between visual and analytical languages in mathematical thinking. In procceedings CERME8.

Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical learning and Problem Solving. In Lyn D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Goldin, G.A. (2007). Representation in School Mathematics A Unifying Research Perspective. In J. Kilpatrick (Ed.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp.275-285). Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Gonzato, M.; Fernández, T. y Godino, J.D. (2011). Tareas para el desarrollo de habilidades de visualización y orientación espacial: un estudio sistemático basado en la investigación didáctica. *Números* 77, 99-117.

Gorgorió, N. (1996): Choosing a visual strategy: The influence of gender on the solution process of rotation problems. In L. Puig & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th P.M.E. Conference,* 3, 3-19.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics* 35, 207-231.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las ciencias*, 18(1), 35-53.

Guillén, G. (2001). Las relaciones entre familias de prismas. Una experiencia con estudiantes de Magisterio. *Enseñanza de las Ciencias* 19(3), 415-431.

Guillén, G. (2005). Análisis de la clasificación. Una propuesta para abordar la clasificación en el mundo de los sólidos. *Educación Matemática,* 17(2), 117-152.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 69-85). Lleida. SEIEM.

Gutiérrez, A. (1991). Procesos y habilidades en visualización espacial. En A. Gutiérrez (Ed.), *Memorias del 3er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría* (pp. 44-59). México D.F.: CINVESTAV.

Gutiérrez, A. (1996a). Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework. In L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th PME International Conference,* 1, 3-19.

Gutiérrez, A. (1996b). The aspect of polyhedra as a factor influencing the students' ability for rotating them. In Batturo, A.R. (Ed.), *New directions in geometry education* (pp. 23-32). Brisbane, Australia: Centre for Math. and Sc. Education, Q.U.T.

Gutiérrez, A. (1998). Tendencias actuales de investigación en geometría y visualización. Text of an invited conference in "*Encuentro de Investigación en Educación Matemática*", TIEM-98. Centre de Recerca Matemàtica, Institut d'Estudis Catalans, Barcelona), manuscript.

Healy, L. & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International journal of Computers for Mathematical Learning*, 6, 235-256.

Hershkowitz, R. (1989). Visualitation in geometry- Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 61- 76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, P. y J. Kilpatrick (Eds), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the psychology of mathematics education* (pp. 70-95). Cambridge: Cambridge U.P.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Dormolen, J. Van (1996). Space and shape. In, A. J. Bishop et al. (Eds), *International Handbook of Mathematics Education.* (pp. 161-204). London: Kluwer.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: Student's interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational studies in Mathematics*, 44(1/2), 55-85.

Kozhevnikov, M., Hegarty, M. & Mayer, R.E. (2002). Revising the visualizer –Verbalizer dimension: evidence for two types of visualizers. *Cognition and Instruccion*, 20, 47-77.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Laborde, C. (1993). The computer as part of the learning environment: The case of geometry. In C. Keitel & K. Ruthven (Eds.), *Learning from computers: Mathematics education and technology,* 121, 48-67.

Malara, N. (1998). On the difficulties of visualization and representation of 3D objects in middle school teachers. En Olivier, A y Newstead, K. (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference*, 3, 239-246.

Marcou & Gagatsis (2003). A theoretical taxonomy of external systems of representation in the learning and understanding of matehamtics. In A. Gagatsis & I. Elia, (Eds.), *Representations and geometrical models in the learning of mathematics*, 1, (pp. 171-178). Nicosia: Intercollege Press.

Mariotti, M.A. (2001). Justifying and proving in the Cabri environment. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 6, 257-281.

Markopoulus, C. & Potari, D. (1996). Thinking about geometrical shapes in a computer environment. In L. Puig, L. & A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Mathematics Education*, 337-334.

Marrades, R. & Gutiérrez, A. (2000): Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment, *Educational Studies in Mathematics* 44(1/2), 87-125.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria.

Mitchelmore, M.C. (1980). Three dimensional geometrical drawing in three cultures. *Educational studies in Mathematics*, 11, 205-216.

National Research Council (2006). *Learning to think Spatially: GIS as a Support System in the K-12 Curriculum*. Washington, D.C.: Author.

Nemirovsky, R. & Noble, T. (1997). On mathematical visualization and the place where we live. *Educational Studies in Mathematics*, 33(2), 99-131.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics*. EEUU: National Council of Teachers of Mathematics. (Edición electrónica: http://standards.nctm.org/).

Orton, J. (1997). Pupil's perception of pattern in relation to shape. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21th PME International Conference*, 3, 304-311.

Pallascio, R. Allaire, A. & Mongeau P. (1993). The development of Spatial Competencies through alternating analytic and synthetic activities. *For the learning of mathematics*, 13(3), 8-15.

Peirce, C. S. (1965). *Obra lógico-semiótica*. Madrid: Taurus, 1987.

Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). Visualization in mathematics, reading and science education. Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Andreou, A. (2009). Construction of dynamic visual images of 3D Geometry shapes. In C. Bardini, P. Fortin, A. Oldknow & D. Vagost (Eds.), *Proceedings of the 9th International Conference on Technology in Mathematics Teaching*. Extraído el 2 de febrero de 2010 desde http://www.ictmt9.org/files/contributors/28f9525538800f9ebcdf852e2f425baa/PITTALIS_Dynamic%20visualisation_fullpaper.pdf

Pittalis, M.; Mousoulides, N. & Christou, C. (2009). Level of sophistication in representing 3D shapes. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceeding of the 33rd PME International Conference*, 4, 385-392.

Polo, I. y González, M. J (2010). Visualización 3D para maestros en formación. *I Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/800

Pratt & Davison (2003). Interactive whiteboards and the construction of definitions for the kite. In N. Pateman, B. J. Dourgherty & J. Zillox (Eds.), Proceedings of the 27th PME International Conference, 4, 31-38.

Presmeg, N. C. (1986a). Visualization and mathematical gittedness. *Educational studies in Mathematics*, 17, 297-311.

Presmeg, N. C. (1986b). Visualisation in high school mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6 (3), 42-46.

Presmeg, N. C. (1989). Visualization in multicultural mathematics classrooms. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1), 17- 24.

Presmeg, N. C. (1991). Classroom aspects which influence use of visual imagery in high school mathematics. In Furinghettti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME International Conference*, 3, 191-198.

Presmeg, N. C. (1992). Prototypes, metaphors, metonymies and imaginative rationality in high school mathematics. *Educational studies in Mathematics*, 23, 595-610.

Presmeg, N. C. (1997). Generalization using imagery in mathematics. In L. D. English (Ed.), *Mathematical Reasoning: analogies, metaphors and metonymies in mathematics learning* (pp. 299-312). Mahwah, NJ: Erlbaum.

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Presmeg, N. C. (2008). An overarching theory for research in visualization in mathematics education. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/document/get/97

Presmeg, N. C. & Bergsten, C. (1995). Preference for visual methods: An international study. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the 19th PME International Conference*, 3 58-65.

Ramirez, R., Flores, P. y Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lleida. SEIEM.

Ramírez, R.; Flores, P. y Castro, E. (2012*)*. Habilidades de visualización manifestadas por los alumnos con talento matemático en tareas geométricas. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 11-26). Ciudad Real: SEIEM.

Rivera, F. D. (2011). Toward a visually-oriented school mathematics curriculum. Research, theory, practice, and issues. Dordrecht: Springer.

Roth, W. M. (2004). *Towards an anthropology of graphing: Semiotic and activity-theoretic perspectives*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Ryu, H., Chong, Y., Song, S. (2007). Mathematically gifted students spatial visualization abiltiy of solid figures. En *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for PME,* Vol. 4, pp. 137-144. Seoul: PME.

Sack, J. & Vazquez, I. (2008). Three-dimensional visualization: Children's non-convencional verbal representations. In O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlpeda, (Eds.), *Proceeding of the Joint Meeting 32nd Conference of the international Group for the psychology of Mathematics Education and the North American chapter XXX*, 4 (pp. 217-224). Morealia, Michoacán, México: PME.

Sánchez, F. (2011). Estrategias de resolución geométrica por insight. *II Encuentro AprenGeom*. Extraído el 3 de mayo de 2013 desde http://www.ciem.unican.es/node/836

Sinclair, M.P. (2003). The provision of accurate images with dynamic geometry. In N. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zillox (Eds.), *Proccedings of the 27th PME International Conference*, 4, 191-198.

Soto-Andrade, J. (2008). Mathematics as the art of seeing the invisible. *ICME11*. Plenary paper, Topic Study Group 20: *Visualization in the teaching and learning of mathematics*. Extraído el 16 de julio de 2008 desde http://tsg.icme11.org/ document/get/771

Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th PME International Conference*, 4, 225-232.

Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(2), 149-155.

Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Mathematik*, 83(1), 20-25.

White, P., & Mitchelmore, M. C. (2003). Teaching angle by abstraction from physical activities with concrete materials. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 403-410.

Woolner, P. (2004). A comparison of a visual-spatial approach and a verbal approach to teaching mathematics. In M. J. Hoines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th PME International Conference*, 4, 449-456.

Zazkis, R.; Dubinsky, E. & Dautermann, J. (1996). Using visual and analytic strategies: A study of students' understanding of permutation and symmetry groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 435-457.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (Eds.) (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics,* 19. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

REPRESENTACIÓN EXTERNA DE FIGURAS PLANAS Y RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO

External representation of plane figures and geometric thinking

Joxemari Sarasua

Dpto. de Didáctica de la Matemática y de las CC.EE.
Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea

Resumen

En este texto se analiza, en primer lugar, la posible conexión entre las destrezas de representación externa de figuras planas y el desarrollo de los niveles de razonamiento. Para ello se realizó un amplio estudio entre estudiantes de enseñanza obligatoria, bachillerato y universidad, cuyos resultados sugieren una respuesta positiva a la primera cuestión. Posteriormente, se formula una propuesta de nuevos descriptores para los niveles de razonamiento, en relación a la representación externa de figuras planas, que pueden contribuir a una mejor clarificación de aquellos y a una mayor integración curricular del modelo de Van Hiele

Palabras clave: *representación externa, descriptores de los niveles, figuras planas, organización curricular*

Abstract

In this article, firstly, a possible connection between external representation skills for plane figures and the development of thinking levels is studied. For this purpose, extensive research was carried out with compulsory education, secondary school and university students. Results suggest that students' representation skills improve progressively as they progress on their thinking level. Subsequently, a proposal for new level descriptors is formulated in relation to the external representation of plane figures. This proposal is expected to contribute to a better clarification and to a higher curricular integration of the Van Hiele model.

Keywords: *external representation, level descriptors, plane figures, curriculum arrangement*

Sarasua, J. (2013). Representación externa de figuras planas y razonamiento geométrico. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 43-65). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN

El modelo de Van Hiele (Michael T. Battista, 2007; Van Hiele, 1986) constituye probablemente el marco de referencia principal en el campo de la investigación en didáctica de la geometría. Gracias a él se ha conseguido modelizar el proceso mediante el cual los estudiantes adquieren los contenidos geométricos, caracterizando y jerarquizando diferentes modos de razonamiento. Esto ha propiciado nuevas propuestas de enseñanza de la geometría, con importante alcance también a nivel curricular, según las cuales la presentación de los contenidos conceptuales y la forma en que los estudiantes deben resolver los problemas progresarían a lo largo de los cursos según las características de los niveles (Gutiérrez, 2009; NCTM, 2003).

Se han señalado también ciertos vacíos relativos al modelo de Van Hiele, que sin embargo podrían ser debidos únicamente a la falta de interés por parte de los investigadores. Entre ellos caben señalar las escasas propuestas relativas al pensamiento geométrico en la etapa infantil (Clements, Swaminathan, Hannibal, & Sarama, 1999; Hershkowitz, 1990), la limitación a la geometría sintética (Dindyal, 2010; Weng San, 2010) o la necesidad de complementación desde otras perspectivas teóricas (Huerta, 1999; Pegg & Davey, 1998; Pegg, Gutiérrez, & Huerta, 1998). También se ha señalado (Sarasua, 2011) el inconveniente que supone no poder integrar en el modelo las competencias y los objetivos geométricos de aprendizaje, aspecto este que caracterizaría a un modelo integral de enseñanza y aprendizaje. En Sarasua (op. cit., 2011) se propone y aplica una metodología para, desde una perspectiva curricular, evaluar la potencialidad del modelo de VH para dar respuesta a los objetivos geométricos de aprendizaje. Tras categorizar los objetivos de aprendizaje correspondientes a las figuras planas, el autor utiliza dicha categorización a modo de evaluador externo para poner en relación los descriptores de los niveles con lo objetivos señalados. De este análisis concluye el autor la "fortaleza y la potencialidad del modelo […] para abordar la mayor parte de los objetivos geométricos" (Sarasua, op. cit. p. 314). No obstante, se evidencian ciertas áreas de baja definición, p. ej. en relación a cómo aparecen reflejadas las destrezas de representación externa entre los descriptores de los niveles. En concreto, se señala que:

> "i) No se hace referencia [entre los descriptores de los niveles] a habilidades relacionadas con los diversos mecanismos para reproducir figuras planas: colorear, calcar, dibujar a mano alzada, construir con material manipulativo (tangram, palillos, geobandas, etc.) o mediante programas de geometría dinámica. Se echa en falta una referencia específica a las destrezas de representación externa mediante instrumentos de dibujo, particularmente a las construcciones con regla y compás.
>
> ii) No se distingue entre a) dibujar copiando un modelo y b) dibujar en ausencia de modelo, p. ej. a partir de una descripción (o definición) verbal. Cabe suponer que ambas destrezas, de naturaleza distinta, han de corresponder a diferentes niveles de VH.
>
> iii) No se hace referencia a construir o dibujar a partir de elementos (constitutivos o secundarios) o a partir de propiedades (paralelismo, congruencia de ángulos, etc.). Esta distinción parece relevante, ya que de acuerdo al modelo de VH este tipo de representaciones implicarían un razonamiento analítico al menos de segundo nivel." (Sarasua, op. cit. p. 137)

El objetivo de este trabajo es estudiar la posible relación entre la adquisición de destrezas de representación externa y los niveles de VH para las figuras planas. En la literatura analizada solo se han encontrado referencias generales a esta posible relación (Corberán et al., 1994; Hoffer, 1981), insuficientes para asegurarla y, en su caso, caracterizarla. Ésta es una cuestión previa y, en principio, no trivial. En efecto, y aunque referido a un ámbito diferente, se ha sugerido que no existe relación entre los niveles de razonamiento y ciertas habilidades de visualización en geometría tridimensional (Saads & Davis, 1997a, 1997b). ¿Podría sugerirse lo mismo en relación a las destrezas de representación externa? Si, por el contrario, éstas se desarrollaran en paralelo a los niveles de razonamiento, sería de interés analizar el grado y las características de la imbricación entre ambas adquisiciones para posteriormente formular, si fuera posible, nuevos descriptores para los niveles. En este caso, los nuevos descriptores podrían ayudar a fijar mejor los límites de cada nivel, facilitar su comprensión y también servir como punto de partida para explorar posibles propuestas de mejora en otros contextos (geometría tridimensional, isometrías, etc.). Así mismo, si fuera posible secuenciar las destrezas de representación externa en función de los niveles, se podrían extraer consecuencias relevantes para el diseño curricular.

REFERENTES TEÓRICOS

Asumimos la distinción general aceptada, aun con algunos matices, por diversos autores (Duval, 1998; Hiebert & Carpenter, 1992; Kaput, 1987; Rico, 2009) entre representaciones externas (al individuo) y representaciones internas (o mentales). Entendemos por representación externa a una determinada configuración que reproduce, o *significa*, algo más. Dicha configuración puede, por ejemplo, "actuar en lugar de, ser interpretada como, estar ligada a, corresponder a, denotar, describir, encarnar, codificar, etiquetar, vincular a, significar, producir, referirse a, guardar similitud con, servir como metáfora de, indicar, querer decir, ser un sustituto de, sugerir o simbolizar aquello que representa" (Goldin, 2002, p. 208). Las segundas hacen referencia a la imagen o idea del objeto tal y como se presenta u opera en la mente del individuo (Hershkowitz, 1990; Vinner, 1983).

A principios del siglo pasado Poincaré (1902) señalaba las diferencias entre el *espacio geométrico*, que es continuo, infinito, tridimensional y homogéneo, y el *espacio representativo*, es decir, el marco de nuestras sensaciones y representaciones y que posee una triple dimensión: visual, táctil y motriz. Añadía que las "representaciones son solo la reproducción de nuestras sensaciones; no pueden, pues, colocarse sino en el mismo marco que ellas, es decir, en el espacio representativo. […] El espacio representativo no es más que una imagen del espacio geométrico, imagen deformada por una especie de perspectiva; y no podemos representarnos los objetos sin someterlos a las leyes de dicha perspectiva" (Poincaré, op. cit. p. 109).

Esta distinción es básica y la asumen diversos autores formulada en estos términos o en similares. Así Fischbein (1993) se refiere a la dualidad *figural/conceptual*, según la cual los objetos geométricos constan de una vertiente figural, ligada a la propia representación y a las operaciones que implica, y otra conceptual, que se deriva de la idea abstracta y formalizada propia de cualquier concepto. Laborde (2005), por su parte, distingue entre el *dominio teórico* de los objetos y sus relaciones y el *dominio gráfico-espacial* de las entidades gráficas sobre las que es posible ejecutar acciones físicas. A esta dualidad también se refiere Mesquita (1998) al hablar del "doble estatus de las representaciones externas": cuando se representa cierto objeto o relación geométrica, éste presenta dos dimensiones: a) como perteneciente a un conjunto finito de formas externas en su temporalidad espacial; b) como forma geométrica "ideal" independiente de cualquier corsé referido a su representación externa.

Según Rico (2009), las representaciones externas (signos o gráficos) son herramientas que hacen presente objetos matemáticos ausentes, confirmando de esta manera su ausencia, y que sirven a los individuos para interactuar con el conocimiento matemático, es decir, para registrar y comunicar su conocimiento en matemáticas: trabajando con las representaciones se asignan significados y se comprenden las estructuras matemáticas, de ahí su interés didáctico. El mismo autor señala la necesidad del empleo y juego combinado de diversos sistemas de representación externa, incluidas conversiones recíprocas, para captar en toda su complejidad los conceptos y estructuras matemáticas. Según él, cada uno de los modos de representación y las reglas que lo acompañan caracterizan de manera diferente los objetos representados, subrayando algunos aspectos o propiedades y encubriendo otros. Este fenómeno, que Rico denomina "dualidad univocidad-pluralidad", da pie a una serie de interrogantes que son de particular interés en educación matemática: "¿cómo seleccionar los sistemas de representación adecuados para cada concepto y en cada edad? ¿Cómo abordar determinadas dificultades de comprensión mediante el juego de las representaciones? ¿Cómo profundizar sobre los conceptos? ¿Qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?" (Rico, 2009, p. 11).

La adquisición de destrezas de representación (en adelante, si no se especifica lo contrario, nos estaremos refiriendo a las de tipo externo) es un elemento central en el aprendizaje de las matemáticas (NCTM, 2003, 2006; RS, 2001). El sentido de estas destrezas no se traduce solamente en exteriorizar gráficamente imágenes mentales o en reproducir con exactitud objetos geométricos; tampoco nos referimos a destrezas de construcción y de dibujo algorítmicas sin intervención del razonamiento matemático (no nos interesa ese tipo de destrezas mecánicas). Por el contrario, entendemos la representación como un medio privilegiado para el desarrollo del razonamiento geométrico en el sentido más amplio.

La representación de figuras va más allá del hecho constructivo en sí mismo o de la exteriorización de conceptos e imágenes conceptuales internas. Hoffer (1981) destaca la necesidad de desarrollar las habilidades de dibujo en cursos de geometría como actividad previa de preparación para que los estudiantes aprendan posteriormente relaciones geométricas: “el trabajo previo de construir con regla y compás ayuda a los estudiantes a entender las propiedades de las figuras. El uso de la cuadrícula ayuda a los estudiantes a realizar dibujos cuidados y satisfactorios de figuras en dos y tres dimensiones” (Hoffer, op. cit. p. 12). Añade además el autor que hay ocasiones en que tenemos mayor necesidad de realizar un dibujo de una situación geométrica que de demostrar un teorema.

En cuanto comunicación gráfica, el dibujo geométrico ocupa un lugar central en la resolución de problemas. Segun señalan Bravo, del Sol y Arteaga (2001), su aportación no se reduce únicamente a ilustrar o visualizar razonamientos durante el proceso de resolución, sino que “en muchas ocasiones resulta que un dibujo hecho acertadamente es lo que puede dar la idea sobre el empleo de un concepto o proposición matemática, o sobre la necesidad de trazar líneas auxiliares —regla heurística general de singular importancia en la solución de problemas geométricos— o de realizar una construcción adicional.“ (Bravo et al., op. cit. p. 12).

Para Alsina, Burgués y Fortuny (1988), el dibujo en geometría reviste un doble interés: “como lenguaje para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades y como finalidad de representación fiel y rigurosa” (Alsina et al., op. cit. p. 105). Consideran que “llegar a dominar materialmente los trazados con instrumentos de dibujo es un objetivo ineludible” en los niveles obligatorios de la enseñanza que se debe alcanzar “en forma progresiva pero persistente”. Precisan también que el objetivo último de los trazados con instrumentos de dibujo “no es tanto llegar a la representación perfecta como poner en juego el rigor y el orden con que proceder a realizar los trazados. No interesa tanto el «fin» como los «medios»” (Alsina et al., op. cit. pp. 105-106).

Battista (2008) señala los diversos usos que pueden tener las representaciones externas y los dibujos en particular: p. ej., ante una proposición, un estudiante de manera natural puede dibujar ejemplos, o contraejemplos, para entender el significado de la proposición y buscar “indicios” sobre su posible validez; puede dibujar un único ejemplo genérico que condense de alguna manera todos los elementos pertinentes de una determinada situación y de esta manera reducir su esfuerzo de reflexión y análisis sobre ese ejemplo particular.

Existe un interés extendido sobre las conexiones entre las representaciones mentales y las representaciones externas (Font, Godino, & D'Amore, 2007; Goldin, 1998, 2002; Hiebert & Carpenter, 1992; Janvier, 1987; Kaput, 1998; Vergnaud, 1998): “Para pensar y comunicar ideas matemáticas tenemos que representarlas de alguna manera. La comunicación requiere que la representación sea externa, adoptando la forma del lenguaje hablado, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos […]. Para pensar ideas matemáticas necesitamos representarlas internamente de tal forma que la mente pueda operar con ellas. Dado que las representaciones mentales no son observables, las discusiones sobre cómo las ideas se representan en el cerebro están basadas en niveles altos de inferencia” (Hiebert & Carpenter, 1992, p. 66).

Desde una perspectiva cognitiva, Duval (1998) se refiere a las “representaciones semióticas” como aquellas producciones constituidas por signos que pertenecen a un determinado sistema de representación, con sus leyes y sus limitaciones de significado y de funcionamiento. En la actividad matemática se movilizarían diversos registros de representación semiótica (figuras, gráficas, escritura simbólica, lenguaje natural, etc.) que adquieren un papel fundamental por ser la distinción entre objeto y representación un punto estratégico para la comprensión matemática. El autor afirma que las representaciones semióticas no son simplemente un medio de exteriorización de las representaciones mentales para hacerlas visibles o accesibles a los demás, sino que son igualmente esenciales para la actividad cognitiva del pensamiento. Entre las funciones cognitivas sobre las que operan las representaciones semióticas distingue, entre otras, la de "*objetivización* (expresión privada, con vistas a probar la validez ante uno mismo)" y la de "*comunicación* (expresión externa, para dar a conocer a los demás estructuras y operaciones mentales)" (Duval, 1998). Existiría, además, una relación bidireccional de reforzamiento mutuo entre el desarrollo de las representaciones externas ("semióticas") y las imágenes mentales de los objetos y conceptos.

Freudenthal (1983), sin embargo, muestra cierta cautela a la hora de establecer un vínculo operativo entre la destrezas de representación externa e interna de objetos geométricos. Afirma que dibujos imperfectos no pueden considerarse sin más como indicativos de objetos mentales defectuosos: "al contrario, esta manera de reproducir puede indicar una mejor visión de los objetos mentales que la reproducción por medio de la perspectiva adquirida por imitación" (Freudenthal, op. cit. p. 244). Esta aparente paradoja la explica refiriéndose a reproducciones de tipo simbólico o icónico: aun no guardando similitud "geométrica" con el original, puestas en contexto lo pueden representar sin ambigüedad y con fuerte poder de convicción. En efecto, una buena caricatura, p. ej., requiere una aguda capacidad de observación y puede sugerir un mayor parecido que un retrato figurativo mediocre.

También desde la psicología cognitiva, son interesantes las aportaciones de la *teoría de la tipicidad* (Mesquita, 1998), según la cual determinados elementos "típicos" de una categoría parecen ser percibidos por los individuos como "mejores" ejemplos que otros para representar la categoría a la que pertenecen (p. ej., una silla de cuatro patas es más "típica" que una silla de tres patas). En la misma línea debe analizarse la influencia que los juicios prototípicos (Hershkowitz, 1990), los distractores de orientación, los de configuración y, en general, las imágenes conceptuales y las concepciones erróneas de los objetos geométricos (Vinner & Hershkowitz, 1983) tienen en los procesos de construcción de conceptos y de sus representaciones.

Representación externa: material, soporte y herramientas

Alsina, Burgés y Fortuny (1988, p. 58) enmarcan la utilización instrumental de material de construcción en un diseño pedagógico que centra el aprendizaje en el paso de lo concreto a lo abstracto. Así, secuencian tres etapas de construcción: a) *etapa manipulativa*, de construcción material; b) *etapa representativa*, de construcción gráfica; y c) *etapa deductiva*, de construcción formal.

Así, hablamos de destrezas *manipulativas* en sentido clásico cuando operamos con objetos que son a la vez elementos físicos y modelos geométricos: construimos figuras recortando o plegando material; reproducimos figuras calcando un modelo; componemos o descomponemos figuras mediante palillos, tiras o material similar; creamos figuras con elementos elásticos sobre un geoplano; componemos con el tangram nuevas figuras a partir de otras, o bien las descomponemos, etc.

Según Clements y Battista (1992), la manipulación de objetos permite a los estudiantes poner a prueba sus ideas, examinarlas, reflexionar sobre ellas y modificarlas. Además la experiencia física parece alimentar el interés de los estudiantes, les ayudar a formular definiciones y conjeturas y contribuye a que adquieran la comprensión sobre nuevas relaciones geométricas. No obstante, señalan los autores, el uso de recursos manipulativos no es suficiente y no garantiza por sí mismo un aprendizaje significativo (la manipulación puede ser mecánica o memorística): "la naturaleza física [de los objetos manipulativos] no incorpora el significado de la idea matemática. Pueden usarse de manera mecánica […]. Los estudiantes pueden requerir materiales concretos para construir inicialmente el significado, pero deben *reflexionar sobre sus acciones* mientras los manipulan" (Clements, 1999, p. 47).

González y Larios (2001) señalan la importancia del plegado de papel como instrumento para desarrollar el razonamiento geométrico y como herramienta de descubrimiento en geometría. Esto es así especialmente en Primaria y en los niveles iniciales de Enseñanza Media, cuando el estudiante necesita percibir las propiedades geométricas de manera más plástica e intuitiva que rigurosa. En este sentido los autores destacan el carácter dinámico y accesible (de rápido aprendizaje) de la manipulación y plegado de papel frente al uso de la regla y el compás, cuyos trazos carecen de dinamismo.

Las destrezas *gráficas* representan un salto en cuanto a pensamiento geométrico, ya que el modelo físico es sustituido por una representación, generalmente visual y bidimensional, de carácter abstracto y "no-concreto". Entre esas representaciones es necesario diferenciar, al menos, entre las construcciones "clásicas" con regla y compás y las construcciones mediante otros instrumentos de dibujo, o incluso de medición. Diferenciar entre los tipos de instrumentos de dibujo está justificado (a) por las diferentes formas de razonar geométricamente que corresponde a cada uno de los tipos, (b) por la diferente naturaleza de la representación que se quiera obtener (precisa o aproximada), (c) por los diferentes valores propedéuticos (p. ej., se pueden derivar propiedades algebraicas importantes del estudio de las construcciones con regla y compás) y (d) por el tratamiento curricular diferenciado que reciben.

Aprender a utilizar la regla y el compás resulta de particular importancia para aclarar la distinción entre la exactitud teórica y la experiencia práctica: "El trabajo correcto con regla y compás da por resultado figuras teóricamente exactas, mientras que el uso del transportador, p. ej., introduce inevitablemente el error en la construcción buscada. El hecho de que la construcción práctica con regla y compás no sea perfecta (desde que la regla y el compás materiales dan lugar a errores en la construcción), no le resta valor. En el mundo ideal de los objetos geométricos, la construcción con un compás y regla ideal es exacta. En tanto que toda construcción dependiente de la medida será intrínsecamente imprecisa." (Bressan, Bogisic, & Crego, 2000, p. 58).

Se ha señalado la importancia de que los estudiantes de entre 11 y 14 años (*Key Stage 3*, en el sistema educativo del Reino Unido) sepan "distinguir entre la imprecisión de construcciones por medio de la regla y transportador y la 'exactitud teórica' que proporcionan las construcciones estándar solo con regla y compás" (RS, 2001, p. 49). En estos casos el razonamiento geométrico que debe acompañar a las construcciones puede mostrar a los alumnos, p. ej., la razón por la que funciona el método de construcción de la mediatriz de un segmento o el de la bisectriz de un ángulo.

METODOLOGÍA

La investigación consta de dos partes: por un lado, se identifica el nivel y grado de adquisición predominante de VH de cada uno de los individuos de una muestra representativa compuesta por 523 estudiantes desde Primaria hasta la Universidad; por otro lado, se estudian las destrezas de representación que esos mismos individuos manifiestan. Los datos de cada individuo se cruzarán con el fin de encontrar posibles patrones comunes, o pautas que se repiten, entre las destrezas de representación y el nivel de VH en relación a las figuras planas. Estas dos partes se concretan a continuación.

Identificación del vector de los grados de adquisición de los niveles de VH

Se parte de los datos obtenidos en un estudio previo sobre la prevalencia de los niveles de razonamiento entre estudiantes de las diversas etapas educativas (Sarasua, Ruiz de Gauna, & Arrieta, 2013). A cada individuo de esta muestra se le asigna un vector con los grados de adquisición de cada nivel según el paradigma propuesto por Gutiérrez, Jaime y Fortuny (1991). Para hacer operativo el cruce de datos, se fija posteriormente un nivel y un grado de adquisición predominante para cada individuo (Sarasua et al., 2013).

Evaluación de las destrezas de representación

A continuación, se trataría de analizar el tipo de destrezas de representación que corresponderían a cada nivel, si es que hubiera tal correspondencia. Para ello, se llevó a cabo un trabajo de campo sobre la misma muestra de estudiantes de los que se había determinado el nivel y grado predominantes de VH.

Los autores no tienen conocimiento de la existencia de ningún cuestionario diseñado para evaluar las destrezas de representación que se adapte a las características de esta investigación, por lo que se optó por diseñar un cuestionario especifico. Para ello, se elaboró una batería de 61 ítems, o tareas de representación lo más significativas posibles, organizadas de acuerdo a los siguiente aspectos: (i) objetivos didácticos; (ii) materiales, soportes e instrumentos de representación y (iii) modo de construcción. Cada ítem corresponde a una o varias destrezas de representación.

A pesar de las restricciones del cuestionario escrito, se pudo incorporar un buen número de ítems manipulativos (plegar, recortar y calcar). Las construcciones sobre geoplano se sustituyeron por trazados a mano alzada sobre cuadrícula. Se incluyó también un conjunto amplio de ítems para dibujar a mano alzada y mediante diversos instrumentos de dibujo o de medición. Se acompaño cada cuestionario de un estuche con el siguiente material: lapicero, goma de borrar, tijeras pequeñas, pegamento de barra, regla, compás y transportador.

A partir de la batería general de ítems, se elaboraron siete cuestionarios distintos adaptados a los diferentes cursos o etapas educativas: A1, A2, B1, B2, C1, C2 y D. Dicha adaptación se realizó asignando a la resolución de cada ítem un nivel de VH teórico (o varios niveles en los casos habituales de asignación incierta o de ítems que podían ser respondidos de acuerdo a diferentes niveles). Esta asignación teórica se realizó extrapolando de los descriptores generales de los niveles información que pudiera relacionarse con destrezas de representación (Corberán et al., 1994).

Excepto para el cuestionario D, a cada grupo-clase de estudiantes se le administraron simultáneamente dos variantes X1 y X2, con X=A, B o C: i.e., a la mitad de la clase se le administró aleatoriamente el modelo X1, y a la otra mitad el X2. Ambos modelos, X1 y X2, constan de ítems diferentes pero complementarios y equivalentes en cuanto al nivel de VH esperado. La razón de administrar cuestionarios distintos fue poder evaluar un número mayor de ítems (y, por tanto, de destrezas); en contrapartida, hubo que tomar una muestra más amplia de individuos. En la Tabla 1 se muestra la distribución de ítems según los cuestionarios.

Tabla 1. Distribución de los ítems según los cuestionarios

Cuestionario	Etapa o curso	Nivel de VH esperado	% de ítems de nivel esperado 1	% de ítems de nivel esperado 2	% de ítems de nivel esperado 3
A1	Primaria	1	50%	30%	20%
A2					
B1	ESO	1-2	35%	45%	20%
B2					
C1	Bachillerato y 2º Magisterio	2-3	20%	40%	40%
C2					
D	3º de Magisterio	2-3	0%	70%	30%

Antes de la administración definitiva, se realizó una prueba piloto en varios centros. Tras esta prueba se introdujeron algunas mejoras, particularmente en los siguientes aspectos:

- Diferenciación entre métodos de construcción algorítmicos memorizados de aquellos donde intervenía el razonamiento matemático. Se añadió esta pregunta en numerosos ítems:

  ¿Habías estudiado este procedimiento con anterioridad?

  ☐ Sí *☐ No*

  Si la respuesta ha sido afirmativa, ¿te acordabas de él?

  ☐ Sí *☐ No*

- Especificación de los instrumentos de dibujo utilizados (en ciertos casos habría sido más complicado averiguarlo del análisis directo del trazado).

- Se preguntó a los individuos sobre sus creencias acerca de la necesidad de utilizar ciertos instrumentos de dibujo. P. ej.:

  Marca con una X la opción que creas correcta para este ejercicio:

  ☐ NO es necesario usar el compás, con la regla es suficiente.

  ☐ ES necesario usar el compás, con la regla NO es suficiente.

Administración de los cuestionarios

Dado el amplio número de ítems a evaluar, se consideraron los cursos alternos a partir 6º de Primaria: 6º de Primaria, 2º de ESO, 4º de ESO, 2º de Bachillerato y Universidad. No se consideraron los dos primeros ciclos de Primaria, entre otras razones, por la ausencia de instrumentos fiables para la identificación de los niveles de VH a esas edades.

Se buscó que los centros donde se administraran los cuestionarios fueran mixtos y estuvieran situados en entornos de características socioeconómicas heterogéneas. También se quiso que la muestra incluyera tanto colegios públicos como privados. A cada grupo se le administró el cuestionario en el idioma en que cursaban la asignatura de Matemáticas: vasco o español.

El trabajo de campo se desarrolló en el País Vasco: en tres centros públicos de Bizakia (uno de Primaria y dos de Primaria, ESO y Bachillerato), en tres privados de Bizkaia (los tres de Primaria, ESO y Bachillerato) y en la Escuela de Magistero de Vitoria-Gasteiz. El número total de individuos de la muestra fue 523. Como se ha dicho anteriormente, el estudio consistió en la administración de dos cuestionarios (el test de identificación de VH y el específico de representación de figuras) en dos sesiones de 50´ cada una con un intervalo máximo de una semana entre ambas. Los investigadores estuvieron presentes en todas las sesiones para aclarar dudas.

Evaluación de los cuestionarios de representación: correspondencia con los niveles de VH

Se pretende estudiar si existe *correspondencia* entre el progreso de los niveles de razonamiento y de las destrezas de representación. Se entenderá por *correspondencia* que destrezas de representación se desarrollen de manera creciente, progresiva, continua (sin saltos inversos) y paralelamente a la adquisición de los niveles de razonamiento (y, aún mejor, dentro de cada nivel en paralelo al progreso del grado de adquisición). Si esto fuera así, se fijarán los límites de esa relación y se intentará determinar qué tipo de destrezas de representación caracterizan cada nivel de razonamiento.

Tras codificar lo datos con SPSS (v. 15), se analizó qué ítems eran capaces de resolver (y cómo los resolvían) los estudiantes pertenecientes a un mismo nivel y grado de adquisición predominante. Se determinó la siguiente tabla para cada ítem (Tabla 2):

Tabla 2. Correspondencias entre las respuestas para cada ítem y los niveles y grados de adquisición

			Respuestas al ítem en %		
			Correctas	**Incorrectas**	**En blanco**
Nivel 1	**Grado**	**bajo**	a_1	a'_1	a''_1
		medio	a_2	a'_2	a''_2
		alto	a_3	a'_3	a''_3
	Total del nivel		a	a'	a''
Nivel 2	**Grado**	**bajo**	b_1	b'_1	b''_1
		medio	b_2	b'_2	b''_2
		alto	b_3	b'_3	b''_3
	Total del nivel		b	b'	b''
Nivel 3	**Grado**	**bajo**	c_1	c'_1	c''_1
		medio	c_2	c'_2	c''_2
		alto	c_3	c'_3	c''_3
	Total del nivel		c	c'	c''

Para que la destreza de representación asociada a determinado ítem (o su carencia) se considerara como característica de cierto nivel de razonamiento, se requirió como normal general que se verificaran las condiciones siguientes:

a) Que se observara una relación clara entre dicha destreza y el nivel de razonamiento: i.e., que aumente de forma progresiva el número de respuestas correctas a medida que aumenta el nivel de razonamiento de los estudiantes (a mayor nivel, mayor porcentaje de respuestas correctas), sin saltos hacia atrás entre niveles, y también dentro de cada nivel a medida que aumenta su grado de adquisición. I.e., con respecto a los valores de la tabla:

$$a\leq b\leq c,\ a'\geq b'\geq c'\ ;\ a_i\leq a_{i+1},\ b_i\leq b_{i+1},\ c_i\leq c_{i+1} \text{ y } a'_i\geq a'_{i+1},\ b'_i\geq b'_{i+1},\ c'_i\geq c'_{i+1}\ ,\forall i=1,2$$

Se tuvieron en cuenta los casos particulares en que la progresión se interrumpía entre los grados de adquisición de un mismo nivel y esa interrupción era despreciable o podía explicarse por alguna deficiencia de la muestra (p. ej., por ser insuficiente el conjunto de estudiantes de alguno de los grados del nivel).

b) Llamando y al porcentaje de respuestas correctas a un cierto ítem, para que su destreza asociada correspondiera al nivel x, se requirió, en este orden:

- que x fuera el primer nivel en el que $y\geq 75\%$ como media del nivel (en los niveles superiores a x también se superará el 75%), i.e., como media entre todos los estudiantes del nivel x en sus tres grados de adquisición (bajo, alto y medio).

O si esto no se cumpliera:

- que x fuera el primer nivel en el que $60\%\leq y<75\%$ como media del nivel (en los niveles superiores a x también se superará el 75%), i.e., como media entre todos los estudiantes del nivel x en sus tres grados de adquisición (bajo, alto y medio), y además que $y\geq 80\%$ para los estudiantes de nivel x con grado de adquisición alto.

Para formularlo negativamente (i.e., la carencia de dicha destreza como característica de nivel), se requirió que a lo sumo un 25% de los estudiantes del nivel fueran capaces de responder correctamente el ítem. Todos estos criterios están sintetizados en la Tabla 3.

Tabla 3. Criterios para decidir si una destreza es característica o no de cierto nivel

<table>
<tr><td></td><td colspan="3">Ítem – Destreza</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td colspan="3">y = % de respuestas correctas a cierto ítem</td><td>Característica</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Nivel x</td><td>1^{er} criterio</td><td>y≥75%</td><td>Media del nivel x (adquisición baja, media y alta)</td><td rowspan="3">Positiva del nivel x</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2º criterio</td><td rowspan="2">60%≤y<75%
∧
y≥80%</td><td>Media del nivel x (adquisición baja, media y alta)</td></tr>
<tr><td>Media de la adquisición alta del nivel x</td></tr>
<tr><td colspan="3">y≤25%</td><td>Negativa del nivel x</td></tr>
</table>

RESULTADOS

En las Figuras 1, 2, 3 y 4 se muestran, a modo de ejemplo, respuestas a algunos de los ítems.

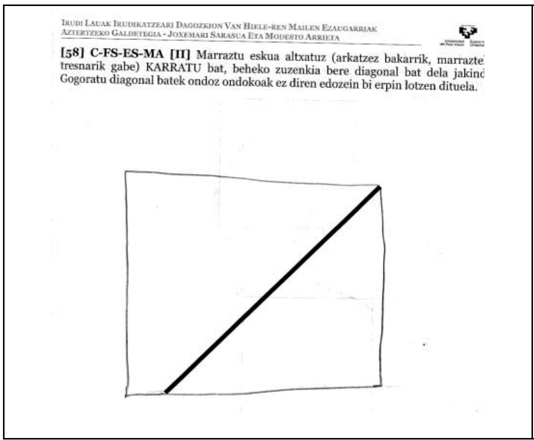


Figura 1. Ítem 58: cuadrado dibujado a mano alzada a partir de una diagonal dada

Figura 2. Ítem 6: construcción de un polígono mediante doblado de papel

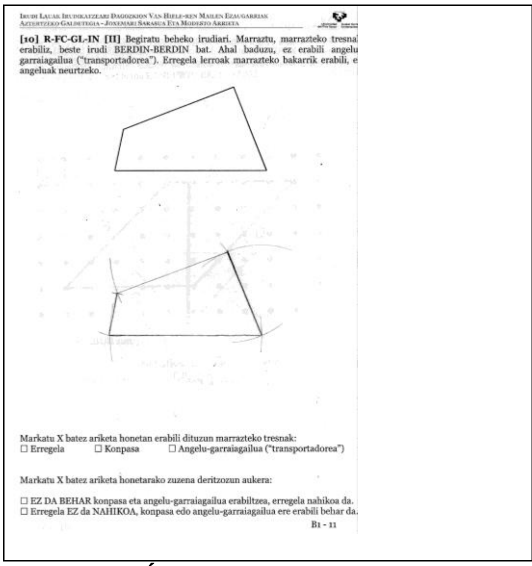


Figura 3. Ítem 10: reproducción de un cuadrilátero dado (con regla y compás)

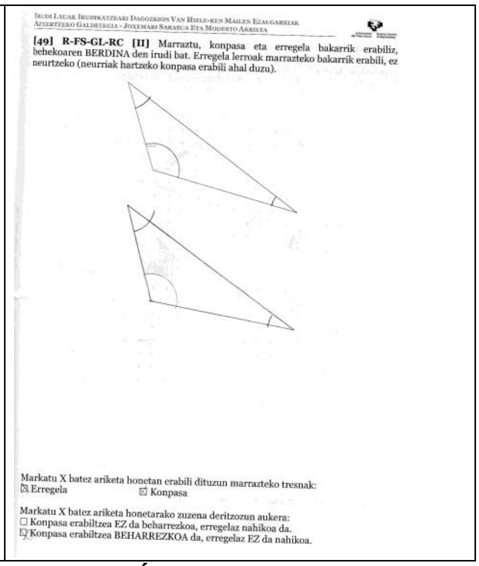


Figura 4. Ítem 49: uso (irrelevante) del compás para reproducir un triángulo dado

En la Tabla 4 se ofrecen de forma sintética los resultados cuantitativos porcentuales de todos los ítems evaluados. Se muestra para cada ítem:

a) Sus características generales según las siguientes categorías:
   - Material, soporte o instrumentos utilizados (Mat.):
     - MP: actividades manipulativas (recortar, doblar, calcar, pegar)
     - TR: dibujo a mano alzada sobre una cuadrícula
     - MA: dibujo a mano alzada sobre papel en blanco
     - IN: con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador)
     - RC: solo con regla y compás
   - Modo de construcción (Mod1/Mod2):
     - R: dado un modelo, reproducir globalmente (GL)
     - C: creando globalmente a partir de una definición (GL), a partir de elementos básicos (EB), como lados o ángulos, o a partir de elementos secundarios (ES), p. ej. diagonales
     - CR: comprobar propiedades o relaciones geométricas simples (SI) o complejas (CO)
   - Tipos de figuras (Fig.):
     - FS: figuras simples (triángulos, rectángulos, cuadrados)
     - FC: figuras complejas (resto de cuadriláteros y otros polígonos)

b) Destreza que se pretende evaluar.

c) Resultados cuantitativos de la evaluación. Para el conjunto de estudiantes de cada nivel de VH que han contestado a un determinado ítem:

- Número de estudiantes de cada nivel que han respondido (correcta o incorrectamente) al ítem. Se excluyen las respuestas en blanco o nulas.
- Porcentaje de respuestas correctas al ítem. El resto corresponde a respuestas negativas.

Los números precedidos por (a) se refieren al tamaño de la muestra y al porcentaje de respuestas correctas limitados a los estudiantes con un grado de adquisición alta del nivel correspondiente.

Tabla 4. Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	**% correcto**	**tamaño muestra**	**% correcto**	**tamaño muestra**	**% correcto**
i_19	IN	C	FS	EB	Dado un cateto “inclinado”, es capaz de dibujar un triángulo rectángulo con instrumentos de dibujo.	16	**24%**	40	**53%**	27	**85%**
i_23	IN	C	FS	ES	Dada una diagonal “horizontal”, es capaz de dibujar un cuadrado con instrumentos de dibujo.	15	**0%**	52	**17%**	16	**31%**
i_32	IN	C	FC	GL	Es capaz de dibujar un pentágono con los lados iguales usando instrumentos de dibujo a partir de su definición.	72	**11%**	82	**20%**	26	**42%**
i_27	IN	C	FC	EB	Dados un lado “inclinado” y la definición, es capaz de dibujar un paralelogramo no rectángulo con instrumentos de dibujo.	63	**5%**	86	**16%**	58	**43%**
i_15	IN	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las bisectrices de un triángulo intersecan en un punto) mediante instrumentos de dibujo.	79	**13%**	99	**25%**	17	77%
i_16	IN	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las mediatrices de un triángulo intersecan en un punto) mediante instrumentos de dibujo.	71	**11%**	78	**18%**	73 (a) 8	**70%** (a) **88%**
i_13	IN	R	FS	GL	Dado un cuadrado, es capaz de dibujar otro igual mediante instrumentos de dibujo.	56	**2%**	41	**12%**		
i_10	IN	R	FC	GL	Si se le muestra un cuadrilátero no trapecio es capaz de dibujar otro igual con instrumentos de dibujo.	63	**10%**	47	**19%**		
i_60	MA	C	FS	GL	Dada la definición de triángulo isósceles, es capaz de dibujarlo a mano alzada.	56	**91%**	42	**100%**		
i_4	MA	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada a partir de su nombre y de su definición.	64	**64%**	47	77%		
i_18	MA	C	FS	EB	Dado un lado “inclinado”, es capaz de dibujar un rectángulo no cuadrado a mano alzada.	74	**32%**	82 (a) 9	**65%** (a) **82%**	29	**86%**
i_21	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal “vertical” y su definición, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada.	64	**22%**	47	**51%**	39 (a) 6	**69%** (a) **83%**
i_21a	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal “vertical” y su definición, es capaz de dibujar un cuadrilátero que tiene dicha diagonal.	64	**75%**	47	**92%**		
i_58	MA	C	FS	ES	Dado una diagonal “inclinada” y su definición, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada.	57	**54%**	41	**76%**	38	**87%**
i_58a	MA	C	FS	ES	Dada una diagonal “inclinada” y su definición, es capaz de dibujar un cuadrilátero que tiene dicha diagonal.	57	**75%**	41	**83%**		
i_44	MA	R	FC	GL	Es capaz de reproducir a mano alzada un pentágono no estándar en presencia de su modelo.	63	**86%**	47	**89%**		

Tabla 4 (continuación). Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	**% correcto**	**tamaño muestra**	**% correcto**	**tamaño muestra**	**% correcto**
i_6	MP	C	FC	GL	Es capaz de construir un polígono cualquiera mediante doblado de papel a partir de su nombre y de su definición.	58	**86%**	42	**95%**		
i_31	MA	C	FC	ES	Es capaz de dibujar a mano alzada un hexágono a partir de una diagonal y un ángulo y dada su definición.	15	**53%**	52 (a) 10	**69%** (a) **83**	16	**81%**
i_11	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto) mediante doblado de papel.	79	**41%**	99	**75%**	17	**88%**
i_35	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un trapecio suman 360º) recortando con tijeras.	58	**81%**	42	**86%**		
i_61	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo llano) recortando con tijeras.	64	**75%**	47	**92%**		
i_54	MP	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad (los ángulos interiores de un triángulo suman un ángulo llano) doblando el papel.	74	**23%**	82	**31%**	29	**45%**
i_2	MP	R	FC	GL	Dado un polígono "no estándar" es capaz de reproducir otro igual calcando.	49	**98%**				
i_43	MP	R	FC	GL	Dado un modelo (polígono "no estándar") es capaz de construir una figura similar doblando papel.	64	**64%**	47	**70%**		
i_43a	MP	R	FC	GL	Es capaz de reproducir globalmente, a partir de una figura que se le ha mostrado como modelo y mediante doblado de papel, otra figura no idéntica pero sí con el mismo número de lados y ángulos, que aparecen bien definidos, aun cuando la métrica de estos elementos o su relación proporcional pueda no corresponder exactamente con modelo.	40	**88%**	14	**89%**		
i_8	RC	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un rectángulo sólo con regla y compás	15	**7%**	51	**8%**	60	**37%**
i_9	RC	C	FS	GL	Es capaz de dibujar un triángulo equilátero sólo con regla y compás a partir de su nombre y de su definición.	64	**48%**	73	**62%**	27	**85%**
i_14	RC	C	FS	EB	Es capaz de dibujar un cuadrado sólo con regla y compás a partir de un lado de cierta medida que se le enuncia pero no se le dibuja.	49	**2%**	33	**0%**	45	**42%**
i_50	RC	C	FC	ES	Dada la diagonal menor (horizontal) y la medida de la mayor, es capaz de dibujar un rombo sólo con regla y compás.	55	**13%**	40	**10%**	46 (a) 6	**61%** (a) **100%**
i_51	RC	C	FC	EB	Dados tres vértices, es capaz de dibujar un paralelogramo sólo con regla y compás.	16	**13%**	40	**25%**	27 (a) 2	**63%** (a) **100%**

Tabla 4 (continuación). Respuestas a los ítems en función del nivel predominante de razonamiento

Ítem	Mat.	Mod1	Fig.	Mod2	Destreza a evaluar	nvh-1		nvh-2		nvh-3	
						tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto	tamaño muestra	% correcto
i_53	RC	C	FC	GL	Dada la definición, es capaz de dibujar un hexágono regular sólo con regla y compás.	133	**9%**		**nulo**		**nulo**
i_39	RC	CR	SI		Es capaz de comprobar una propiedad (igualdad de lados de un paralelogramo) usando regla y compás.	16	**81%**	40	**75%**	27	**96%**
i_49	RC	R	FS	GL	Dado un triángulo obtusángulo, es capaz de dibujar otro igual sólo con regla y compás.	63	**13%**	47	**23%**	45	**76%**
i_48	RC	R	FC	GL	Dado un rombo, es capaz de dibujar otro igual con regla y compás.	55	**9%**	41	**19%**	46	**83%**
i_59	TR	C	FS	EB	Dado un lado en posición “horizontal”, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	58	**91%**	42	**100%**		
i_17	TR	C	FS	EB	Dado un lado “inclinado” y la definición de cuadrado, es capaz de dibujar un cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	79	**87%**	99	**90%**	17	**94%**
i_7	TR	C	FS	GL	Es capaz de dibujar una triángulo obtusángulo a mano alzada sobre una cuadrícula a partir de su nombre y de su definición.	57	**59%**	42	**83%**		
i_28	TR	C	FC	ES	Dada una diagonal “inclinada” y la definición, es capaz de dibujar un trapecio no rectángulo a mano alzada sobre una cuadrícula.	74	**10%**	82	**37%**	29	**76%**
i_24	TR	C	FC	EB	Dado un lado y la definición, es capaz de dibujar un rombo no cuadrado a mano alzada sobre una cuadrícula.	79	**67%**	98	**81%**	17	**94%**
i_41	TR	CR		SI	Es capaz de comprobar y razonar una propiedad elemental (igualdad de lados paralelos en un paralelogramo) midiendo puntos sobre una cuadrícula.	63	**25%**	47 (a) 10	**68%** (a) **80%**	35	**91%**
i_42	TR	CR		CO	Es capaz de comprobar y razonar una propiedad no elemental (las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio) midiendo puntos sobre una cuadrícula.	58	**9%**	42	**24%**	31	**77%**
i_3	TR	CR		CO	Es capaz de comprobar una propiedad compleja (el teorema de Pitágoras) sobre una cuadrícula.	70	**3%**	98	**2%**	17	**18%**
i_1	TR	R	FC	GL	Dado un heptágono “no estándar” es capaz de dibujar otro igual a mano alzada sobre una cuadrícula.	64	**83%**	47	**92%**		

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y PROPUESTA DE NUEVOS DESCRIPTORES PARA LOS NIVELES DE VH

Los resultados obtenidos sugieren que existe correspondencia entre el desarrollo de las destrezas de representación consideradas y los niveles de VH; esta correspondencia también se manifestaría según los grados de adquisición de cada nivel. I.e., a medida que progresa el nivel de VH, y dentro de cada nivel su grado de adquisición, progresan también las destrezas de representación de los estudiantes, más concretamente las relativas a: i) representaciones de figuras planas mediante plegado de papel, recorte con tijeras y calcado; ii) dibujos a mano alzada sobre cuadrícula o sobre papel en blanco; iii) dibujos con regla, compás y transportador o de precisión con solo regla y compás; iv) la comprobación manipulativa o gráfica de ciertas propiedades y relaciones, elementales y complejas, de figuras planas o de sus elementos.

Cabe plantearse, por tanto, la caracterización, aunque sea parcial, de los niveles de VH en términos de las formas de razonar geométricamente correspondientes a la representación.

Agrupando destrezas de características similares e induciendo de ellas descriptores de validez más general, se ha sintetizado la siguiente propuesta final de descriptores de nivel para la de representación (Tablas 5, 6 y 7). Dada la naturaleza jerárquica de los niveles, cuando un descriptor formulado negativamente corresponda a cierto nivel, se debe entender que también corresponde negativamente a los niveles inferiores, cuando éstos existan.

Tabla 5. Descriptores de **NIVEL 1** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Manipulativo	• Es capaz de reproducir una figura plana calcándola o de construirla globalmente mediante doblado de papel en presencia de un modelo o dada una definición comprensible.	6, 43a, 2
	• Es capaz de comprobar algunas propiedades simples (p. ej. sumas de ángulos interiores de figuras planas) recortando con tijeras, pero no mediante doblado de papel.	35, 54, 61
Sobre cuadrícula	• Es capaz de reproducir sobre una cuadrícula una figura plana en presencia de un modelo o una figura plana identificable dado algún elemento básico suyo: p. ej. un cuadrado dado un lado, horizontal o inclinado.	1, 17, 59, 24
	• No es capaz de comprobar y razonar propiedades elementales (p. ej., igualdad de lados paralelos en un paralelogramo) ni otras no elementales (p. ej. que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio) contando unidades sobre una cuadrícula.	41, 42
A mano alzada	• Es capaz de dibujar globalmente a mano alzada una figura plana en presencia de un modelo o dada una definición comprensible.	4, 44, 60
	• Es capaz de dibujar a mano alzada algunas figuras (p. ej. cuadriláteros no cuadrados) a partir de elementos secundarios (p. ej., una diagonal).	21, 21a, 58, 58a
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	• Es capaz de comprobar propiedades simples (p. ej. igualdad de lados en un paralelogramo) usando regla y compás.	39
	• No es capaz de dibujar con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador) figuras planas en general, incluidos cuadriláteros, ni a partir de su definición, ni a partir de sus elementos y de la definición de éstos, ni en presencia de un modelo. Utiliza para dibujar solo la regla, y no creen que sea necesario el uso efectivo ni del compás ni del transportador.	19, 23, 32, 27, 13, 10, 8, 14, 14a, 50, 51, 53, 49, 48

Tabla 6. Descriptores de **NIVEL 2** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Manipulativo	• Es capaz de comprobar mediante doblado de papel ciertas propiedades no inmediatas (p. ej. que las bisectrices de un triángulo se cortan en un punto).	11
Sobre cuadrícula	• Es capaz de dibujar algunas figuras (p. ej. un triángulo obtusángulo) a mano alzada sobre una cuadrícula dado su nombre y su definición. Sin embargo, tiene dificultades para dibujar sobre una cuadrícula figuras más complejas a partir de elementos secundarios (p. ej. un trapecio dada una diagonal).	7, 28
	• Es capaz de comprobar y razonar, contando unidades sobre una cuadrícula, propiedades elementales (p. ej. igualdad de lados paralelos en un paralelogramo), pero no propiedades más complejas (p. ej. que las diagonales de un paralelogramo se cortan en el punto medio o el teorema de Pitágoras).	41, 42, 3
A mano alzada	• Es capaz de dibujar a mano alzada figuras sencillas a partir de sus elementos, básicos o secundarios, con alguna limitación con respecto a la posición de éstos (p. ej. dibuja un cuadrado a partir de su diagonal en posición prototípica).	4, 21, 58a, 18, 31
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	• No es capaz de dibujar con instrumentos de dibujo (regla, compás y transportador) figuras planas en general, incluidos cuadriláteros, ni a partir de su definición, ni a partir de sus elementos y de la definición de éstos, ni en presencia de un modelo. • No es consciente de los requerimientos del dibujo de precisión con regla y compás. Utiliza para dibujar solo la regla y no cree necesario el uso ni del compás ni del transportador.	23, 32, 27, 13, 10, 8, 14, 14a, 50, 51, 49, 48
	• No es capaz de comprobar mediante instrumentos de dibujo propiedades no inmediatas (p. ej. que bisectrices y mediatrices de un triángulo intersecan en un punto).	15, 16

Tabla 7. Descriptores de **NIVEL 3** referidos a destrezas de representación externa de figuras planas

Modo	Descriptor	Ítems
Sobre cuadrícula	• Es capaz de comprobar y razonar, contando unidades sobre una cuadrícula, ciertas propiedades elementales y no elementales (p. ej. igualdad de lados paralelos en un paralelogramo o que sus diagonales se cortan en el punto medio). • No es capaz de comprobar sobre una cuadrícula el teorema de Pitágoras.	41, 42, 3
Con instrumentos de dibujo (R/C o R/C y transportador)	• Es consciente de la naturaleza y de los requerimientos del dibujo de precisión con regla y compás. • Es capaz de dibujar algunas figuras (triángulos en general, paralelogramos no rectángulos y rombos no cuadrados) mediante regla y compás a partir de su definición, dado un modelo o a partir de elementos suyos (diagonales, vértices, lados). Tiene dificultades con los rectángulos, probablemente por falta de destreza para dibujar ángulos rectos con regla y compás.	9, 19, 48, 49, 53
	• Es capaz de comprobar mediante instrumentos de dibujo propiedades no inmediatas (p. ej. que bisectrices y mediatrices de un triángulo intersecan en un punto).	15, 16

Se ordenan a continuación las destrezas de representación analizadas en relación a los niveles de VH:

i) Las destrezas manipulativas de construcción global (plegado de papel, calco, recorte con tijeras) se desarrollan en su práctica totalidad a lo largo del 1º nivel. Como cabía esperar, el razonamiento geométrico que las acompaña es de carácter visual, basado en la percepción e identificación global de las figuras como unidades que carecen de elementos y propiedades significativas. Sin embargo, con el apoyo de instrumentos manipulativos sencillos, como p. ej. unas tijeras, el estudiante es capaz de iniciarse ya desde el 1º nivel en procesos de comprobación o de formulación de conjeturas sobre propiedades simples (p. ej., la suma de ángulos interiores de un triángulo o de un cuadrilátero), al mismo tiempo que descompone las figuras en partes y puede reflexionar sobre sus propiedades. Este aspecto parece importante también por su recorrido didáctico, no solo como característica de identificación de nivel. La comprobación manipulativa de otras propiedades no inmediatas corresponde al 2º nivel de VH.

ii) Las destrezas de representación a mano alzada sobre cuadrícula y papel en blanco se desarrollan progresivamente entre los dos primeros niveles. Influyen aspectos como, p. ej., si se parte de un modelo para reproducir (1º nivel), o se da una definición comprensible de la figura (1º nivel), o un elemento básico de ella, p. ej. un lado, (1º nivel); o por el contrario si se trata de dibujar a partir de elementos secundarios (p. ej. una diagonal), aunque con ciertas limitaciones según la posición u orientación de éstos (2º nivel). Un estudiante de 2º nivel muestra dificultades para dibujar, tanto a mano alzada como sobre cuadrícula, figuras más complejas a partir de elementos secundarios

(p. ej., un trapecio dada una diagonal). Este tipo de dibujos pueden requerir de razonamiento analítico en diverso grado, dependiendo del tipo de propiedades o partes de las figuras sobre las que se basen; no obstante, éste puede estar ya implícito en el 1º nivel, puesto que el estudiante lo utiliza para dibujar ciertas figuras a partir de algunos de sus componentes. Otras veces, sin embargo, puede no ser necesario: p. ej. cuando se reproducen formas en presencia de un modelo o algunas figuras conocidas (cuadrados, triángulos equiláteros, etc.) a partir de una definición comprensible. En estos casos, en el 1º nivel las representaciones son globales y con características que reflejan un razonamiento puramente visual: polígonos con lados curvos, ángulos redondeados o sin vértices, cuadrados de lados y ángulos desiguales, etc. Los distractores de posición y, en general, las imágenes prototípicas que tienen formadas los estudiantes influyen también en la relación entre las destrezas de representación a mano alzada y el nivel de VH.

iii) Las destrezas que implican el uso de la regla y el compás comienzan a mostrarse de forma relevante en el primer nivel (p. ej., para comprobar propiedades muy sencillas), de lo que se deduce que los estudiantes pueden dominar los rudimentos de su manejo desde muy pronto. Desde los primeros niveles también pueden *manejar* algorítmicamente la regla y el compás (destrezas de uso mecánico, sin razonamiento matemático). Otra cuestión es sentir su necesidad o comprender su función: ni en el 1º nivel ni en el 2º un estudiante es consciente de la naturaleza y de las exigencias del dibujo de precisión; así mismo, tampoco es capaz de dibujar figuras planas en general usando instrumentos de dibujo ni a partir de su definición, ni en presencia de un modelo, ni a partir de sus componentes, ni a partir de sus propiedades. Apenas utilizan el transportador en ninguno de los niveles, ni siquiera como instrumento de medida sustitutivo de la regla y el compás: en los dos primeros niveles no lo consideran necesario (la regla es suficiente) y en el 3º nivel prefieren optar directamente por la regla y el compás. Las evidencias que hemos encontrado sugieren que sólo en el 3º nivel, y no antes, los estudiantes optan por la regla y el compás, y los usan correctamente, tanto para dibujar figuras con precisión (triángulos, rombos no cuadrados, paralelogramos no rectángulos) como para comprobar propiedades no inmediatas (p. ej., intersección en un punto de bisectrices y mediatrices de un triángulo). No parece que la incapacidad de apreciar y usar de forma efectiva la regla y el compás, incapacidad que se extiende hasta el 3º nivel, pueda explicarse únicamente en términos de desconocimiento de manejo instrumental. Si fuera así, muchos estudiantes en el 2º nivel también tendrían dificultades para reproducir procedimientos aprendidos, como es el caso de las construcciones del hexágono regular o del triángulo equilátero, figuras que muchos de ellos han sido capaces de dibujar mecánicamente. Esto lleva a sugerir que la forma de razonamiento geométrico requerido para apreciar el dibujo de precisión en sus diversas funciones (no sólo orientado a la construcción exacta de figuras), sentir su necesidad y ser capaz de utilizar eficazmente la regla y el compás parece estar vinculado al desarrollo de habilidades propias del 3º nivel de VH (éstas son fundamentalmente lógicas y de demostración).

RESUMEN Y CONCLUSIONES

Tras determinar el nivel de VH de una muestra de 523 estudiantes desde 6º de Primaria hasta la Universidad para el tema de las figuras planas, se les ha administrado un cuestionario para analizar cómo progresan, en función del nivel de VH, en la adquisición de determinadas destrezas de representación externa.

Los resultados sugieren que existe relación entre el desarrollo de las destrezas de representación estudiadas y los niveles de VH: dicho de otra manera, a medida que se progresa en el nivel de VH, mejoran progresivamente las destrezas de representación.

El siguiente paso ha sido formular una propuesta de nuevos descriptores de los niveles en relación a la representación externa de figuras planas. Estos nuevos descriptores pueden contribuir a comprender mejor los límites de cada nivel, a facilitar la integración curricular del modelo de VH y pueden servir también como punto de partida para explorar la formulación de nuevos descriptores, en relación a la representación externa, para otros grupos contenidos geométricos (sólidos, isometrías, etc.).

Con todo, es necesario profundizar en los procesos de razonamiento geométrico implicados cuando se trabaja con representaciones externas: ¿qué piensan los estudiantes cuando resuelven una actividad?, ¿cómo organizan y relacionan los elementos que manejan durante su resolución?, ¿dónde está la frontera entre las destrezas manuales-instrumentales y el razonamiento lógico-matemático cuando hablamos de representar externamente?

Por último, dado lo extenso de la muestra y el formato elegido para el trabajo de campo (cuestionario escrito), han quedado fuera diversas formas de representación con objetos manipulativos físicos (*tangram*, construcciones con palillos, etc.) y mediante software dinámico. En particular, sería interesante abordar un análisis específico de la relación entre los niveles de VH y las destrezas de representación en entornos de geometría dinámica.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C., & Fortuny, J. M. (1988). *Materiales para construir la Geometría*. Madrid: Síntesis.

Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.

Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.

Bravo, M. d. L., Del Sol, J. L., & Arteaga, E. (2001). El dibujo geométrico en la resolución de problemas. *Xixim: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas, 2*(1), 10-13.

Bressan, A. M., Bogisic, B., & Crego, K. (2000). *Razones para enseñar geometría en la Educación Básica*. Buenos Aires: Ediciones Novedades Educativas.

Clements, D. H. (1999). 'Concrete' manipulatives, concrete ideas. *Contemporary Issues in Early Childhood, 1*(1), 45-60.

Clements, D. H., & Battista, M. T. (1992). Geometry and Spatial Reasoning. In D. A. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: MacMillan.

Clements, D. H., Swaminathan, S., Hannibal, M. A. Z., & Sarama, J. (1999). Young Children's Concepts of Shape. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 192–212. doi: 10.2307/749610

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M. P., Jaime, A., Margarit, J. B., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en Enseñanza Secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

Dindyal, J. (2010). *Use of Algebraic Thinking in Geometry*. Saarbrücken: VDM Verlag Dr. Müller.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. In F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa* (pp. 173-201). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24*, 139-162.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approch to representation in mathematics education. *For the learning of Mathematics, 27*(2), 2-7.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.

Goldin, G. A. (1998). The PME Working Group on Representations. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 283-301.

Goldin, G. A. (2002). Representation in Mathematical Learning and Problem Solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 197-218). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates

González, N., & Larios, V. (2001). El doblado de papel: una experiencia en la enseñanza de la geometría. *Xixim: Revista Electrónica de Didáctica de las Matemáticas*, *1*(2), 10-17.

Gutiérrez, A. (2009). Perspectiva de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas. *Investigación en la Escuela*(69), 61-72.

Gutiérrez, A., Jaime, A., & Fortuny, J. M. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the VH levels. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 237-251. doi: 10.2307/749076

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning Geometry. In P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by te IGPME* (pp. 70-148). Cambridge: Cambridge UP.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. *The Mathematics Teacher, 74*(1), 11-18.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las ciencias, 17*(2), 291-309.

Janvier, C. (1987). Conceptions and representations. In C. Janvier (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 147-158). Hillsdale: Lawrence Erlabaum Associated.

Kaput, J. J. (1987). Technology and mathematics education. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515-556). New York: MacMillan Publishing Company.

Kaput, J. J. (1998). Representations, Inscriptions, Descriptions and Learning: A Kaleidoscope of Windows. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 265-281.

Laborde, C. (2005). The hidden role of diagrams in students' construction of meaning in geometry. In J. Kilpatrick, C. Hoyles, O. Shovsmose & P. Valero (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 159-179). New York: Springer.

Mesquita, A. L. (1998). On Conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

NCTM. (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics*. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Pegg, J., & Davey, G. (1998). Interpreting student understanding of geometry: A synthesis of two models. In R. Lehrer & D. E. Chazan (Eds.), *Designing learning environments for developing understanding of geometry and space* (pp. 109-135). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.

Pegg, J., Gutiérrez, A., & Huerta, M. P. (1998). Assessing Reasoning Abilities in Geometry. In V. Villani & C. Mammana (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry por the 21st Century* (pp. 275-295). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Poincaré, H. (1902). *Ciencia e hipótesis (Edición y traducción de 2002)*. Madrid: Espasa.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

RS. (2001). Teaching and Learning Geometry 11-19 (Report of a Royal Society / Joint Mathematical Council working group). London: Royal Society/Joint Mathematical Council.

Saads, S., & Davis, G. (1997a). Spatial Abilities, Van Hiele levels, & language use in three dimensional geometry. In E. Pehkonen (Ed.), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 104-111). Lahti.

Saads, S., & Davis, G. (1997b). Visual perception and image formation in three dimensional geometry. *(En enero de 2010: http://www.crme.soton.ac.uk/publications/gdpubs/Saads&Davis.html)*.

Sarasua, J. (2011). *Hacia una categorización de los objetivos geométricos. Propuesta de nuevos descriptores de los niveles de Van Hiele para la representación externa de figuras planas (Tesis Doctoral).* Tesis Doctoral, Euskal Herriko Unibertsitatea - Universidad del País Vasco, Vitoria-Gasteiz.

Sarasua, J., Ruiz de Gauna, J. G., & Arrieta, M. (2013). Prevalence of Geometric Thinking Levels over Different Stages of Education. *Revista de Psicodidáctica*, *18*(2), 311-327. doi: 10.1387/RevPsicodidact.6466

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight*. London: Academic Press.

Vergnaud, G. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *Journal for Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*(3), 293-305.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1983). On concept formation in geometry. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 83*(1), 20-25.

Weng San, L. (2010). *First-year university students' algebraic thinking and its relationship to geometric conceptual understanding (Tesis Doctoral).* University of the Witwatersrand, Johannesburg.

SEMINARIO II

CONTINUAR INVESTIGANDO TRAS LA TESIS DOCTORAL

Coordinadoras:

Núria Planas i Raig, Universidad Autónoma de Barcelona

Nuria Climent Rodríguez, Universidad de Huelva

Introducción al Seminario 'Continuar Investigando tras la Tesis Doctoral'

Ponentes:

Carlos Miguel Ribeiro, Universidade do Algarve

Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro "también" a largo plazo

Francisco Javier García García, Universidad de Jaén

Construyendo una identidad: trayectorias de investigación tras el grado de Doctor

Replicantes:

Bernardo Gómez Alfonso, Universidad de Valencia

Réplicas a: '*Construyendo una identidad' y 'Del cero hasta más allá del infinito'*

Mª Luz Callejo de la Vega, Universidad de Alicante

Llegar a ser un investigador en Didáctica de las Matemáticas

INTRODUCCIÓN AL SEMINARIO 'CONTINUAR INVESTIGANDO TRAS LA TESIS DOCTORAL'

Introduction to the Seminar 'Research beyond the completion of the PhD'

Núria Planas y Nuria Climent

Universidad Autónoma de Barcelona y Universidad de Huelva

Este seminario surgió con una idea, cómo se retoma y continúa la investigación cuando se finaliza la tesis doctoral. La tesis doctoral parece el culmen de una importante etapa en la trayectoria de un investigador en Didáctica de la Matemática. Sabiendo que se trata sólo de la primera cota alcanzada (si bien de considerable dificultad), nos interesaba compartir distintos casos de cómo se retoman o no cuestiones abiertas tras la tesis, cómo se re-conceptualizan problemas de investigación, cómo se construyen trayectorias de investigación a partir de la tesis.

El Seminario 'Continuar investigando tras la Tesis Doctoral' supone por su temática una novedad interesante en el marco de los Simposios de la SEIEM. Por una parte, se centra la atención en la frontera difusa entre las prácticas de investigación antes y después de la elaboración del trabajo de Tesis Doctoral, que en general señala cambios en los modelos de comportamiento del investigador dentro de la comunidad científica correspondiente. Por otra parte, se busca el equilibrio entre el protagonismo dado a jóvenes investigadores y a investigadores veteranos con un largo y reconocido recorrido en el área.

Francisco Javier García y Carlos Miguel Ribeiro, respectivamente adscritos a las Universidades de Jaén y del Algarve, son los dos ponentes que ofrecen la perspectiva del grupo de jóvenes investigadores en Didáctica de la Matemática. A pesar de que se trata de una perspectiva plural, no representable únicamente mediante dos trayectorias particulares, los textos de ambos ponentes se complementan en gran medida por la variedad en las líneas de investigación y en los enfoques. También en beneficio de la pluralidad de perspectivas, contamos con las réplicas de María Luz Callejo y Bernardo Gómez, investigadores veteranos adscritos respectivamente a las Universidades de Alicante y de Valencia. Hay, pues, un total de cuatro perspectivas distintas, en sendos textos que conjugan intereses en cuestiones de modelización, aproximaciones teóricas, desarrollo profesional del profesorado, resolución de problemas, pensamiento numérico, historia de las matemáticas…

Un propósito del Seminario es ilustrar en parte el paso que va de la investigación como formación a la investigación como factor de estructuración social y profesional. No todos los jóvenes investigadores consiguen experimentar ese paso, convirtiendo la investigación en una profesión además de un modo de formación. Ni tampoco todos los investigadores veteranos comparten con la misma intensidad los momentos iniciales de sus trayectorias científicas y su visión del área con las de aquellos que empiezan. Por todo ello, es importante que se haya planteado hablar sobre los inicios, ya sea desde los propios inicios o desde la consolidación, de un modo explícito e interrelacionado. En este punto, cabría incluso reflexionar sobre la dificultad, en ocasiones, de decidir si se ha llegado o no a la etapa de consolidación, sobre cómo esto se decide y sobre quiénes lo deciden.

Planas, N. y Climent, N. (2013). Introducción al Seminario 'Continuar investigando tras la Tesis Doctoral'. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 69-70). Bilbao: SEIEM.

En cualquier caso, el proceso de consolidación requiere durante décadas, en primer lugar, dedicarse de manera plena y continuada a la investigación y, en segundo, llegar a ser progresivamente reconocido por la aportación de avances relevantes al área. Al respecto y afortunadamente, la incidencia de los indicadores bibliométricos no basta. Posiblemente estos indicadores son una medida legítima de la excelencia del trabajo científico realizado por los investigadores pero, tal como ponen de relieve García y Ribeiro, la colaboración con equipos estables de investigación tiene un impacto indudable en la calidad de lo que se estudia. La pertenencia de los investigadores a equipos imprime identidad científica y refuerza las dinámicas de desarrollo de las trayectorias que se generan en torno a la construcción de esta identidad. Por otro lado, la incorporación de jóvenes investigadores a equipos estables se acostumbra a traducir en una mejora de la presencia de los resultados obtenidos en congresos, foros y proyectos internacionales.

Esperamos que los cuatros textos que siguen resulten estimulantes para todos los investigadores en nuestra área, tanto jóvenes como consolidados. Los investigadores noveles podrán sentir el apoyo de la comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática, el sentimiento de que su camino guarda similitudes con el de otros, imaginar o reconocer vías de formación y oportunidades. Los investigadores con experiencia, grupos consolidados, comunidades de investigación en Didáctica de la Matemática, pueden plantearse cómo pueden apoyar y potenciar la carrera como investigadores de sus compañeros, en especial de los que empiezan en ese camino común.

Lo que se propone a los ponentes es un ejercicio de metacognición, de reflexión sobre qué camino han recorrido, qué lo ha posibilitado, qué oportunidades se les han brindado, y qué decisiones han tomado. El resultado de este ejercicio, las dos ponencias centrales (de García y de Ribeiro) sirven para, a partir de una experiencia personal, distanciarse y tomar como pretexto los caminos recorridos para reflexionar sobre la formación del investigador en Didáctica de la Matemática.

Los diversos retos y perspectivas de la investigación en Didáctica de la Matemática en España que se detallan (aún cuando uno de los ponentes sea portugués, buena parte de su trayectoria ha transcurrido en nuestro país), muestran lo mucho que tienen en común los cuatro autores, quienes aprenden día a día a enfrentarse a dichos retos. Será recomendable dar seguimiento a esta tarea colectiva de reflexión con otros seminarios similares en el futuro, centrados por ejemplo en la incorporación de los jóvenes a la actividad científica, o bien en el modelo establecido de carrera de investigador. De nuevo, ambas temáticas necesitarán de la proximidad y articulación entre distintas generaciones de investigadores.

http://148.206.126.2/sni/sni_retos.pdf#page=87

DEL CERO HASTA MÁS ALLÁ DEL INFINITO – ALGUNAS PERSPECTIVAS DESDE EL COMIENZO DE LA TESIS DOCTORAL HASTA EL FUTURO "TAMBIÉN" A LARGO PLAZO

From zero till beyond infinity – some perspectives since the beginning of the PhD and the future "also" far away

C. Miguel Ribeiro

Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve, Portugal

Resumen[i]

En y para la realización de una investigación en educación matemática (al igual que en otro contexto), cada opción que se toma influencia y es influenciada por un conjunto diversificado de factores. Cuando son tomadas de forma consciente, estas interdependencias permiten también un conocimiento más profundo de cada una de las etapas del proceso, del camino seguido, y también de las implicaciones que esas opciones conllevan – a distintos niveles. En este texto se discuten algunos aspectos asociados a la realización de una investigación doctoral – motivaciones, ruta recorrida, apoyo y su importancia y perspectivas futuras. Más que discutir un caso particular, se pretende contribuir para una visión más amplia de las potencialidades "del proceso" y de las necesarias opciones para que esas potencialidades se tornen realidad.

Palabras clave: *resolución de problemas, creatividad, ideas innovadoras y de alto nivel, rol y apoyo de los otros.*

Abstract

In and for doing research in mathematics Education (as well as in any other context), each option influences, and is influenced by a diversified set of factors. Whenever conscience of such fact, such intertwined influences allow a deeper awareness of each process and taken path as well as on the implications of such actions – at different levels. This paper discusses some aspects linked with the process of doing the PhD – motivations, path, support from others and perspectives for future. But, more than discussing a particular case (case study) it is intended to contribute effectively for a broader vision of the powerful potential of "the process" and of the necessary options in order to make such potential come to live.

Keywords: *problem solving, creativity, innovative and high level ideas, role and support from others.*

Ribeiro, C. M. (2013). Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro "también" a largo plazo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 71-90). Bilbao: SEIEM.

INTRODUÇÃO

A tomada de uma qualquer decisão encontra-se associada (depende e influencia) a uma multiplicidade de fatores e, portanto, por cada decisão/opção que se toma um conjunto diversificado de outras são descartadas[ii]. Assim, é reconhecido que cada uma dessas opções influencia todos os passos subsequentes (num futuro próximo ou mesmo longínquo) e é influenciada por todas as que foram tomadas (por cada um dos indivíduos pessoalmente ou mesmo por interposta pessoa), ainda que de forma inconsciente. Este aspeto das interdependências, interinfluências e (re)conhecimento do papel das experiências passadas é frequentemente deixado à margem por ser considerado não significativo aquando da consciencialização e justificação de algumas tomadas de decisão que delineiam determinado percurso – em termos pessoais e/ou profissionais e, no contexto que aqui discutimos, na realização e percurso efetuado durante o processo de doutoramento.

Se, por um lado, a decisão de efetuar um primeiro mergulho no mundo da investigação, ao realizar a tese de doutoramento, é algo que não deve ser tomado de ânimo leve, por todas as implicações pessoais a nível imediato que acarreta, pois pode ser influenciada pelo contexto laboral em que cada um se encontra, por outro lado as opções e experiências que se vivenciam e o modo como se vivem durante o processo da sua realização, assumem um papel fundamental na forma como passamos a considerar a investigação, o seu papel, o nosso e o dos outros, nas diferentes etapas desse processo (próprio ou alheio) e impacto e obrigações nos contextos em que nos movemos.

A formação de professores de matemática tem sido, desde sempre, o contexto prioritário em que tenho vindo a desenvolver a minha atividade profissional, sendo, portanto, natural que alguns dos eventos críticos mais significativos que conduziram à imersão na investigação em Educação Matemática se relacionem com esse contexto. Alguns desses eventos, que desenvolverei mais adiante (cf. epígrafe seguinte), deram origem a um crescente descontentamento com a forma como a formação de professores era, e infelizmente ainda é, encarada e abordada na Instituição onde leciono[iii] e, consequentemente, a uma vontade de contribuir de forma ativa e participativa para a sua melhoria. Apesar de ser parte do problema, pretendia essencialmente contribuir para encontrar uma solução, fazendo parte dela. Este desejo de contribuir para uma melhoria da formação e da prática letiva conduziu, no caso concreto, à realização de uma investigação relacionada com o desenvolvimento e conhecimento profissional do professor do 1º Ciclo (Ribeiro, 2010), coincidindo, em termos temporais, com algumas das alterações mais significativas na formação de professores em Portugal nos últimos anos. Entre elas encontra-se, por um lado, a emergência de um Programa de Matemática para o Ensino Básico (Ponte et al., 2007) e, por outro lado, a implementação de um Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º e 2.º Ciclo[iv] – no qual participei como formador.

Ao procurar efetuar um paralelismo e analogia entre a atuação docente, o papel dos alunos[v] e todo o processo e percurso associado à realização da tese de doutoramento (ou, de um modo geral, de uma qualquer investigação), emerge como aspeto central a noção de resolução de problemas, considerando as quatro etapas distribuídas pelos 3 momentos típicos: o antes, o durante e o depois.

No antes consideram-se incluídas as motivações que levam à problematização e à necessidade da busca de uma solução; o durante inclui o desbravar terreno ("*partir pedra*") na procura de estratégias que permitam obter respostas satisfatórias para todos os problemas encontrados, sejam eles globais ou parciais, e que se sustentam, moldam e/ou são moldadas, entre outros, pelo apoio recebido – natureza e tipo – e experiências vivenciadas[vi]; e o depois refere-se ao conjunto de decisões que tomamos baseadas no percurso efetuado e nas "obrigações" que consideramos ter face ao(s) contexto(s) em que nos situamos.

Este paralelismo e analogia do processo de investigação com a resolução de problemas leva a encarar a diversidade de formas de lidar com as dificuldades, e de modos de as ultrapassar, como uma relação direta com os objetivos e perspetivações futuras (porque resolvemos e como resolvemos problemas). Esses objetivos e perspetivações guiam as nossas opções a cada momento: o caminho que seguimos, a "qualidade" e foco do trabalho, as experiências que nos permitimos/procuramos, as pessoas que conhecemos. Dai que também a realização do doutoramento seja "apenas" um ponto de passagem que nos torna melhores resolutores de problemas.

Tendo como foco as discussões no âmbito deste seminário (*Continuar investigando tras la tesis doctoral*) e, partindo do pressuposto de que para que possamos entender efetivamente para onde vamos, é essencial ter, pelo menos, uma perceção global de onde vimos, dos momentos críticos que poderão ter potenciado determinado(s) percurso(s) de vida, motivações e perspetivações futuras, neste texto irei discutir e refletir sobre alguns aspetos que nos trouxeram aqui. Com essa discussão e reflexão almeja-se poder contribuir para iniciar um movimento de consciencialização e identificação de alguns fatores nucleares que possam incrementar a quantidade e qualidade dos trabalhos/investigações que desenvolvemos e a sua cada vez mais efetiva aproximação e impacto na prática e formação[vii], bem como uma sua consequente maior consideração nesses contextos.

Estas discussões e reflexões assentam também no facto de considerar que, para além de um conhecimento relativamente ao que foi feito, ou seja, relativamente às estratégias já postas em prática, e que resultaram, na resolução de problemas similares, é fundamental uma coragem para quebrar barreiras que permitam ultrapassar alguns dos pressupostos instituídos de modo a trazer a luz ideias inovadoras. Este quebrar barreiras e ultrapassar os pressupostos instituídos deverá permitir desafiar a fiabilidade dos mesmos e permitir contribuir para uma evolução no campo com base em ideias que podem ser consideradas, inicialmente, *ideias de elevado risco*, mas que se encontram adequadamente fundamentadas e que possuem uma potencialidade emergente para contribuir para uma melhoria do contexto. Uma postura desse tipo, associado a um pensamento visionário, permitirá abrir caminhos promissores para novas linhas de trabalho que garantam uma sustentada continuidade e evolução de perguntas emergentes do trabalho realizado, bem como as posteriores ações e projetos de investigação vinculados à trajetória.

MOTIVAÇÕES E PROBLEMÁTICAS QUE CONDUZIRAM À REALIZAÇÃO DO DOUTORAMENTO

A insatisfação com a forma, tipo e conteúdo da formação de professores dos primeiros anos, na minha instituição, assumiu-se como um dos elementos desencadeantes da opção de realizar o doutoramento de modo a contribuir de forma ativa e participativa para uma melhoria dessa formação. Essa insatisfação emergiu e foi desencadeada por contextos e experiências anteriores, que levaram a determinada linha de atuação durante a realização do próprio trabalho, e as posteriores ações e projetos de investigação vinculados com a trajetória. Assim, de modo a que se possam entender melhor algumas das opções tomadas, e dos motivos que as sustentam, é importante uma breve contextualização.

Após terminar a Licenciatura em Matemática (ensino de) para professores do 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário[viii] e um mestrado em Matemática (Álgebra) a opção inicial, e que na altura parecia natural era a de realizar um doutoramento em Matemática. Porém, o ter iniciado entretanto funções como formador de professores na Universidade do Algarve, conjuntamente com a posterior participação como formador no Programa Nacional de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.º e 2.º Ciclos assumiu-se como um ponto de viragem, essencialmente pela crescente perceção da necessidade de alteração do modo como essa formação era facultada. Estas experiências foram tornando cada vez mais premente o desejo e necessidade de contribuir de forma ativa e participativa para uma alteração da formação facultada (tanto em foco como natureza e tipo) de modo a que os professores, designadamente os futuros, pudessem permitir que os seus alunos aprendessem matemática e entendessem o que fazem e porque o fazem. Este problematizar da formação associa-se a uma reflexão sobre a própria prática, sendo que a realização de uma investigação que permitisse obter um mais amplo entendimento sobre alguns dos fatores envolvidos, e portanto, no âmbito da educação matemática, passou a ser a opção primordial – em detrimento do doutoramento em matemática. Esta foi, portanto, encarada como uma das formas/processos de aprendizagem própria para a obtenção de algumas ideias que permitissem contribuir para melhorar a formação (e os contextos) facultada.

ASPETOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS RELATIVAMENTE AO TRABALHO DESENVOLVIDO DURANTE A TESE DE DOUTORAMENTO

Salvo as ainda raras exceções em que o doutoramento é efetuado no âmbito de um projeto de investigação já delineado, o *primeiro grande problema* com que nos defrontamos ao pretendermos realizar o doutoramento (trabalho de investigação) prende-se com *o encontrar/definir o problema* e a forma de o abordar: que estratégias utilizar/delinear, e de entre estas quais as que poderão contribuir para produzir melhores resultados finais fazendo-nos, simultaneamente, apreciar a viagem.

Por considerar que a posição ocupada como formador de professores é de grande responsabilidade, e por pretender agir no sentido de formar profissionais ativos, críticos, reflexivos e conhecedores dos conteúdos e temas que têm (ou terão) de lecionar, algumas das questões que se levantaram prendem-se com o que se refere à atuação dos professores durante o processo de ensino e aos motivos, dimensões e componentes que conduzem a que essa atuação ocorra de determinada forma. A já referida pretensão de contribuir de forma ativa e participativa para uma melhoria da formação e da prática docente, levou à emergência de um problema de investigação que guiou o percurso dos trabalhos e que se relaciona com o desenvolvimento e conhecimento profissional do professor, aqui considerado como constituído por diversas dimensões, sendo que o foco da investigação se centrou naquelas consideradas nucleares e por influenciarem, de forma mais direta a atuação docente, são elas que irão moldar, não apenas a forma como o professor encara o seu papel na prática letiva, mas como a concretizam (e.g., Ribeiro, Carrillo e Monteiro, 2009).

Assim, com o intuito de obter um maior conhecimento e compreensão do processo de ensino e de modo a poder contribuir para a sua melhoria, o trabalho centrou-se no papel desempenhado pelas crenças que o professor revela, conhecimentos que demonstra, comunicação matemática que promove e ações que leva a cabo na persecução dos objetivos que persegue no decurso da sua ação docente. O foco nestas dimensões complementa-se com o interesse em averiguar como todas elas se relacionam e que impacto produzem na atuação do professor ao longo do tempo, em particular quando participa num grupo de trabalho colaborativo. Destas preocupações e inquietudes surgiram algumas questões motivadoras que sustentaram a realização da investigação e que podem ser, assim, concretizadas: *Que dimensões do conhecimento profissional (crenças, conhecimentos, objetivos e tipos de comunicação matemática promovidos) estão subjacentes às ações dos professores (envolvidos num grupo de trabalho colaborativo), enquanto lecionam uma aula de matemática no 1º Ciclo? Como se relacionam essas dimensões? De que forma "evoluem" ao longo do tempo?*

Nesse sentido desenvolveu-se um trabalho colaborativo envolvendo duas professoras do 1º Ciclo que lecionavam o 4º ano de escolaridade. Foram recolhidas informações através de gravações áudio e vídeo centradas nas professoras, complementarmente à observação *in situ* (24 aulas), em três momentos distintos da prática, tendo os conteúdos sido selecionados pelas professoras entre os que reconheciam terem maiores dificuldades. Entre o primeiro e o segundo momento ocorreu um trabalho (no grupo colaborativo – também gravado em áudio) de preparação, discussão e reflexão focado na preparação de uma sequência de tarefas a implementar na segunda fase. Na primeira e última fase não houve qualquer intervenção.

Tendo por intuito uma análise mais frutífera da prática das professoras, foi elaborado um modelo (denominado *modelo cognitivo*) que servisse de instrumento para o estudo do seu desenvolvimento profissional. A sua elaboração pretende permitir simplificar algo complexo, como é o processo de ensino, bem como explicar os fenómenos e predizer comportamentos. Foi utilizado e elaborado seguindo a perspetiva de Schoenfeld (1998), tendo em consideração adaptações introduzidas por Monteiro, Carrillo e Aguaded (2008) no âmbito das Ciências.

Inicialmente, do modelo faziam apenas parte as ações do professor, crenças (posteriormente consideradas indicadores de crenças pela natureza do trabalho que se desenvolvia), conhecimentos (os 3 aspetos que Shulman (1986) considera essenciais relacionado com o tópico a abordar – do conteúdo, didático do conteúdo e curricular) e objetivos (Schoenfeld, 1998). Porém, após iniciar-se a análise, sentiu-se necessidade de um foco mais particular em dimensões que permitissem discutir de forma mais pormenorizada aspetos centrais no conhecimento do professor, chamando também para a discussão a matemática.

Nesse sentido, foram, então, incluídas como foco de atenção e análise os subdomínios do *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008), a comunicação matemática (Brendefur & Frykholm, 2000) e os recursos utilizados, aspetos esses que, apesar de complexificarem o processo de resolução do problema inicial, conduziram à obtenção de um entendimento mais profundo da prática letiva e das interrelações entre as dimensões consideradas, permitindo atribuir, assim, um lugar de destaque aos conteúdos matemáticos e ao conhecimento do professor sobre esses conteúdos matemáticos – que se configurava como uma das grandes preocupações de partida, preocupação essa que se foi transformando em crítica a muitos dos trabalhos no âmbito da Educação Matemática, e que se transformou, portanto, como uma das *pedras de toque* da investigação que se realizava, e que tem guiado todo o percurso subsequente.

A análise da prática letiva recorrendo ao modelo cognitivo elaborado, complementada com a contínua revisão da literatura (ler, elemento de todos os cenários), e não apenas dos últimos resultados ou da área da educação matemática (e.g., da área da educação de adultos – Fragoso (2007)) permitiu ir incorporando alguns dos mais recentes resultados e perspetivas da investigação, discutindo-os à luz dos resultados concretos que iam sendo obtidos. Por esse via foi também possível ir equacionando, a cada momento, outros possíveis caminhos a considerar e a justificar a sua (não)adoção – delineando dessa forma, diferentes possíveis linhas e frentes de atuação futura (cf. alguns desses aspetos na epígrafe relativa à continuidade e evolução de questões derivadas da tese). A análise permitiu efetuar uma discussão e reflexão sobre, entre outros: a elaboração do modelo cognitivo e relações entre seus constituintes (e.g., Ribeiro, Carrillo e Monteiro, 2008); o papel dos objetivos na prática letiva (e.g., Ribeiro et al, 2009); o papel do MKT e das crenças na prática e nas tarefas de ensinar (e.g., Ribeiro e Carrillo, 2011a, b). O estudo do desenvolvimento profissional fundamentou-se na elaboração do modelo cognitivo, que permitiu encontrar relações entre as cognições e entre estas e o tipo de comunicação utilizado. Por sua vez, o modelo de representação do desenvolvimento profissional que emergiu permite observar como essas relações influenciam o processo de ensino e como vão sendo alteradas ao longo do tempo (e.g., Ribeiro et al., 2010).

Apesar desta diversidade de focos de atenção e de resultados, o aspeto que mais marcadamente assumo como nuclear no trabalho desenvolvido – e que maior importância tem assumido no trabalho posterior – refere-se à análise, discussão e reflexão associada ao MKT das professoras, seu conteúdo, papel e impacto na prática letiva. Este foco no MKT associado às situações matematicamente críticas identificadas e uma perspetiva de análise como um estudo de caso instrumental (Stake, 2000) levou à discussão do conteúdo do MKT – focalizando nos seus subdomínios [ix] e problematizando a definição das suas fronteiras –, ao reconhecimento de dificuldades e condicionantes diversificadas em aceder ao conhecimento do professor apenas pela análise da prática letiva, e à identificação de aspetos específicos do conhecimento do professor que urgirá melhorar. O percurso seguido e as estratégias de resolução dos problemas emergentes delineadas permitiram também equacionar as potencialidades de considerar os subdomínios do conhecimento do professor como ponto de partida para a conceptualização de tarefas para a formação de professores, bem como para realizar investigação sobre que *inputs* na formação de professores revelam impacto e que impacto nos alunos e nas práticas. (Este foco no MKT, conjuntamente com as reflexões, discussões e resultados de outros trabalhos que foram sendo desenvolvidos por outros colegas do grupo em que me encontrava(o) inserido contribuíram, também, para uma problematização da concetualização do MKT que discutirei, de forma mas abrangente na epígrafe referente aos projetos atuais e futuros associados à trajetória efetuada).Toda a análise efetuada aos casos destas duas professoras teve como objetivo obter uma mais ampla compreensão dos fenómenos analisados e das suas interdependências. Apesar de, em qualquer investigação, ser importante apresentar os resultados concretos, de modo a darmos o passo em frente, é também essencial discutir esses resultados, por um lado, confrontando com o que é já referido na literatura específica mas, por outro, problematizar e desenvolver também a nossa criatividade, que considero central na e para a promoção da melhoria da investigação e formação, de modo a podermos quebrar as amarras, das quais muitas vezes não estamos conscientes, efetuando questões que possam conduzir a abordagens e ideias inovadoras – na linha do que refere EU (2011). Esta criatividade advém da possibilidade de seguir ideias potentes, frequentemente de elevado risco por desafiarem as normas instituídas, ainda que isso signifique correr alguns riscos mais ou menos controlados. Poder-se-á, portanto, contribuir de forma significativa para um avanço do conhecimento no campo, o que pode emergir de coisas aparentemente pouco relacionadas, ou discutindo alguns temas com colegas de outras áreas.

Apesar de os resultados da investigação associada ao Doutoramento serem mais profundos, amplos e complexos do que seria inicialmente expectável – não em termos de objetivos globais, mas em termos de focos particulares e de potencialidades futuras – esses desvios são sentidos, no caso concreto, como amplas oportunidades para aprender, que complementam o repertório das estratégias de resolução de problemas que foram sendo desenvolvidas e as novas visões, perspetivas e formas de encarar cada uma das situações com que somos confrontados. Um outro resultado, diretamente relacionado com o trabalho de investigação associado ao doutoramento, e com as múltiplas e diversificadas experiências que foram vivenciadas prende-se com os impactos que a sua realização teve (e tem), por um lado, na minha própria prática formadora e nas formas de a encarar e, por outro, com os tipos e focos das problemáticas e questões de investigação que têm emergido e as formas como vão sendo abordadas e evoluindo ao longo do tempo.

CONTINUIDADE E EVOLUÇÃO DE QUESTÕES DERIVADAS DA TESE E O PAPEL DOS "OUTROS" NO ANTES, DURANTE E DEPOIS

Segundo Kilpatrick (1981) a maior utilidade da investigação em didática da matemática é servir para parar e pensar. A elaboração desta investigação, para além da tentativa de encontrar algumas respostas para as questões motivadoras, fundamentou-se também, num desejo de poder parar e, pela reflexão subsequente, contribuir de alguma forma para um avanço nesse campo. Este parar e refletir sobre o que se faz a cada momento, como e para que se faz levou a uma busca incessante e exaustiva de respostas às questões iniciais bem como a outras que foram surgindo ao longo do percurso. Algumas delas levaram inclusivamente a alterar o percurso delineado, incrementando a quantidade, mas também a qualidade do trabalho desenvolvido e as suas potencialidades futuras. Porém, muitas das questões/problemas que foram surgindo ao longo do percurso (tanto em termos de perspetivas teóricas como metodológicas e possíveis impactos para a formação) não foram abordados, o que deixou um amplo espectro para trabalhos futuros os quais, por uma questão de objetividade tiveram de ser, a partir de certa altura, controlados de modo a possibilitar levar a bom porto o trabalho proposto – apesar de, ou talvez por, considerar a necessidade de se efetuarem abordagens inovadoras sustentadas em ideias de alto risco.

Com a discussão de algumas das possibilidades para trabalhos futuros que aqui se apresentam espera-se contribuir para uma sua complementação com outras ideias sustentadas também por outras abordagens teóricas e/ou metodológicas, na esperança de contribuir para fazer avançar o campo da investigação e formação em educação matemática, mas que lhe seja permitido ir mais além, soltando algumas das amarras e derrubando algumas das barreiras que o limitam e restringem. De entre as diversas questões emergentes do trabalho realizado, algumas das que têm vindo a ser foco de atenção prendem-se com, entre outros: (i) o conteúdo e fronteiras dos diferentes subdomínios do MKT; (ii) o papel da especificidade do conhecimento do professor na e para a prática; (iii) o processo de construção do conhecimento de matemática do professor de matemática e qual o papel das situações matematicamente críticas nessa construção; (iv) o conhecimento ideal do professor de matemática em cada um dos tópicos que tem de abordar; (v) os fatores que potenciem o processo reflexivo, de consciencialização e construção de um tal conhecimento e formas de poderem ser potenciados; (vi) a sustentabilidade do desenvolvimento profissional; (vii) a utilização dos instrumentos de análise desenvolvidos em prol da investigação e da formação e (viii) a possibilidade de ampliar a análise do conhecimento do professor a outras áreas e domínios (e.g., Língua, Ciências).

Estas questões têm tido tratamentos e abordagens distintas, sendo encaradas tanto de forma isolada como conjunta e essas multiplicidades de abordagens enquadram-se/justificam-se com a constante pretensão de integrar investigação e formação, considerando-as interdependentes – atribuindo, desse modo efetivo sentido à investigação no âmbito da Educação e da Formação de Professores.

De todos os focos referidos, os que se encontram na dianteira, em termos de trabalho desenvolvido, referem-se ao conteúdo, fronteiras e especificidade do conhecimento do professor. Esta dianteira advém, provavelmente por terem sido os aspetos que, durante a tese, mais discussões explícitas geraram (dai também a importância e papel dos outros, também como "modeladores" das perspetivas futuras). Estes focos têm sido abordadas tanto de forma isolada como conjunta e com diversidade teórica e metodológica, bem como centrados em distintos conteúdos matemáticos (geometria, racionais, organização e tratamento de dados) e capacidades transversais (raciocínio, resolução de problemas e comunicação matemática) e em diferentes etapas educativas (e.g., Carreño, Ribeiro e Climent, 2013; Jakobsen e Ribeiro, 2013; Ribeiro, 2012).

Este assumir da dianteira prende-se com a linha de trabalho que tem vindo a ser assumida e desenvolvida no "Grupo de Huelva"[x], e pela contínua problematização do que corresponderá a um conhecimento ideal do professor – assumindo aqui *ideal* associado a um conhecimento que permita entender os porquês matemáticos associados a cada um dos distintos tópicos e formas como se podem relacionar, evoluir e influir, permitindo dessa forma preparar e implementar tarefas matemáticas desafiadoras (no sentido de Stein, Smith, Henningsen e Silver, 2000) e promotoras de um completo e integrado conhecimento matemático nos alunos.

Estas problemáticas centram-se no conhecimento do professor, mas tendo sempre como pano de fundo o desenvolvimento profissional do professor, de modo a que o conhecimento ideal possa ir sendo não apenas concetualizado teoricamente, mas também essencialmente construído e desenvolvido com os professores ao longo do tempo na e para a prática. Essa simbiose possibilitará que os professores sejam conscientes e conhecedores da sua complexidade mas também da sua pertinência. Apesar de ser algo assumidamente importante, tanto para a investigação como para a prática, a sustentabilidade do desenvolvimento profissional do professor (Zehetmeier, 2010; Zehetmeier e Krainer, 2011), os fatores que a promovem ou condicionam e as possíveis formas de a operacionalizar é uma das problemáticas, ainda, pouco investigadas, necessitando de abordagens e ideias inovadoras. Mesmo considerando esta sustentabilidade como fundamental nos trabalhos que desenvolvemos, e no impacto que estes detêm no campo, ainda não atribui prioridade de foco a este aspeto pois, o tomar o professor e o seu conhecimento como o elemento que assume uma maior influência nas aprendizagens dos alunos (Nye, Konstantopoulos & Hedges, 2004) leva-me a equacionar essa sustentabilidade sob uma perspetiva algo distinta das que têm vindo a ser consideradas – requerendo o seu desenvolvimento uma atenção que não se encaixa nas prioridades atuais.

Assim, para que esta problemática possa ser abordada numa linha futura de investigação, é fundamental um mais amplo conhecimento relativamente ao conteúdo, fronteiras do conhecimento do professor e formas como esse se desenvolve. Daí que tenha vindo a ser dada atenção primordial aos quatro primeiros aspetos definidos (i)-iv)).

Por outro lado, o estudo da sustentabilidade possibilitará um refinamento dos instrumentos de análise e de representação do desenvolvimento profissional (e.g., Ribeiro et al., 2008, 2010) permitindo por sua vez aclarar as relações e influências entre as dimensões consideradas, problematizando a necessidade, ou não, de inclusão de outras ou eliminação de alguma delas.

Uma outra problemática que emergiu da investigação, considerando que os professores dos primeiros anos são responsáveis por diversas áreas curriculares, prende-se com o facto de poder ser motivador, e de interesse para o campo da investigação, e também da prática, a possibilidade de modelar (investigar) a prática de sala de aula aquando da lecionação dos vários Domínios/Áreas Curriculares (associado à problemática vi), de utilização dos instrumentos desenvolvidos na investigação em sintonia com a formação). Um tal foco, para além de permitir obter uma mais ampla compreensão da especificidade, ou não, de cada um deles à luz dos subdomínios do conhecimento "do Domínio/Área Curricular" para o ensino, possibilitando concetualizar formas de encarar o conhecimento do professor de forma mais ampla, tornaria realidade a discussão de casos concretos de especificidades e de generalidades – para que a formação se possa centrar onde é, efetivamente mais necessária e de modo a que todos possam(os) rumar numa mesma direção.

Em todas as etapas de qualquer percurso, e ainda que por vezes possamos não o verbalizar, os *outros* assumem um papel fundamental na forma como nos encaramos a nós próprios, o trabalho que desenvolvemos, e a paixão que nele depositamos. Apenas se nos sentirmos apaixonados pelo que fazemos será possível desenvolver um trabalho que acreditamos ter verdadeiro significado e impacto nos contextos em que nos movemos. Estes contextos podem ser restritos ou alargados, dependendo, em muito (mas não exclusivamente) essa visão periférica das infraestruturas em que nos encontramos inseridos e das formas como com elas nos relacionamos.

Considerando que, enquanto professores, devemos facultar aos nossos alunos ricas e amplas oportunidades de aprender, enquanto formadores de professores, devemos facultar aos professores, um conjunto amplo de experiências e situações similares às que esperamos possam vir a facultar aos seus alunos (e.g., Magiera, van den Kieboom e Moyer, 2011), de modo a tornar realidade esta visão de uma formação matematicamente sustentada e com efetivo entendimento por parte de todos os intervenientes – o que se configura como uma obrigação de todos os Formadores. Esta perspetiva e forma de encarar a investigação e a formação investigadora, encontra-se relacionada com as experiências que foram (vão) sendo vivenciadas e tornadas possíveis por todos os que se encontram mais próximo (tal como aos alunos), desempenhando nesse sentido um papel especial na forma como tem vindo a ser construída a perspetivação da investigação e do processo formador os elementos do "Grupo de Huelva" um lugar de destaque, lugar esse que em muito se deve à natureza colaborativa do trabalho desenvolvido. Esse trabalho colaborativo, o questionamento, discussão e reflexão subjacentes, é considerado como um ponto essencial para o desenvolvimento profissional de cada um dos intervenientes (tal como referem, no caso dos professores, Hargreaves (1998) e

Serrazina (1998)), sendo considerado, inclusivamente, como um possível ponto de partida para uma mudança voluntária (Climent & Carrillo, 2002), permitindo-nos adaptar, a cada momento, e posteriormente, a atividade (de ensino, investigação e/ou formação) de modo a que nos sintamos mais confortáveis no desempenho das nossas funções e com o intuito de criar algo novo, conducente a uma melhoria do contexto/situação e de forma sustentada e que se torne também sustentável.

Este conjunto de experiências, e a forma como são facultadas e vivenciadas, associadas a uma discussão e reflexão, na primeira pessoa, dos *hot topics*, tornam possível uma apropriação dos diferentes aspetos em discussão (e.g., Tichá e Hošpesová, 2006), promovendo um sustentado e sustentável desenvolvimento profissional encontrando-se associado à concetualização de formas/estratégias que permitam encontrar percursos de resposta às questões derivadas da investigação que se desenvolve, bem como às que vão emergido ao longo do processo, encarando-o, sempre, como oportunidades de aprender.

Sendo o desenvolvimento profissional um processo contínuo e continuado no tempo, e que requer um amadurecimento das reflexões por parte dos visados, a inclusão em contextos potenciadores de um sólido e amplo desenvolvimento é vista como um dos modos de potenciar esse desenvolvimento. Este será tão mais maximizado quanto os menos experientes se sentirem acarinhados, permitindo, e desejando, que os mais experientes os (des)orientem, no sentido de efetivos formadores, que possibilitam, incentivam e promovem um crescimento continuado, acompanhado e sustentado. Esta simbiose entre desejo e (des)orientação possibilitará (aqui sentido na primeira pessoa), o desenvolvimento de um conhecimento especializado associado à atuação investigadora (em analogia com o que se espera ocorra com os professores em formação – e.g., Ribeiro, Mellone e Jakobsen, 2013). "Os outros", as formas como com eles interagimos (papel que desempenham) e as formas como experienciamos as oportunidades com que somos confrontados assumem, assim, uma pertinência central tanto na génese como na sustentabilidade de um desenvolvimento profissional enquanto investigador, onde o término do doutoramento, e o poder dar largas à imaginação abre as portas de um mundo com uma multiplicidade de outras possibilidades. Permite assim, caso efetivamente o desejemos, almejar uma evolução do trabalho em direções que podem ser também distintas das que este tomaria se estivéssemos condicionados por datas e exigências de término e de escrita de um documento que ilustre o trabalho desenvolvido, o que em si encerra uma infinidade de possibilidades e oportunidades.

Esta constante presença e diálogo com os outros são por demais importantes em todas as etapas do processo. Se por um lado, as discussões com investigadores experientes contribuem para elevar a um nível superior a reflexão e raciocínio crítico possibilitando desenhar e desenvolver estratégias que permitam solucionar os problemas com que nos encontramos, por outro lado, as discussões com outros que se encontram em situação similar permitem obter o apoio de saber que não estamos sozinhos e que, alguns desses nos acompanharão nos futuros trilhos a traçar. Por ser esta a perspetiva do grupo em que me encontro inserido, tornou-se possível desenvolver um conjunto diversificado de estratégias que têm vindo a contribuir para solucionar alguns dos problemas encontrados (mas também decidir por que caminhos não seguir), e para a emergência de outros.

Este apoio dos diversos membros do grupo, complementado com a participação em congressos e seminários e suas consequentes discussões, são um dos aspetos que em muito têm contribuído para a natureza e tipo da formação investigadora e com a perspetivação de novas problemáticas bem como o equacionar problemáticas "antigas" sob perspetivas distintas das que seriam discutidas apenas no seio de um grupo fechado. Estas participações, e os períodos passados a trabalhar com colegas de outras universidades têm vindo a permitir complementar e expandir as discussões, reflexões e formas de abordagem à resolução de problemas (e aos problemas em si), contribuindo para a elaboração de uma visão mais ampla sobre diferentes aspetos da ordem do dia, bem como para a criação de pontos de trabalho sustentados em interesses e problemáticas comuns – apenas possível de realizar se formos conhecedores das problemáticas dos outros e se as discussões que ocorrem permitirem um enquadramento dos envolvidos, independentemente de nos estarmos a referir a colegas do mesmo pais ou de outros países – do local ao global. Estas vivências, complementares com o apoio recebido "em casa" por todos os elementos do SIDM, e com as reflexões originárias das experiências dos diversos congressos, permitiram fortalecer cada uma das componentes do trabalho e perspetivar algumas das linhas de força emergentes e que se configuram, agora, como aspetos centrais que implicam avanços na trajetória definida.

PROJETOS ATUAIS ASSOCIADOS À TRAJETÓRIA E LINHAS DE INVESTIGAÇÃO FUTURA

Enquanto professores, investigadores e formadores de professores, devemos passar de um nível básico, em que controlamos as componentes do sistema no qual nos encontramos inseridos, para um nível superior onde existe um *navegar por mares nunca dantes navegados*[xi].

Constantemente temos de tomar decisões. Em particular, ao efetuar uma investigação, essas decisões podem ditar o rumo que tomamos por um período alargado de tempo e limitar ou potenciar determinado tipo de expansão dos resultados que se vão obtendo. Quando nos propomos efetuar algo com o intuito de que seja duradouro e que nos irá acompanhar no futuro, é habitual pensar-se, quando se está a terminar, mesmo que não o expressemos que, neste momento em que estamos a terminar, seria o momento ideal para iniciar. Por isso considero importante uma reflexão às limitações patentes no que fazemos ou, por algum motivo, deixamos de fazer, e sobre as formas possíveis de as melhorar, bem como os modos de o fazer. Por outro lado, também ao efetuar uma investigação, dever-se-á ter em mente que os processos seguidos e resultados obtidos são sempre locais, pois o que hoje é uma verdade absoluta "*Amanhã*" deixará de o ser; devemos, pois, ter consciência de que tudo o que fazemos é suscetível de ser criticado e melhorado. Assumindo esta perspetiva, reconhece-se que algumas das ideias de investigações futuras se fundamentam em tudo o que foi realizado anteriormente, para o melhorar.

Todos os projetos atuais em que me encontro envolvido (no âmbito da educação Matemática), estão relacionados com o trabalho desenvolvido durante o período da realização da investigação de doutoramento e com algumas das problemáticas daí emergentes. No entanto, e por uma reflexão mais atempada e cuidada, algumas dessas problemáticas encontram-se já mais buriladas e adequadas aos contextos e experiências vivenciadas. Estas problemáticas têm assumido a dianteira por percecionar a sua globalidade e serem sentidas em múltiplos contextos, tanto no que concerne a múltiplas instituições de formação de professores em Portugal como noutros contextos (e.g., Espanha, Itália, Noruega, Chipre, Chile, US). Também de modo a desmistificar que a investigação se faz de modo individual, é importante salientar que em todos os projetos desenvolvidos atualmente se encontram envolvidos outros colegas que se encontram em diferentes fases da sua formação investigadora.

Estes projetos atuais, que se relacionam com as perspetivas futuras e que delineiam avanços na trajetória inicialmente definida podem ser agrupados em três grandes *clusters* interligados: (a) formação de professores; (b) concetualização do conhecimento do professor tendo em conta a sua especificidade e (c) contexto.

(a) *Formação de professores*. Este foco centra-se essencialmente em três linhas de força:

(a.1) Refere-se ao *conteúdo do conhecimento do professor* e à busca de exemplos da prática que permitam, por um lado, elaborar uma base de dados para discussão teórica e metodológica (tanto na investigação como na formação) e, por outro, problematizar esse conhecimento e a(s) formas de acesso e análise – focando conhecimentos e práticas de professores em exercício e futuros professores.

(a.2) Numa outra perspetiva, o trabalho, ainda na génese, tem-se vindo a focar no *processo de construção de conhecimento do professor* e nos fatores que o potenciam/limitam – sendo que estes fatores se restringem, nesta fase, a fatores intrínsecos ao(s) próprio(s) formador(es) de professores, tanto no que se refere ao seu conhecimento do conteúdo para ensinar (e.g., exemplos fornecidos, representações e linguagem matemática utilizada, relações entre diferentes tópicos matemáticos) como das abordagens e explorações consideradas/efetuadas.

(a.3) Uma outra perspetiva prende-se com o *papel, tipo e natureza das tarefas* tanto para a formação matemática dos alunos como na e para a formação de professores. Parte-se da premissa que, na formação de professores, pela especificidade do contexto e do conhecimento profissional associado, as tarefas deverão ter, focos e objetivos distintos das que são preparadas e implementadas com os alunos. Esta abordagem à concetualização de tarefas, tendo como fim último desenvolver o conhecimento do professor, encontra-se associada à investigação realizada no âmbito dos aspetos referidos – pois pretende-se também partir de situações da prática, passando pela teoria, e devolvê-las à prática, associando esta concetualização e desenvolvimento do conhecimento do professor à espiral crescente em redor de um cone cuja diretriz correspondente apresenta uma representação oval registada no plano horizontal, assumindo a geratriz o duplo papel de representar a reflexão e a linha do tempo, que se associa à concetualização do modelo de representação do desenvolvimento profissional apresentado em Ribeiro, Carrillo e Monteiro (2010). Estas tarefas, a concetualização e investigação associadas, têm permitido, por um lado, aceder a situações matematicamente críticas identificadas na prática e na formação – discuti-las; e, por outro, contribuir para obter um mais amplo entendimento sobre processos e formas que permitem desenvolver alguns aspetos do conhecimento de futuros professores.

(b) *Concetualização do conhecimento do professor tendo em conta a sua especificidade*. Esta especificidade tem vindo a ser abordada segundo duas linhas/perspetivas teóricas.

(b.1) Por um lado, com a participação nos trabalhos desenvolvidos pelo Grupo de Huelva no desenvolvimento de uma concetualização do conhecimento do professor (*Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK), que se sustenta em problemáticas levantadas em vários dos trabalhos que têm vindo a ser elaborados por elementos do grupo (e.g., Montes, 2011; Ribeiro, 2010; Sosa, 2011).

(b.2) Por outro lado, conjuntamente com outros colegas que trabalharam diretamente na *University of Michigan* com elementos do grupo responsável pela concetualização do MKT, tem vindo a ser refinada a concetualização de um dos subdomínios do conhecimento do professor considerados nessa concetualização – *Horizon Content Knowledge* –, envolvendo vários tópicos matemáticos e etapas educativas (e.g., Charalambous, Jakobsen e Ribeiro, 2013; Jakobsen, Thames, Ribeiro e Delaney, 2012). Estas problemáticas estão alinhadas com as discussões emergentes no último CERME no Grupo 17: *From a study of teaching practices to issues in teacher education*, onde foram levantadas e discutidas questões concretas associadas ao HCK, tais como sejam: como podem diferentes tipos de conhecimentos (especificamente HCK) ser promovidos na formação inicial e contínua de professores? Que métodos utilizar para os analisar? O que se consideram evidências? (Potari et al., 2013). Estas abordagens simultâneas ao conhecimento do professor sob estas duas concetualizações têm associada a necessidade de uma ginástica mental, conceptual e metodológica que tem contribuído para uma maior criticidade relativamente a tudo o que se faz e como se faz.

(c) *Contexto*. Quando refiro a investigação considerada neste *cluster* refiro-me a problemáticas transversais, sendo que esta transversalidade no contexto se associa à localização geográfica, mas também à multiplicidade de focos matemáticos, associando essa transversalidade também a diferentes áreas e domínios do conhecimento. Esta diversidade de contextos é encarada como mais um elemento de riqueza para um mais amplo entendimento sobre os possíveis motivos que sustentam os aspetos do conhecimento identificados.

É de salientar que o desenvolvimento destes trabalhos, e as discussões que têm ocorrido e permitido a emergência de algumas ideias brilhantes por parte de alguns dos elementos das equipas com quem tenho vindo a cooperar apenas se tornaram possíveis pelo apoio incondicional de um conjunto de pessoas com quem tenho tido a sorte de me cruzar ao longo destes últimos anos. Esse apoio incondicional, desde o primeiro momento, tem vindo a tornar possível a participação em grupos de trabalho que se têm dedicado ao desenvolvimento de alguns aspetos e perspetivas teóricas e metodológicas (concetualização do MTSK – Huelva – e discussão do HCK – Michigan) que permitem fazer avançar o campo da investigação mas também, problematizar a sua ligação com a formação e a prática. A continuidade desse apoio inicial, após o término da tese – momento em que nos encontramos em condições de começar uma nova etapa, igualmente problemática e desafiadora – reveste-se de importância significativa contribuindo para uma "sustentabilidade sentida" da formação investigadora e para o fortalecimento e criação de laços, redes e equipas de trabalho tanto nacionais como internacionais – onde o incentivo constante de participação ativa e crítica nos mais diversos eventos se configurou como um aspeto a destacar.

Tudo isto permite uma sensação de satisfação por fazer parte de algo sustentável (ainda que esta sustentabilidade não seja, por agora, foco de investigação) onde a exigência permite um desafio constante, conduzindo a uma sensação de criatividade e à possibilidade de emergência de ideias inovadoras, possivelmente de elevado risco, mas de emergente potencialidade que fornece uma sensação de dever cumprido e de um caminho *bem* percorrido – mesmo apesar de todas as dificuldades associadas ao tipo de trabalho desenvolvido, ou talvez por elas. Essa satisfação relaciona-se com a consciencialização de um incremento da capacidade de enunciar e resolver problemas, buscando-os, e aos seus processos de resolução. E, para terminar, com a esperança de que seja possível incrementar este tipo de atuação expandindo-o a outros domínios e contextos possibilitando a muitos outros similar tipo de experiências.

Referências

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? Journal of Teacher Education, *59*(5), 389-407.

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: two preservice teachers' conceptions and practices. Journal of Mathematics Teacher Education, *3*(2), 125-153.

Carreño, E., Ribeiro, C. M., & Climent, N. (2013). Specialized and horizon content knowledge - discussing prospective teachers knowledge on polygons under two conceptualizations of teachers' knowledge. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of CERME 8* (en preparación). Antalya, Turquía: ERME.

Charalambous, C., Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2013). Using a practice-based approach to understand horizon content knowledge. Paper to be presented at the 15th EARLI – Responsible teaching and sustainable learning. Agosto, 2013, Munich.

Climent, N. (2005). El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva (Publicada en 2005. Michigan: Proquest Michigan University. www.proquest.co.uk).

Climent, N., & Carrillo, J. (2002). Developing and researching professional knowledge with primary teachers. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME 2* (Vol. 1, pp. 269-280). Praga, República Checa: Charles University.

European Union (2011). *Horizon 2020 – The Framework Programme for Research and Innovation*. Bruselas, Bélgica: EU.

Fragoso, A. (2007). *As novas oportunidades em contexto de educação de adultos: qualificação ou certificação? Aprendizagem ao Longo da Vida no Debate Nacional sobre Educação* (pp. 201-213). Lisboa, Portugal: Conselho Nacional de Educação (CNE).

Hargreaves, A. (1998). *Os professores em tempos de mudança. O trabalho e a cultura dos professores na idade pós-moderna*. Lisboa, Portugal: McGraw-Hill.

Jakobsen, A., & Ribeiro, C. M. (2013). Teachers' reflections on non-standard students' work. En M. Ogunniyi, O. Amosun, K. Langenhoven, S. Kwofie & S. Dinie (Eds.), *Proceeding of the 21st Annual meeting of the SAARMST* (pp. 44-54). Cape Town, República de Suráfrica: SAARMST.

Jakobsen, A., Thames, M. H., Ribeiro, C. M., & Delaney, S. (2012). Using practice to define and distinguish horizon content knowledge. En *Pre-Proceedings de ICME 12* (pp. 4635-4644). Seúl, Corea del Sur: ICME.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kilpatrick, J. (1981). The reasonable ineffectiveness of research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, *2*(2), 22-29.

Magiera, M., van den Kieboom, L., & Moyer, J. (2011). Relationships among features of pre-service teachers' algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the PME 35* (Vol. 3, pp. 169-176). Ankara, Turquía: PME.

Monteiro, R., Carrillo, J., & Aguaded, S. (2008). Emergent theorizations in modelling the teaching of two Science teachers. *Research in Science Education*, *38*(3), 301-319.

Montes, M. (2011). *El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito*. Tesis de Maestría. Huelva: Universidad de Huelva.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects? *Educational Evaluation and Policy Analysis*, *26*(3), 237-257.

Pinto, H., & Ribeiro, C. M. (2013). Diferentes significados das frações - conhecimento mobilizado por futuros professores dos primeiros anos. En R. Cadima, H. Pinto, H. Menino, I. S. Simões (Org.), *Atas del International Conference of Research, Practices and Contexts in Education* (pp. 209-217). Leiria: ESECS.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação – DGIDC.

Potari, D., Berg, C., Charalambous, C., Figueiras, L., Hošpesová, A., Ribeiro, C. M., Santos, L., Skott, J., & Zehetmeier, S. (2013). Group 17-From a study of teaching practices to issues in teacher education: Introduction. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of CERME 8* (en preparación). Antalya, Turquía: ERME.

Ribeiro, C. M. (2010). *O desenvolvimento profissional de duas professoras do 1.º Ciclo, envolvidas num grupo de trabalho colaborativo, partindo da modelação das suas aulas de matemática*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Ribeiro, C. M. (2012). Conocimiento matemático de futuros maestros sobre fracciones. El rol de la unidad. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García & L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 447-455). Baeza: SEIEM.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011a). Discussing a teacher MKT and its role on teacher practice when exploring data analysis. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the PME 35* (Vol. 4, pp. 41-48). Ankara, Turquía: PME.

Ribeiro, C. M., & Carrillo, J. (2011b). Discussing Maria's MKT and beliefs in the task of teaching. In J. Novotná & H. Moraová (Eds.), *Proceedings of SEMT 11* (pp. 290-297). Praga, República Checa: Charles University.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2008). Uma perspectiva cognitiva para a análise de uma aula de matemática do 1.º ciclo: um modelo de apresentação de conteúdo tendo como recurso o desenho no quadro. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L. J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 545-555). Badajoz: SEIEM.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2009). ¿De qué nos informan los objetivos del profesor sobre su práctica? Análisis y influencia en la práctica de una maestra. En M. J. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 415-423). Santander: SEIEM.

Ribeiro, C. M., Carrillo, J., & Monteiro, R. (2010). Desarrollo profesional de una maestra de primaria. Introduciendo y discutiendo un modelo de análisis de desarrollo profesional. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 511-522). Lleida: SEIEM.

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Prospective teachers' knowledge in/for giving sense to students' productions - a case on fractions. En *Proceedings of the PME 37* (en preparación). Kiel, Alemania: PME.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education, 4*(1), 1-94.

Serrazina, L. (1998). *Teacher's professional development in a period of radical change in primary mathematics education in Portugal*. Tesis Doctoral. Lisboa, Portugal: APM.

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Sosa, L. (2011). *Conocimiento matemático para la enseñanza en bachillerato: un estudio de dos casos*. Tesis Doctoral. Huelva: Universidad de Huelva.

Stake, R. E. (2000). Qualitative case studies. En N. K. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of Qualitative Research* (pp. 435-454). Thousand Oaks, CA: Sage.

Star, J. R., & Strickland, S. K. (2008). Learning to observe: using video to improve preservice mathematics teachers' ability to notice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(2), 107-125.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development*. New York: Teachers College Press.

Thames, M. (2009). *Coordinating mathematical and pedagogical perspectives in practice-based and discipline-grounded approaches to studying mathematical knowledge for teaching (K-8).* Tesis Doctoral. Ann Arbor, MI: University of Michigan.

Tichá, M., & Hošpesová, A. (2006). Qualified pedagogical reflection as a way to improve mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*, 129-156.

Zehetmeier, S. (2010). The sustainability of professional development. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6* (pp. 1951-1960). Lyon, Francia: ERME.

Zehetmeier, S., & Krainer, K. (2011). Ways of promoting the sustainability of mathematics teachers' professional development. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 43*(6/7), 875-887.

---

[i] Al final de este documento, que recoge la ponencia de Ribeiro en el Seminario, se incluye un resumen más extenso en español, con el fin de facilitar la comprensión del texto.

[ii] Uma identificação e reflexão dos/sobre os momentos e/ou eventos mais significativos no percurso de cada um poderá contribuir para uma maior e mais rica compreensão dos motivos que sustentam determinadas opções e linhas de ação posteriores.

[iii] Para um exemplo dessa problemática, relacionado com o conhecimento dos futuros professores sobre racionais consultar Pinto e Ribeiro (2013).

[iv] Despacho Conjunto dos Ministérios da Educação e da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior n.º 812/2005 (http://www.legislacao.org/segunda-serie/despacho-conjunto-n-o-812-2005lbr-g-programa-professores-ensino-educacao-531762)

[v] O papel do professor e do aluno é aqui considerado na linha do que Climent (2005) considera incluído na Tendência Didática Investigativa.

[vi] Aqui cumpre-me um agradecimento a todos aqueles que com a sua presença e comentários críticos construtivos me acompanharam (e muitos deles continuam, felizmente, a fazê-lo) no percurso, e têm contribuído para um crescimento

sustentável, em especial aos meus orientadores José Carrillo e Rute Monteiro que, pelas muitas questões que efetuaram, me permitiram delinear várias estratégias para a resolução dos problemas emergentes.

[vii] Este objetivo último corresponde a uma das problemáticas com que me tenho debatido e que se prende com o facto de existirem na literatura imensos trabalhos que abordam as dificuldades dos alunos no âmbito de determinado conteúdo, outras que se enquadram no âmbito do conhecimento do professor, e outras que relacionam o conhecimento do professor com o dos alunos. Mas ainda atualmente tanto alunos como professores revelam parcos conhecimentos nesses domínios (e.g., Pinto e Ribeiro, 2013), o que levanta a questão sobre o que tem sido feito nesse âmbito e qual o nosso papel enquanto professores, formadores de professores e investigadores.

[viii] Em Portugal existem licenciaturas especificamente desenhadas para a formação de professores das diferentes áreas curriculares que complementam os três primeiros anos (vertente puramente científica) com uma formação mais didática no quarto ano e experiência letiva durante todo o último ano – paralelo a esta prática letiva era realizado um trabalho científico na área da licenciatura.

[ix] Ball e colegas, tendo como génese os trabalhos de Shulman desenvolvem uma concetualização do conhecimento do professor de matemática considerando a especificidade deste conhecimento em relação ao de outros profissionais que utilizam a matemática noutros contextos que não o letivo. Dividem o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático do conteúdo em três subdomínios cada. O conhecimento do conteúdo em *common contente knowledge*, *specialized contente knowledge* e *horizon contente knowledge* e o conhecimento didático do conteúdo em *knowledge of contente and students, teaching* e *curriculum* (e.g., Ball et al., 2008).

[x] Este grupo é coordenado por José Carrillo e para além dos investigadores de Huelva (Núria Climent, Luis C. Contreras, Miguel A. Montes, Álvaro Aguilar, Dinazar I. Escudero, Eric Flores e Enrique Carmona), inclui também investigadores de outras instituições: M. Cinta Muñoz-Catalán (Sevilha), Pablo Flores, Nielka Rojas e Elisabeth Ramos (Granada), C. Miguel Ribeiro, Rute Monteiro e C. Susana dos Santos (Universidade do Algarve, Portugal), Leticia Sosa e José L. Huitrado (Universidade de Zacatecas, México), Diana Vasco (Universidade Estatual Tecnológica de Quevedo, Equador), e Emma Carreño (Universidade de Piura, Peru).

[xi] No sentido em que o refere Camões, Canto I, 1. *"As armas e os barões assinalados,/ Que da Ocidental praia Lusitana,/ Por mares nunca dantes navegados,/ Passaram para além da Taprobana,/ Em perigos e guerras esforçados/ Mais do que prometia a força humana,/ E entre gente remota edificaram/ Novo Reino, que tanto sublimaram"*.

DEL CERO HASTA MÁS ALLÁ DEL INFINITO – ALGUNAS PERSPECTIVAS DESDE EL COMIENZO DE LA TESIS DOCTORAL HASTA EL FUTURO "TAMBIÉN" A LARGO PLAZO[xii]

C. Miguel Ribeiro

Centro de Investigação sobre o Espaço e as Organizações (CIEO), Universidade do Algarve, Portugal

INTRODUCCIÓN

La toma de cualquiera decisión se asocia (depende e influencia) con una multiplicidad de factores, pues por cada decisión/opción tomada, no son consideradas un conjunto de otras. Una toma de consciencia de estas interdependencias, interinfluencias y (re)conocimiento del rol de las experiencias pasadas es también fundamental en el (y para el) proceso de la realización de un doctorado, marcando muchos de los caminos a seguir. Gran parte de mi actividad profesional se relaciona con la formación de profesores, y un descontento creciente con la forma como esa formación era asumida en la Institución donde trabajo, condujo a una voluntad de contribuir de forma activa y participativa a su mejora, llevando a la realización de una investigación centrada en el desarrollo y conocimiento profesional del maestro.

Efectuando un paralelismo y analogía entre la actuación docente, el rol de los alumnos y el proceso y camino asociado a la realización de una investigación (tesis de doctorado u otra), emerge como aspecto central la noción de resolución de problemas, considerando las cuatro etapas distribuidas en los 3 momentos típicos: antes, durante y después. El modo de buscar soluciones a los problemas que van emergiendo se encuentra relacionado con el camino recorrido, la "calidad" y enfoque del trabajo, las experiencias que nos permitimos/buscamos y la gente a que conocemos. De ahí que la realización de la tesis doctoral es "sólo" un punto de referencia que nos hace mejores resolutores de problemas. Con estas reflexiones se pretende también contribuir a un movimiento de toma de consciencia e identificación de algunos factores nucleares que pueden incrementar la cantidad y calidad de las investigaciones que desarrollamos y su cada vez mayor proximidad e impacto en la práctica y la formación, así como una consideración más amplia en estos contextos. Estas reflexiones se basan también en el hecho de considerar que, además de un conocimiento relativo a lo que ha sido hecho (estrategias utilizadas en la resolución de problemas similares), es fundamental coraje para derribar barreras que permitan traspasar algunos de los supuestos instituidos, de modo que alumbren ideas innovadoras. Esto deberá permitir desafiar la fiabilidad de esos supuestos a la vez que contribuir a una evolución que puede tener por base *ideas de elevado riesgo*, pero que son adecuadamente sustentadas y que poseen una potencialidad emergente para contribuir a la mejora del contexto. Este tipo de aproximación, asociada a un pensamiento visionario, permitirá abrir vías prometedoras para nuevas líneas de trabajo que aseguren la continuidad y el crecimiento sostenido de las nuevas cuestiones emergentes del trabajo realizado, así como las actuaciones posteriores y proyectos de investigación relacionados con la trayectoria.

MOTIVACIONES Y PROBLEMÁTICAS QUE HAN CONDUCIDO A LA REALIZACIÓN DEL DOCTORADO

La insatisfacción con la forma, el tipo y el contenido de la formación docente en mi institución, ha sido uno de los elementos desencadenantes de la opción de realizar un doctorado para contribuir de forma activa y participativa a la mejora de dicha formación. El descontento surgió y fue provocado por contextos y experiencias anteriores, que condujeron a una determinada línea de acción durante la tesis, y las acciones posteriores y proyectos de investigación vinculados a la trayectoria (formación como profesor de matemáticas de ESO y maestro de Secundaria en matemáticas). La actuación como formador en un programa nacional de formación continua para maestros ha sido un motor de cambio, esencialmente por la creciente percepción de la necesidad de modificar cómo estaba enfocada la formación. Estas experiencias hacían sentir de modo cada vez más urgente la necesidad (y el deseo) de contribuir de forma activa y participativa para un cambio de la capacitación proporcionada (tanto en el enfoque como la naturaleza y el tipo) de modo que los profesores pudieran favorecer a sus estudiantes aprender matemáticas y entender lo que hacen y por qué lo hacen. También la reflexión sobre la propia práctica, y formas de mejorarla, condujeron a una investigación que contribuyó a, entre otros, obtener algunas ideas para mejorar la formación (y contextos), así como obtener más informaciones sobre el proceso del desarrollo profesional del profesor.

ASPECTOS TEÓRICOS Y METODOLÓGICOS RELATIVOS AL TRABAJO DESARROLLADO DURANTE LA TESIS DE DOCTORADO

Teniendo en cuenta que la posición de un formador de profesores es de gran responsabilidad, y por desear ayudar a contribuir para la formación de profesores activos, críticos, reflexivos y bien informados de los contenidos y temas que tienen (o tendrán) que enseñar, algunas de las cuestiones planteadas se refieren a la actuación (desempeño) de los docentes en el proceso de enseñanza y a las razones, dimensiones y componentes que conducen a que esa práctica ocurra de manera determinada. Eso ha conducido a un problema de investigación que se relaciona con el desarrollo y conocimiento profesional del profesor (constituido por varias dimensiones).

Esta investigación se ha enfocado en las dimensiones consideradas nucleares ya que son las que van a moldear la forma en que el profesor encara su rol en la práctica y su actuación. La investigación se ha enfocado en el rol de las creencias reveladas por el profesor, en el conocimiento que muestra, en la comunicación matemática que promueve y las acciones que desarrollo para alcanzar los objetivos que persigue en su actuación. El foco en cada una de estas dimensiones se complementa con analizar sus influencias e impacto en la práctica a lo largo del tiempo, cuando los profesores participan en un grupo de trabajo colaborativo. Para el análisis de los datos recogidos de la práctica de las dos maestras de primaria que participaron en el trabajo colaborativo (24 clases en 3 momentos distintos grabadas en audio y video) ha sido elaborado un modelo (modelo cognitivo). En el proceso de elaboración del modelo se han incluido algunas dimensiones en el análisis, de modo que permita discutir, de forma más explícita, el contenido matemático. En este sentido se ha incluido como foco de análisis los subdominios del *Mathematical Knowledge for Teaching* – MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008) y los cuatro tipos de comunicación matemática (Brendefur & Frykholm, 2000). El análisis ha permitido obtener una comprensión más amplia sobre, entre otros: la elaboración del modelo cognitivo y relaciones entre sus constituyentes; el rol de los objetivos en la práctica; el rol del MKT y de las creencias en la práctica y en las tareas de enseñanza. Esto ha conducido también a la elaboración de un modelo de representación del desarrollo profesional que permite observar cómo esas relacione influyen (y cómo lo hacen) en la enseñanza y cómo cambian a lo largo del tiempo.

A pesar de esta diversidad de focos de atención y resultados, el aspecto que más fuertemente es asumido como nuclear en este trabajo – y que ha cobrado mayor importancia en el trabajo posterior – se refiere al análisis, discusión y reflexión relacionados con el MKT docente, su contenido, rol e impacto en la práctica. Este enfoque en el MKT asociado con las situaciones matemáticamente críticas identificadas ha conducido a una discusión del contenido del MKT. Esta discusión es uno de los focos centrales en el trabajo actual (conceptualización de tareas para la formación; qué inputs en la formación producen más impacto en los alumnos y las prácticas). A pesar de la importancia de los resultados concretos de la investigación que se efectúa, para dar el salto, es esencial discutir esos resultados con la literatura y desarrollar nuestra creatividad, de modo que se puedan romper las amarras y efectuar cuestiones que puedan conducir a abordajes e ideas innovadoras. Esta creatividad se debe a la posibilidad de seguir ideas de gran alcance, a menudo de alto riesgo por desafiar las reglas establecidas. Por lo tanto, se podrá contribuir significativamente a un avance de los conocimientos en el campo, avance que puede surgir de cosas aparentemente poco relacionadas, o en discusiones de algunos temas con compañeros de otras áreas.

Los resultados de la investigación de la tesis doctoral son importantes (y en este caso, son más profundos, amplios y complejos de lo que se esperaba inicialmente), pero es también importante considerar el rol de las desviaciones de la ruta original, y la forma en que han sido tratadas. Éstas han sido consideradas oportunidades para aprender que complementan el repertorio de estrategias para la resolución de problemas. Por otro lado, el proceso y las experiencias han asumido un rol importante en mi propia práctica formadora y en las formas de asumir esta práctica, pero también en los tipos y focos de las problemáticas y cuestiones de investigación emergentes, así como las formas en que van evolucionado a lo largo del tiempo.

CONTINUIDAD Y EVOLUCIÓN DE CUESTIONES DERIVADAS DE LA TESIS Y EL ROL DE LOS “OTROS” EN EL ANTES, DURANTE Y DESPUÉS

Muchas de las cuestiones/problemas que han surgido a lo largo del proceso (perspectivas teóricas, metodológicas e impacto en la formación) no han sido discutidas explícitamente en el trabajo de tesis doctoral. Esto ha permitido un amplio espectro de trabajos futuros, que, a su vez, han tenido que ser priorizados para posibilitar su realización efectiva – también por considerar la necesidad de que sean efectuados abordajes innovadores sustentados en ideas de alto riesgo (y nivel).

Se presentan aquí (y discuten) algunas de esas ideas de trabajos futuros también con la pretensión de que sea posible su complementación con otras ideas basadas en otros abordajes teóricos o metodológicos. Con esto se pretende también contribuir para hacer avanzar el campo de la investigación en educación matemática, de modo que permitan una cierta liberación de ataduras y deje caer algunas de las barreras que aun lo limitan y condicionan. Algunas de esas cuestiones se relacionan con: (i) el contenido y fronteras de los distintos subdominios del MKT; (ii) el rol de la especificidad del conocimiento del profesor en la y para la práctica; (iii) el proceso de construcción del conocimiento matemático del profesor de matemáticas, y el rol de las situaciones matemáticamente críticas en esta construcción; (iv) el conocimiento ideal del profesor de matemáticas en cada uno de los tópicos que tiene que abordar; (v) los factores que potencian el proceso reflexivo, de toma de consciencia y construcción de tal conocimiento y formas de potenciarlo; (vi) la sustentabilidad del desarrollo profesional; (vii) la utilización de los instrumentos de análisis desarrollados como apoyo de la investigación y la formación y (viii) la posibilidad de ampliar el análisis del conocimiento del profesor a otras áreas (e.g., Lengua, Ciencias).

En el desarrollo de este trabajo son fundamentales “los otros” y la pasión que nos ayudan a poner en lo que hacemos. Solamente si estamos enamorados de lo que hacemos es posible desarrollar un trabajo que tenga un verdadero significado e impacto en los contextos en que nos movemos – locales u globales. Considerando que en la formación (de profesores y también de investigadores) deben ser proporcionadas ricas oportunidades de aprender, los formadores, y el contexto, desempeñan un rol fundamental y en esto la experiencia en el “Grupo de Huelva” ha asumido un lugar destacado en el desarrollo profesional de sus elementos – muy relacionado con la naturaleza verdaderamente colaborativa del trabajo desarrollado. Esto se relaciona, también, obviamente, con la forma en que cada uno de nosotros encara su rol en la (des)orientación y creación de un conocimiento especializado para la investigación que permite contribuir a solucionar algunos de los problemas encontrados pero también decidir (conscientemente) qué caminos no seguir. Estas visiones deben, idealmente, ser ampliadas con otras experiencias con compañeros con otros focos y vivencias (e.g., en estancias en otras universidades, en congresos), que permitan abrir horizontes y ampliar también las posibilidades y potencialidades de trabajos futuros, enriqueciendo las estrategias de resolución de problemas. Permitirán también considerar algunas líneas de trabajo emergentes y que se asumen como aspectos centrales que implican avances en la trayectoria definida.

PROYECTOS ACTUALES ASOCIADOS A LA TRAYECTORIA Y LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN FUTURA

Como profesores, investigadores y formadores de profesores, debemos pasar de un nivel básico, en el que controlamos las componentes del sistema en que nos encontramos insertos, a un nivel superior donde existe un *navegar por mares nunca antes navegados*[xiii].

A veces sentimos cuando terminamos algo, que ése final sería el momento ideal para empezar. Esa asunción implica una reflexión sobre las limitaciones de lo que hemos hecho y sobre posibles formas de mejorarlo, ya que lo que es hoy una verdad absoluta, “mañana” no lo será, por lo que todo lo que hacemos puede ser mejorado. Asumiéndolo, algunas ideas de trabajos futuros se basan en lo que podríamos haber hecho y no hicimos – u lo hicimos de modo distinto. Algunas de estas problemáticas se encuentran más desarrolladas que otras, y esto tiene que ver con el hecho de que emergieran de y en múltiplos contextos de formación de profesores (e.g., Portugal, España, Italia, Noruega, Chipre, US). También por la experiencia pasada, en todos estos proyectos se incluyen investigadores en distintas etapas de su formación investigadora.

Estos proyectos poden agrupar-se en tres *clusters* interconectados: (a) formación de profesores; (b) conceptualización del conocimiento del profesor, considerando su especificidad y (c) contexto.

(a) *Formación profesores*. Este foco se centra en tres líneas de fuerza: (a.1) el *contenido del conocimiento del profesor* y la elaboración de una base de evidencias para la discusión teórica y metodológica (tanto en la investigación como en la formación), y cuestionar ese conocimiento y la(s) formas de acceso y análisis; (a.2) el *proceso de construcción de conocimiento del profesor* y los factores que lo potencian/limitan – por ahora solamente enfocando factores intrínsecos a los formadores de profesores, por un lado en lo que tiene que ver con su conocimiento del contenido para enseñar (e.g., ejemplos propuestos, representaciones y lenguaje matemático utilizada) y por otro con las formas en que lo explora en la clase (o como considera que lo hace); (a.3) el *rol, tipo y naturaleza de las tareas* tanto para la formación matemática de los alumnos como en la y para la formación de profesores. Suponemos en ese sentido que para la construcción de un conocimiento matemático por parte del profesor, considerando la especificidad de tal conocimiento, deberemos tener asociado tareas distintas (en foco y objetivos) de las exploradas con los alumnos. Este foco en las tareas es una de las formas de partir de situaciones de la práctica, llevarlas a la teoría y volver a la práctica, lo que ha permitido, ya, obtener un conjunto de situaciones matemáticamente críticas y una más amplia comprensión sobre algunos de los procesos y formas de desarrollar algunos aspectos del conocimiento del profesor.

(b) *Conceptualización del conocimiento del profesor considerando su especificidad*. Esto se aborda según dos líneas teóricas; (b.1) en una perspectiva, con la participación en los trabajos desarrollados por el Grupo de Huelva, desarrollando una conceptualización del conocimiento del profesor (*Mathematics Teachers Specialized Knowledge* – MTSK), y que se sustenta en algunos trabajos anteriores del grupo; (b.2) en otra perspectiva, el trabajo se está desarrollando con compañeros que también han trabajado en la *University of Michigan* y miembros del grupo responsable de la conceptualización del MKT, y se enfoca en refinar uno de los subdominios del conocimiento del profesor considerados en esta conceptualización – *Horizon Content Knowledge* –, en distintos tópicos matemáticos y etapas educativas. Esta simultaneidad de abordajes del conocimiento del profesor tiene asociada una gimnasia mental, conceptual y metodológica que ha contribuido para una mayor (y amplia) visión crítica sobre lo que se hace y cómo se hace.

(c) *Contexto*. Me refiero a problemáticas transversales, y en el ámbito del contexto se refieren a la localización geográfica, pero también a la multiplicidad de focos matemáticos y de otros posibles focos extra-matemáticos. Esta diversidad de contextos es asumida como un elemento más de riqueza para una más amplia comprensión/entendimiento sobre los posibles motivos en que se sustentan los distintos aspectos identificados del conocimiento.

Para terminar hay que señalar que la aparición de algunas ideas brillantes por parte de algunos de los miembros de los equipos con quien tengo la suerte de trabajar solo es posible por el apoyo incondicional de un conjunto de personas con las que he tenido la suerte de discutir, trabajar y disfrutar. Este apoyo después del término de la tesis – momento en el que empezamos una nueva etapa, igualmente problemática y desafiadora – es de suprema importancia, contribuyendo para una "sostenibilidad" de la formación investigadora y para el fortalecimiento y creación de redes y equipos de trabajo (nacionales e internacionales). Todo esto nos permite una satisfacción por formar parte de algo sostenible, donde la exigencia nos permite un desafío constante conduciendo a una sensación de creatividad y a la posibilidad de emergencia de ideas innovadoras (posiblemente de elevado riesgo) pero de potencialidad emergente, lo que nos proporciona una sensación de logro y de un camino *bien* recorrido. Esa satisfacción se relaciona, también, con la toma de consciencia de un incremento en la capacidad de enunciar y resolver problemas. Se relaciona finalmente con la esperanza de que sea posible incrementar este tipo de actuación expandiéndolo a otros dominios y contextos, posibilitando experiencias y vivencias similares a muchos otros.

[xii] Este texto es un resumen en español del documento que le precede, que recoge la ponencia de Ribeiro en el Seminario, con el fin de facilitar la comprensión del texto extenso (en portugués).

[xiii] En lo sentido que refiere Camões, Canto I, 1.

CONSTRUYENDO UNA IDENTIDAD: TRAYECTORIAS DE INVESTIGACIÓN TRAS EL GRADO DE DOCTOR

Identity building: Research trajectories after the doctoral dissertation

Francisco Javier García

Universidad de Jaén

Resumen

En este artículo describo mi trayectoria científica desde la tesis doctoral. Con el fin de evitar una aproximación simplista, meramente cronológica, propongo un modelo teórico local articulado en torno a tres principios fundamentales: la actividad de investigación se lleva a cabo en comunidades, se puede describir en términos praxeológicos y su motor es los tipos de problemas que se abordan. Uso este modelo para describir mi trayectoria, analizando las comunidades de investigación en las que participo o he participado, esbozando las praxeologías de investigación que modelizan mi actividad científica y explicitando los problemas de investigación abordados. Finalmente, determino cómo mi identidad de investigador se ha ido configurando como resultado de participar en una diversidad de comunidades.

Palabras clave: *trayectoria investigadora, comunidades de práctica, praxeologías de investigación, problemas didácticos.*

Abstract

This paper describes my research trajectory after my doctoral dissertation. Trying to avoid a simplistic approach, merely chronological, I propose a local theoretical model, articulated around three key principles: any research activity is carried out in communities, it may be described in terms of praxeologies, being the driving force the kind of problems tackled. This model is used to describe my trajectory with respect to the research communities in which I am or have been involved, outlining the research praxeologies that model my scientific activity, and specifying the research problems. Finally, I determine how my identity as a researcher has emerged as a result of my participation in a variety of communities.

Keywords: *research trajectory, community of practice, research praxeologies, didactic problems.*

INTRODUCCIÓN

La defensa de su memoria de tesis doctoral constituye, para todo investigador, un punto clave en su trayectoria investigadora. Supone la culminación de un periodo intenso de formación científica, pero, a su vez, sitúa al investigador ante el reto, no menor, de continuar su investigación y de hacerla crecer, en un proceso continuo de aprendizaje y de desarrollo profesional.

En este trabajo uso, como *material empírico*, mi trayectoria investigadora. Sin embargo, el objetivo no es esta trayectoria en sí misma, ya que ésta carece de interés para la mayoría de los lectores. Por ello, enmarco esta trayectoria dentro de un panorama más amplio de la actividad de investigación, entendiendo ésta como actividad de aprendizaje a lo largo de la vida (profesional, al menos), que es una empresa colectiva que habitualmente el investigador no realiza en solitario, y que progresa en función de su adscripción a diferentes *comunidades,* de los problemas que aborda, de los resultados que va obteniendo y de los nuevos problemas que van emergiendo.

En el segundo apartado introduciré nociones teóricas que me permitan describir la actividad de investigación como una actividad humana, desarrollada en el seno de *comunidades de investigación*. En los siguientes apartados, usaré este marco teórico local para describir la evolución

García, F. J. (2013). Construyendo una identidad: Trayectorias de investigación tras el grado de doctor. A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 91-108). Bilbao: SEIEM

de mi trayectoria investigadora. Finalmente, a modo de conclusión, esbozaré cómo mi identidad de investigador en Didáctica de las Matemáticas ha emergido y se ha ido formando como resultado de mi participación en un conjunto de *comunidades.*

MARCO TEÓRICO

En este apartado, elaboraré un modelo teórico local (en un sentido similar al usado por Puig, 2006) para describir la actividad investigadora y su evolución, considerada como una actividad de aprendizaje a lo largo de la vida. Formulo el modelo local sobre tres principios:

- La actividad de investigación se lleva a cabo en comunidad.
- La actividad de investigación se puede describir en términos praxeológicos.
- Los problemas didácticos son el motor de la actividad de investigación.

Comunidades de investigación

La investigación es una actividad que se desarrolla, principalmente, en comunidades. Aunque en ocasiones el investigador puede trabajar de forma relativamente individual, asumimos, como hipótesis de partida, que es en el seno de una o varias comunidades donde la actividad de todo investigador toma sentido, y donde encuentra el sustrato necesario para desarrollarse. La noción de comunidad de práctica (Lave y Wenger, 1991; Wenger, 2001) permite huir de una visión simplista de este trabajo en grupo, y ofrece herramientas para identificar y delimitar diferentes comunidades de prácticas en las que el investigador opera y se desarrolla en el trascurso de su vida profesional. Además, al basarse en una teoría social del aprendizaje, integra la dimensión de aprendizaje profesional, inherente a toda actividad de investigación. No usaremos esta noción en toda su profundidad, ya que un análisis detallado de las comunidades de prácticas en las que operan los investigadores en Didáctica de las Matemáticas excede, con creces, las pretensiones de este trabajo.

Según Wenger (2006), una comunidad de práctica está formada por un grupo de personas que participan en un proceso de aprendizaje colectivo en un dominio compartido del esfuerzo humano. Así, las comunidades de práctica están constituidas por personas que comparten una preocupación o una pasión por algo que hacen y que aprenden a hacer mejor en la medida en que interactúan de forma regular. Aunque el aprendizaje no tiene por qué ser un objetivo explícito de una comunidad de práctica, es algo inherente a la participación continuada, activa y sostenida en sus prácticas.

No todo grupo de personas que interactúan es una comunidad de práctica. Wenger (2006) considera que deben darse tres características cruciales: existir un *dominio* de intereses compartido por los miembros, devenir una *comunidad* persiguiendo sus intereses dentro de su dominio, y articularse en torno a una *práctica* realizada conjuntamente.

Es precisamente la práctica la que define una comunidad a lo largo de tres dimensiones: un *compromiso mutuo*, puesto que la práctica no existe en abstracto, sino porque hay personas que participan en acciones cuyo significado negocian mutuamente; una *empresa conjunta*, resultado de un proceso colectivo de negociación, que mantiene unida a la comunidad, y que crea entre los participantes relaciones de responsabilidad mutua; y un *repertorio compartido* de procedimientos, técnicas, lenguajes, herramientas, símbolos, conceptos, etc., que emergen como fruto de la actuación conjunta encaminada a la consecución *de una empresa* y por medio del que expresan sus formas de afiliación y su identidad como miembros (Wenger, 2001).

La teoría de Lave y Wenger se sitúa dentro del espectro más amplio de las teorías socioculturales del aprendizaje. Como señalan Llinares y Olivero (2008), en éstas el aprendizaje se interpreta en términos de procesos de construcción de significado y de participación en prácticas colectivas. El aprendizaje no se considera, en primera instancia, desde una perspectiva individual (adquisición de ciertas formas de conocimiento), sino desde una perspectiva social, mediado por la participación en procesos sociales de construcción de conocimientos. Como señala Wenger (2001, p. 115): “las comunidades de práctica se pueden concebir como historias compartidas de aprendizaje.”

Las comunidades no existen de forma aislada; se conectan entre sí creando relaciones complejas. En estas interconexiones, podrían surgir *objetos limitáneos* entre comunidades y conexiones (*corredurías*) proporcionadas por personas que pueden introducir elementos de una práctica en otra.

La práctica genera los límites de una comunidad, tanto para las personas externas como para las internas a la misma, pero también se puede convertir en una forma de conexión entre comunidades. Wenger (2001) describe tres maneras en las que la práctica se puede convertir en una conexión: *prácticas limitáneas*, cuando se establece un encuentro en el límite de dos comunidades, abordando conflictos, conciliando perspectivas y encontrando soluciones; *superposiciones* de prácticas, cuando no requiere una empresa limitánea específica; y *periferias,* que conectan a la comunidad con personas que no siguen una trayectoria que los convierta en miembros de pleno derecho.

Finalmente, me referiré a la relación entre identidad y participación (volveré sobre esta relación en las conclusiones). La identidad de un sujeto se va configurando en función de las comunidades de práctica en las que interviene, y del grado en el que se involucra en las mismas. La identidad es esencialmente temporal y se construye en contextos sociales. Wenger (2001) introduce la noción de *trayectoria* para describir el tipo de participación en una comunidad y entre comunidades, a través de la que se va conformado la identidad. Distingue entre: *trayectorias periféricas*, como aquellas que no llevan al sujeto a una participación plena en la comunidad; *trayectorias entrantes*, cuando los participantes se unen a la comunidad con perspectiva de participar plenamente en su práctica; *trayectorias de los miembros,* puesto que la identidad no finaliza con la plena afiliación a una comunidad, sino que evoluciona con ella; *trayectorias limitáneas*, cuando la identidad del sujeto se construye en los límites entre comunidades; y *trayectorias salientes*, que conducen a abandonar una determinada comunidad.

Las comunidades desarrollan su práctica en una variedad de actividades. Para el propósito de este trabajo, me limito a comunidades orientadas a prácticas de investigación en Didáctica de las Matemáticas, entendidas en sentido amplio, y que pueden incluir la revisión y discusión de literatura; la participación en seminarios y reuniones científicas; el diseño y la realización de experimentos, entrevistas, observaciones clínicas, etc.; el desarrollo de materiales y recursos para el aula y/o para la formación del profesorado; la escritura de comunicaciones y artículos; la difusión de conocimiento a través de seminarios, talleres, conferencias; la coordinación de equipos de investigación y proyectos; etc. Por su especificidad, en lo que sigue hablaré de Comunidades de Investigación (CdI), como un caso particular, no nítidamente definido, de comunidad de práctica. Esta noción permitirá describir mi trayectoria investigadora en términos de pertenencia a CdIs, de elaboración de una identidad, de prácticas entre comunidades y de trayectorias.

Praxeologías de investigación

La noción de CdI ofrece una primera herramienta para describir la dimensión social de la actividad investigadora. Wenger (2001) matiza que su uso del término “práctica” no refleja una dicotomía entre lo práctico y lo teórico, sino que incluye lo que hacemos, lo que decimos, a lo que aspiramos, con lo que nos conformamos, lo que sabemos y lo que podemos manifestar. No obstante, son necesarias herramientas más precisas para describir la relación teoría-práctica, en particular en el caso de las prácticas de investigación, que están fuertemente determinadas por discursos teóricos (marcos teóricos) y que, a su vez, son a menudo productoras de teorías.

Como segunda hipótesis, íntimamente conectada con la primera, inscribimos la actividad de investigación en el conjunto de las actividades humanas. En este sentido, postulamos que será posible describirla a partir del modelo general de la actividad humana propuesto por la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992).

Artigue, Bosch y Gascón (2011), en el marco del establecimiento de redes entre teorías, introducen la noción de Praxeologías de Investigación (PI), para describir, de manera unificada y mutuamente dependiente, los tipos de problemas que el investigador aborda y las técnicas que usa (*praxis*), y los discursos tecnológico-teóricos que emplea para describir, justificar e interpretar tanto esta praxis como los resultados obtenidos (*logos*).

Esta noción es importante en la medida en que conecta el saber científico, que normalmente cristaliza en resultados teóricos, con la actividad propia del investigador, en la que pone en funcionamiento dichos objetos, o de la que estos emergen. Las PIs son entidades "vivas" y sujetas, permanentemente, a procesos de cambio, que afectan de manera integrada a sus cuatro componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teorías). En ocasiones, es la evolución del bloque práctico la que produce nuevas necesidades teóricas, mientras que en otras ocasiones, es la evolución de los conceptos, interpretaciones o formas de pensamiento, así como la emergencia de nuevos resultados, lo que lleva a la construcción de nuevas técnicas y a la elaboración de nuevos problemas. La noción de PI permite describir con más precisión la actividad que tiene lugar en el seno de una CdI y, en especial, identificar con mayor nitidez los tipos de problema que se abordan, las técnicas que se usan y el saber científico que las sustenta.

Problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas

En aras de completar el modelo local para analizar la actividad de investigación, resulta importante fijar la atención sobre el papel que juegan los problemas de investigación en la formación y el desarrollo de toda CdI, así como en las PIs que tienen lugar en su seno.

Como tercera hipótesis, asumimos que los problemas científicos no están dados de antemano, sino que se generan y evolucionan conjuntamente con las disciplinas (Gascón, 1993). En el caso de problemas construidos desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD, en adelante) nos apoyamos en el patrón heurístico de desarrollo de problemas didácticos P_δ (Gascón, 2011), que se representa esquemáticamente como $P_0 \oplus P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3 \hookrightarrow P_\delta$.

P_0 representa un *problema docente*, esto es, un problema que el profesor se plantea cuando tiene que enseñar un tema matemático a sus alumnos, formulado, normalmente, usando las nociones disponibles en la cultura escolar, y que no son cuestionadas. No todo *problema didáctico* P_δ tiene que partir de un problema docente, aunque históricamente así ha sido en muchos casos, y sigue siendo, en la medida en que en muchos problemas didácticos no se cuestiona el ámbito de la actividad matemática involucrada, ni su relatividad institucional. Los problemas docentes se pueden considerar independientes del marco teórico e insuficientes como problemas de investigación didáctica (carácter *pre-científico*). En línea con el trabajo de Gascón (2011), postulamos que desde cada PI se completan y reformulan problemas docentes, para generar verdaderos problemas de investigación. En el caso de la TAD, Gascón (2011) considera que este proceso se lleva a cabo a través de la consideración explícita de las dimensiones *epistemológicas, económicas* y *ecológicas,* dentro siempre de una perspectiva de relatividad institucional.

La formulación de un problema didáctico a partir de la dimensión *epistemológica* (P_1) implica asumir la hipótesis de que el investigador siempre utiliza, aunque sea implícitamente, un modelo epistemológico del ámbito matemático en juego, que fija el sistema de referencia desde el que observa e interpreta. La completación de P_0 con su dimensión *epistemológica* (sintetizada en el esquema con el signo $\oplus$) supone una primera formulación de un *problema didáctico*. En el marco de la TAD se habla de *Modelos Epistemológicos de Referencia* (MER), construidos por el investigador a priori, que deben ser interpretados como hipótesis de trabajo, y por tanto deben ser constantemente contrastados y revisados (Gascón, 2011). La formulación de un MER es decisiva, ya que condiciona la amplitud del *ámbito matemático* y/o *didáctico* más adecuada para plantear el problema en cuestión, los *fenómenos didácticos* que serán visibles, los *tipos de problemas de investigación* a plantear y las *explicaciones tentativas* a proponer.

La consideración de la dimensión *económica* de un problema didáctico da lugar al tipo P_2, que abarca la observación y descripción detallada de las organizaciones matemáticas y didácticas involucradas en el problema didáctico, en una institución determinada[xiv]. Para ello, será necesario no sólo apoyarse en un *modelo epistemológico de referencia,* sino también en un *modelo didáctico de referencia*. Esta dimensión de un problema didáctico "plantea cuestiones sobre el resultado que, en un periodo histórico determinado, ha producido la acción de *la transposición didáctica* en las praxeologías matemáticas y didácticas." (Gascón, 2011, p. 216)

El análisis de *cómo son las cosas* conduce a cuestiones que sólo se pueden responder investigando qué sucede cuando intentamos cambiarlas. Por ello, la actividad de investigación relativa a la dimensión *económica* está muy ligada a lo que se suele denominar *ingeniería didáctica*.

La última dimensión de los problemas didácticos planteados desde la TAD tiene que ver con la problemática *ecológica*, esto es, el análisis de las condiciones y restricciones que explican por qué las organizaciones matemáticas y didácticas son como son en una determinada institución, así como las condiciones para que "pudiesen ser" de otra forma, dentro del universo de lo posible: "se puede afirmar bajo el enfoque de la TAD que todo problema didáctico es, en alguna medida, un problema de *ecología praxeológica* o, con más precisión, que la didáctica se preocupa por el estudio de la *ecología institucional de las praxeologías matemáticas y didácticas*" (Gascón, 2011, p. 217).

En la medida en que gran parte de mi trayectoria investigadora se inscribe en las praxeologías de investigación de la TAD, la incorporación al modelo teórico local del patrón heurístico del desarrollo de problemas didácticos en la TAD constituye una herramienta valiosa para poner en evidencia los tipos de problema abordados, según las dimensiones involucradas. Pero incluso en el caso de problemas didácticos no formulados dentro de la TAD, la noción de *problema docente* resulta relevante como punto de partida. Por ejemplo, en praxeologías de investigación más centradas en dimensiones cognitivas, postulo que también sería posible identificar el patrón a partir del que se construyen los problemas didácticos. Incluso, de manera general, en muchas ocasiones los problemas didácticos abordados quedan muy próximos a los *problemas docentes*.

Resumimos en la tabla 1 los componentes principales del modelo teórico local propuesto para el análisis de la trayectoria investigadora.

Tabla 1. Componentes de un modelo teórico local para el análisis de la trayectoria investigadora

Ámbito	**Componentes en el modelo teórico local**	**Elementos teóricos**	**Teorías de referencia**
Comunidad	***Comunidades de Investigación (CdI)***	Comunidad: • Compromiso mutuo • Empresa conjunta • Repertorio compartido Entre comunidades: • Objetos limitáneos y corredurία • Prácticas limitáneas, superposiciones y periféricas Participación e identidad: • Trayectorias periféricas • Trayectorias entrantes • Trayectorias de los miembros • Trayectorias limitáneas • Trayectorias salientes	Comunidades de práctica Lave y Wenger (1991) Wenger (2001, 2006)
Actividad	***Praxeologías de Investigación (PI)***	Bloque "práctico" (*praxis*): • Tipos de tarea	Teoría Antropológica de lo Didáctico Chevallard (1992)

		• Técnicas Bloque “teórico” (*logos*): • Tecnologías • Teorías	Artigue, Bosch y Gascón (2011)
Problema	***Patrón heurístico del desarrollo de problemas didácticos***	Problemas docentes. Dimensiones de los problemas didácticos en la TAD: • Epistemológica • Económico-institucional • Ecológica	Teoría Antropológica de lo Didáctico Chevallard (1992) Gascón (2011)

TRAYECTORIA DE INVESTIGACIÓN HASTA LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE DOCTOR

En este apartado reconstruyo mi trayectoria investigadora hasta la lectura de la tesis doctoral, haciendo uso del modelo local descrito. Identifico la comunidad o comunidades de investigación en las que participo, las praxeologías de investigación que describen las prácticas en estas comunidades y los tipos de problema abordados.

Antes de la tesis doctoral: Formación de la Comunidad BAHUJAMA

Aunque este texto se centra en la tesis y la investigación posterior, considero oportuno llevar a cabo una breve reseña de la etapa previa, por la importancia que tiene para entender la formación de mi identidad como investigador en el seno de una comunidad de investigación determinada.

El Seminario Inter-Universitario de Investigación en Didáctica de la Matemática (SI-IDM) nació hace más de 20 años (noviembre, 1991) como un foro en el que profundizar en el estudio y comprensión de los fenómenos relacionados con la producción y comunicación del conocimiento matemático (fenómenos didácticos). Aunque se trata de un grupo amplio y heterogéneo, la necesidad de un foro en el que abordar problemas de investigación ubicados en praxeologías de investigación muy próximas entre sí, muchas de ellas en una etapa de fuerte desarrollo interno (como el caso de la TAD, o el del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática), generó un compromiso mutuo que cristalizó en la realización de cerca de veinte seminarios durante 14 años.

Mi incorporación a la CdI del SI-IDM fue en febrero de 1998, en su seminario en Baeza, inicialmente con una participación periférica, como miembro novel en una comunidad de expertos. Esta participación periférica me permitió entrar en contacto con PIs vinculadas con la Teoría de las Situaciones Didácticas, la Teoría de los Campos Conceptuales, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática y la TAD.

La evolución de la CdI del SI-IDM y el desarrollo cada vez más específico de las prácticas asociadas a cada praxeología de investigación, así como de los tipos de problema abordados, dio lugar a la escisión de la comunidad en nuevas CdIs, en las que la empresa común estaba más alineada con cada PI, produciéndose una depuración y delimitación del repertorio compartido (en particular, del uso de conceptos, términos y lenguajes), y en las que las formas de compromiso mutuo evolucionaron más allá de las reuniones periódicas del Seminario. No obstante, una forma evolucionada de la comunidad inicial se mantiene como grupo de trabajo de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Grupo de Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica).

De esta escisión surgió una CdI articulada en torno a la TAD con un compromiso por avanzar en una PI que experimentaba una rápida evolución. La Comunidad BAHUJAMA[xv] ha desarrollado, desde entonces, una intensa labor de investigación que ha culminado, hasta la fecha, en 8 tesis doctorales, en la publicación de numerosas contribuciones a congresos y artículos y en la consecución de diversos proyectos de investigación. Es en el seno de esta CdI, y en términos de la PI de la TAD, donde tiene sentido considerar los problemas didácticos abordados en mi tesis doctoral, y mi trayectoria investigadora derivada.

Tesis doctoral: Praxeología de investigación y problemas didácticos

En este apartado, reconstruyo mi tesis doctoral (García, 2005), dirigida por la Dra. Luisa Ruiz-Higueras y el Dr. Josep Gascón, en base a los tipos de problema abordados, a las respuestas construidas y a los nuevos problemas planteados, de acuerdo con el patrón heurístico de Gascón (2011).

El origen de los problemas de investigación abordados en mi tesis está en los procesos de aprendizaje y enseñanza de la proporcionalidad en la Educación Secundaria Obligatoria. El problema docente asociado se puede formular en los siguientes términos: *Como profesor, ¿qué tengo que enseñar a mis alumnos y cómo tengo que enseñarlo, a propósito de la proporcionalidad?*

Una revisión inicial de investigaciones "clásicas" en torno a la proporcionalidad reveló:

- De un lado, que en la formulación de problemas de investigación sobre proporcionalidad predomina la dimensión cognitiva (razonamiento proporcional), estando casi ausentes las dimensiones *epistemológica* (qué es la proporcionalidad), *económica* (transposición didáctica de la proporcionalidad) y *ecológica* (condiciones de "vida" de la proporcionalidad).
- De otro lado, un fenómeno de encierro o aislamiento de la proporcionalidad en sí misma, no sólo en la investigación, sino también en su tratamiento escolar.

Mi tesis parte pues de la formulación de la dimensión *epistemológica* del problema docente de la proporcionalidad, a partir de la que abordamos la dimensión *económica* y planteamos la necesidad de abordar la dimensión *ecológica*.

La dimensión *epistemológica* del problema de la enseñanza-aprendizaje de la proporcionalidad implica explicitar y cuestionar el modelo epistemológico de la proporcionalidad que se desprende de los libros de texto y del diseño curricular y que, por tanto, es el dominante en la institución escolar y acaba siendo asumido implícita y acríticamente por muchas investigaciones. El cuestionamiento de dicho modelo epistemológico dominante llevó a cuestionar la posibilidad de tomar el "razonamiento proporcional" como objeto de estudio, dado que el aislamiento de la proporcionalidad como ámbito de investigación se corresponde con la distribución tradicional de la matemática escolar impuesta por los programas oficiales.

A partir de la formulación de la dimensión *epistemológica*, una primera aportación de la tesis fue la construcción de un modelo epistemológico de referencia en torno a la proporcionalidad, en continuidad con los trabajos de tesis de Bosch (1994) y de Bolea (2002). Planteamos que la razón de ser de la proporcionalidad no se puede encontrar dentro de sí misma, sino en el universo más amplio de la modelización funcional de sistemas de variación. La formulación de este MER amplió la problemática de la investigación al introducir, por un lado, los procesos de modelización matemática y, por otro, las relaciones funcionales.

En relación con el primer aspecto (procesos de modelización), García (2005) incluye una revisión del ámbito de investigación en torno a la modelización matemática y las aplicaciones, con la noción de modelización como objeto de estudio en el marco de la TAD. Una aportación de la investigación es la reformulación de la modelización, dentro del modelo general de la actividad matemática propuesto por la TAD, como reconstrucción de praxeologías matemáticas de complejidad creciente. Esta aportación se ha mostrado fecunda en la comunidad BAHUJAMA, como lo han puesto en evidencia las tesis de Barquero (2009), Ruiz-Munzón (2010) y Serrano (2013).

En relación con el segundo aspecto (relaciones funcionales), en mi tesis integramos el fenómeno didáctico del aislamiento de la proporcionalidad dentro del fenómeno más amplio de la desarticulación de la matemática escolar. A partir de este, planteamos el problema de la articulación del estudio de las relaciones entre magnitudes en la Educación Secundaria (correspondiente a la dimensión *económica* de los problemas didácticos):

¿Cómo diseñar organizaciones didácticas que permitan articular el conjunto de relaciones entre magnitudes propuestas en el currículo de matemáticas, tanto entre los temas y áreas de una misma etapa como entre las diferentes etapas educativas? ¿Qué características específicas debería poseer una organización didáctica escolar para poder retomar los contenidos antiguos en torno a los sistemas de variación, incluso los estudiados en etapas educativas anteriores, cuestionarlos, desarrollarlos e integrarlos en organizaciones matemáticas más amplias y complejas?

Usando como herramienta el modelo epistemológico de referencia, se realiza:

- Un análisis de transposición didáctica a partir de documentos curriculares y de libros de texto, del que concluimos el aislamiento de la proporcionalidad, y la atomización y desarticulación del estudio de las diferentes relaciones funcionales en la Educación Secundaria. También detectamos que la actividad de modelización matemática, que podría dotar de sentido al estudio de las relaciones funciones (y a la proporcionalidad) como modelos de la variación entre magnitudes, está casi ausente.

- Un trabajo de ingeniería didáctica, construyendo y experimentando un *recorrido de estudio e investigación* (Chevallard, 2006) que permita la reconstrucción articulada de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria, a través de la modelización de un sistema de variación (García, Gascón, Ruiz-Higueras y Bosch, 2006). La construcción de este recorrido supuso considerar también un modelo didáctico de referencia. El diseño y experimentación de un recorrido de estudio e investigación es otra aportación de la tesis, más aún si tenemos en cuenta que los recorridos de estudio e investigación era una noción emergente en la TAD en aquellos momentos, que posteriormente ha demostrado su fecundidad (e.g., Rodríguez, 2005; Sierra, 2006; Barquero, 2009; Ruiz-Munzón, 2010; Serrano, 2013) y que ahora juega un papel fundamental en la PI de la TAD (Chevallard, 2012).

La experimentación del recorrido de investigación diseñado, con clases de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria y de 1º de Bachillerato, permitió constatar el potencial de estos dispositivos didácticos para generar una actividad matemática que articule los diferentes *momentos de estudio*, que haga emerger los conocimientos matemáticos a partir de una actividad de modelización que surja de cuestiones problemáticas "vivas" y "auténticas", dotando de sentido a los mismos. Pero, al mismo tiempo, puso en evidencia restricciones institucionales potentes, que apuntaban a la dimensión *ecológica* del problema didáctico de la proporcionalidad, y la extendían hacía la dimensión *ecológica* de la actividad de modelización en la Educación Secundaria.

Planteamos, como problemas abiertos, en relación con la dimensión *económica*: ¿Existen otros ámbitos de la matemática escolar en los que se manifiesta el fenómeno de la desarticulación? ¿Cuáles son? ¿Hasta qué punto este fenómeno depende del contenido matemático específico? ¿Cuál es el alcance de la modelización matemática para construir propuestas que incidan sobre la desarticulación entre diferentes ámbitos de la matemática escolar? También, respecto a la dimensión *ecológica*: ¿Cuáles son las restricciones matemáticas, didácticas y culturales que dificultan el normal desarrollo de recorridos de estudio e investigación en las instituciones docentes? ¿Son necesarios nuevos *dispositivos didácticos* que permitan la realización de este tipo de recorridos? ¿Cómo se debe modificar el *topos* del profesor y del alumno para llevar a cabo conjuntamente procesos de estudio diseñados como recorridos de estudio e investigación?

La tabla 2 sintetiza la evolución de los problemas didácticos en García (2005).

Tabla 2. Evolución de los problemas didácticos en García (2005)

Problema docente	**¿Qué enseñar y cómo, en relación con la proporcionalidad?**
Problema didáctico **Dimensión epistemológica**	¿Qué es la proporcionalidad? ¿Qué relación existe entre la proporcionalidad y el resto de relaciones funcionales? Construcción de un modelo epistemológico de referencia.
Problema didáctico **Dimensión económico-institucional**	Problema de la desarticulación del estudio de las relaciones funcionales en la Educación Secundaria. Análisis de la transposición didáctica de la proporcionalidad y las relaciones funcionales: Desarticulación y pérdida de sentido. Diseño de un recorrido de estudio e investigación.
Problema didáctico **Dimensión ecológica**	Ecología de la modelización matemática: ¿Condiciones y restricciones que dificultan el desarrollo de actividades de modelización matemática en la Educación Secundaria? Ecología de los recorridos de estudio e investigación: ¿Condiciones y restricciones que dificultan la normal integración de estos dispositivos didácticos?

TRAS EL GRADO DE DOCTOR: TRAYECTORIA EUROPEA DE INVESTIGACIÓN

En este apartado describo las CdI en las que participo, o he participado, tras la realización de la tesis doctoral, la migración entre ellas, los objetos y prácticas que este movimiento entre comunidades ha generado, las PIs que describen la actividad investigadora realizada en cada comunidad (y entre comunidades) y los tipos de problemas didácticos en los que he ido trabajando.

La presentación de un artículo en el Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática en 2005 (García y Ruiz-Higueras, 2005) supone mi acercamiento a la comunidad europea de investigación en torno a la modelización matemática y las aplicaciones. Mi participación en la misma se extiende durante las siguientes dos ediciones: en Larnaca, siendo co-responsable del Grupo 13, "Modelling and applications" (Kaiser, Sriraman, Blomhøj y García, 2007) y en Lyon (García y Ruiz-Higueras, 2010).

La delimitación de esta comunidad es compleja, incluso el hecho de considerarla como una comunidad de práctica. Esta comunidad comparte la empresa de incluir la modelización matemática en el sistema de enseñanza de las matemáticas, bien como un contenido a desarrollar per se, bien como una herramienta para la enseñanza de las matemáticas (Niss, Blum y Galbraith, 2007). Sin embargo, la existencia de múltiples PIs, desde las que se formulan y abordan cuestiones derivadas de la problemática general, da lugar a una heterogeneidad de empresas conjuntas y a un extenso repertorio, no siempre compartido por todos (como puso en evidencia el 14º Estudio ICMI "Applications and modelling in Mathematics Education", o las actividades de la Comunidad Internacional de Profesores de Modelización Matemática y Aplicaciones ICTMA).

Podemos considerar la "modelización matemática" como un objeto limitáneo en torno al que se coordinan las PIs de diversas comunidades de estudio, y en torno al que se generan nuevas prácticas, que de nuevo son susceptibles de coordinarse.

Formación de una nueva comunidad de práctica: Proyecto LEMA

Paso a describir la emergencia de una comunidad integrada por miembros pertenecientes a comunidades de investigación vinculadas con la comunidad europea de investigación en el ámbito de la modelización y las aplicaciones. De los múltiples problemas de investigación que se abordan dentro de la comunidad europea de modelización, me centro en los relacionados con la formación y el desarrollo profesional del profesorado, dado que sus necesidades formativas respecto de la modelización ha sido reconocida como una de las razones que limitan su presencia en los sistemas de enseñanza. Doerr (2007) identifica dos problemas de investigación: *¿Cuál es el conocimiento que los profesores necesitarían para usar efectivamente la modelización y las aplicaciones en sus prácticas de aula?* y *¿Cómo formar/apoyar al profesorado para que sea capaz de implementar, de manera efectiva, metodologías orientadas a la modelización?* Éstos deben ser considerados como problemas docentes ya que están formulados usando las nociones disponibles en la cultura escolar, y porque nociones como "modelización" o "formación del profesorado" no se cuestionan, al menos en su formulación inicial.

Un grupo de siete investigadores europeos, vinculados a la CdI europea en modelización y aplicaciones, abordamos este problema en nuestro primer proyecto europeo: *Learning and Education in and through Modelling and Applications* (LEMA, Proyecto Comenius 2.1, 2006-2009, www.lema-project.org). Las nociones de modelización y de formación de profesores se constituyen en objetos en torno a los que se genera un conjunto de nuevas prácticas compartidas. Teniendo en cuenta que cada investigador provenía de comunidades con PIs diferentes, la única posibilidad de trabajar juntos era sobre un problema docente. Como indican Bosch, Gascón y Trigueros (2010), una modalidad del diálogo entre teorías es a nivel de los problemas científicos, remontándose a un "paso previo" en la formulación de los mismos dentro de cada praxeología.

Como respuesta al problema de la formación del profesorado para incorporar la modelización y las aplicaciones a sus prácticas de aula, en el Proyecto LEMA diseñamos, experimentamos y optimizamos un programa de desarrollo profesional del profesorado, articulado en cinco módulos: modelización, tareas, lecciones, evaluación y reflexión.

La metodología seguida fue la de investigación basada en diseño, siendo el objetivo principal el desarrollo de productos para la formación del profesorado basados en la investigación, considerando que la difusión y transferencia de resultados de la ciencia es una dimensión fundamental de toda praxeología, en cualquier campo científico, como inherente a la misma y coherente con el compromiso que la investigación debe tener con la sociedad.

Además, en el Proyecto abordamos el problema didáctico (formulado en términos cognitivos) de analizar en qué grado las creencias, el conocimiento profesional y las prácticas docentes del profesorado (Tirosh y Graeber, 2003) evolucionaron en la población de profesorado europeo participante, determinando en cierta forma la efectividad del programa de desarrollo profesional.

Los resultados del Proyecto mostraron que, si bien no fue posible detectar evoluciones en las creencias de los profesores, sí hubo un efecto positivo en el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido en relación con la modelización y las aplicaciones, así como en la auto-percepción del profesorado de su eficacia para incorporar la modelización y las aplicaciones en sus prácticas de aula (Maaß y Gurlitt, 2011). El trabajo descrito por Maaß y Gurlitt es el resultado de una práctica que surge de la intersección de la práctica de diseño en la Comunidad LEMA, con praxeologías en torno a las creencias y las actitudes del profesorado. Este fenómeno de desarrollo de prácticas en el límite entre comunidades es propio de comunidades creadas ad hoc para la realización de un proyecto, con una empresa compartida y un compromiso mutuo claramente definido y delimitado en el tiempo, pero que, simultáneamente, mantiene a los investigadores trabajando en sus respectivas comunidades y desde sus respectivas praxeologías.

Trayectoria de los miembros de LEMA: Proyecto COMPASS

En términos de participación y creación de identidades, y de evolución de las comunidades de práctica, es posible describir *trayectorias salientes* de algunos miembros, pero también miembros que deciden mantenerse dentro de la comunidad, con la que evolucionan de manera conjunta.

El trabajo sobre modelización matemática en el marco del Proyecto LEMA llevó a dos problemas conectados, de cuya intersección emerge un segundo proyecto. Por un lado, la modelización matemática implica la consideración de contextos extra-matemáticos y la relación entre conocimientos matemáticos y extra-matemáticos. En particular, la relación entre las matemáticas y las ciencias, como caso particular de interdisciplinariedad. Por otro lado, a partir de los análisis del contexto en el que trabajan los profesores, detectamos el problema de la ausencia de materiales de aula diseñados desde la perspectiva de la modelización y las aplicaciones. En la intersección de ambos, formulamos el problema (docente, de nuevo) del diseño de materiales interdisciplinares para la enseñanza de las matemáticas y las ciencias desde la perspectiva de la modelización, que se corresponde al problema abordado en el Proyecto *Common Problem Solving Strategies as Links between Mathematics and Science* (COMPASS, Proyecto Comenius Multilateral, 2009-2011, www.compass-project.eu).

Investigadores de seis países, cuatro de ellos provenientes de LEMA, junto con investigadores de Didáctica de las Ciencias Experimentales, constituyen una nueva comunidad, que vuelve a estar articulada en torno a una empresa conjunta claramente definida y un compromiso mutuo limitado en el tiempo: el diseño de actividades escolares interdisciplinares.

Como en LEMA, trabajamos desde una perspectiva de la investigación basada en el diseño, anteponiendo el desarrollo de productos. El equipo diseña, somete al juicio de expertos, experimenta, optimiza, maqueta y difunde actividades interdisciplinares para la Educación Secundaria, en una práctica de ingeniería matemática y didáctica. El proyecto también incluye la realización de talleres de formación inicial y desarrollo profesional en torno al aprendizaje interdisciplinar en Matemáticas y Ciencias. En las prácticas de diseño desarrolladas en la CdI COMPASS, partimos de las tres estrategias para la enseñanza interdisciplinar de Nikitina (2006): *contextualización*, *conceptualización* y *resolución de problemas*. Las tareas diseñadas abarcan problemas complejos en contextos significativos, relacionados con temáticas medioambientales y sociales, no abordables satisfactoriamente desde una única disciplina. Además, en línea con el trabajo ya comenzado en otro tercer proyecto, que describo a continuación, las tareas se diseñaron según los principios del aprendizaje por investigación en dos versiones diferentes: una más cerrada, a modo de investigación guiada; otra más abierta a modo de proyecto. En el diseño jugó un papel fundamental el uso de nuevas tecnologías al diseñar applets para las tareas (Maaß, García, Mousoulides y Wake, 2013).

Destaco mi responsabilidad en el análisis de las condiciones institucionales en cada país para el diseño y la implementación de tareas interdisciplinares, que se llevó a cabo, previa reformulación en el marco de la TAD, como el *problema didáctico de la ecología de la interdisciplinariedad*. Los resultados se recogieron en un informe interno, remitido a la Comisión Europea (no publicado). Observamos de nuevo cómo prácticas de CdIs diferentes se solapan, creando una práctica limitánea, mediada por el investigador que se mueve de una a otra comunidad (*correduría*).

Trayectoria de los miembros de COMPASS: Proyecto PRIMAS

Los miembros de la Comunidad COMPASS, junto con investigadores de otras siete universidades, forman una nueva CdI que coexiste, durante 2010 y 2011, con la de COMPASS. Esta comunidad es también una evolución de la Comunidad LEMA. Por un lado, porque comparte y extiende los problemas de investigación que allí se abordaron: del papel de la modelización en los sistemas de enseñanza de las matemáticas, al papel del aprendizaje por investigación (que engloba la modelización dentro de los procesos de investigación). Por otro lado, porque el problema (docente) general sigue centrado en la formación y el desarrollo profesional del profesorado. En contraste con las Comunidades LEMA y COMPASS, que en su configuración eligieron un ámbito de investigación de interés para sus miembros (modelización e interdisciplinariedad), sin que este estuviese fijado de antemano, el caso de este tercer proyecto es diferente.

Tras la publicación del denominado Informe Rocard (Rocard et al., 2007), que denunciaba el decreciente interés de los jóvenes europeos por los estudios de Matemáticas y Ciencias, que problematizaba las pedagogías dominantes en los sistemas educativos europeos centradas en el profesor, y que proponía acciones a gran escala para la formación del profesorado en metodologías centradas en el alumno y orientadas al aprendizaje por investigación, la Comisión Europea lanza sucesivas convocatorias para proyectos transnacionales (normalmente, con diez o más países), con una agenda prácticamente cerrada: difundir metodologías orientadas al aprendizaje por investigación entre el profesorado.

El Proyecto *Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education* (PRIMAS, 7º Programa Marco, 2010-2013, www.primas-project.eu) reúne a un equipo extenso de investigadores en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias Experimentales, en torno a los problemas docentes siguientes: *¿Cuál es el conocimiento que los profesores de matemáticas y ciencias necesitarían para usar efectivamente el aprendizaje por investigación en sus aulas? ¿Cómo formar/apoyar al profesorado para que sea capaz de implementar, de manera efectiva, metodologías que orienten a sus alumnos hacia un aprendizaje por investigación? ¿Qué acciones son necesarias en diferentes grupos objetivo (profesorado, alumnado, familias, formadores de profesorado, legisladores y políticos) para conseguir un cambio en los sistemas de enseñanza de las matemáticas y las ciencias en la dirección del aprendizaje por investigación?*

Enfrentamos de forma amplificada el mismo fenómeno: problemas docentes como punto de partida y delimitador de una comunidad de investigación (la Comunidad PRIMAS), una empresa conjunta y un compromiso mutuo claramente delimitado en la memoria de un proyecto. Esta comunidad vuelve a estar rodeada por una "constelación" de comunidades de prácticas en las que los miembros operan desde praxeologías de investigación diversas, entre las que van y vienen, y donde surgen numerosas prácticas limitáneas. Los objetos "inquiry based learning" y "desarrollo profesional del profesorado" se convierten en objetos en torno a los que la Comunidad PRIMAS tiene que negociar un significado compartido que dé sentido al trabajo conjunto.

En lo referente a mi trayectoria científica, son diversos los problemas de investigación abordados en PRIMAS, claramente mediados por las praxeologías de los investigadores responsables de liderar las distintas tareas. Entre ellos: ¿Cuáles son las condiciones y restricciones ecológicas que dificultan la integración del aprendizaje por investigación en los sistemas de enseñanza de las matemáticas y las ciencias? ¿Qué tipos de material de aula sirven de apoyo al profesorado para la implementación del aprendizaje por investigación? ¿Cómo diseñar un programa de desarrollo profesional efectivo para orientar las prácticas docentes del profesorado hacia el "aprendizaje por investigación"? ¿Cuáles son los contenidos y los procesos sobre los que construir dicho programa? ¿Cuál es el modelo de desarrollo profesional subyacente? ¿Cómo evolucionan las creencias, actitudes y capacidades del profesorado en torno a la implementación del aprendizaje por investigación tras su participación en el programa de desarrollo profesional PRIMAS? ¿Qué estrategias permiten pasar de la pequeña escala a la gran escala en el desarrollo profesional del profesorado? ¿Cómo diseñar y evaluar un programa de implementación a gran escala basado en un modelo en espiral? ¿Cómo los sistemas, las estructuras y, sobre todo, las personas (profesores, formadores de profesores, legisladores, políticos) reaccionan de forma diferente a imperativos provenientes de políticas "globales", debido a sus contextos "locales", dando lugar al fenómeno de la "globalización"? ¿Cuáles son las prioridades políticas en torno a la educación matemática y científica, y en torno al desarrollo profesional del profesorado, y cuáles son los valores que las respaldan? ¿Cómo los sistemas y las estructuras median y gestionan la implementación de dichas políticas? ¿Cuáles son los procesos que proporcionan datos y evidencias para orientar a las decisiones políticas? Estos problemas de investigación están siendo aún abordados dentro de la Comunidad PRIMAS[xvi].

En relación con la evaluación del impacto del Proyecto PRIMAS en el profesorado, se está llevando a cabo un estudio cuantitativo a través de cuestionarios, que incluye un estudio preliminar de nivel, un pre-test al inicio de la formación y un pos-test al finalizarla, completado con estudios cualitativos de caso.

Algunos resultado del estudio de base fueron presentados en un simposio en el Congreso Europeo de Investigación Educativa de 2012 y serán publicados próximamente (Abril, Ariza, Quesada y García, en prensa). Los mismos muestran una actitud positiva del profesorado (47 en ejercicio y 36 en formación) hacia la incorporación del aprendizaje por investigación en sus prácticas docentes. Éste es considerado como una herramienta útil para abordar problemas de aprendizaje (no tanto como estrategia motivadora), con la detección de la necesidad que tiene el profesorado de apoyo y formación en este ámbito.

Algunos resultados preliminares del análisis de los pre-test y de los post-test muestran correlaciones significativas entre dimensiones de las creencias, de las prácticas y del conocimiento profesional de los profesores participantes en la formación asociada al Proyecto PRIMAS durante 2011-2012 en Andalucía. Los datos en recopilación de 2012-2013 serán publicados más adelante.

En enero de 2013 hemos comenzado a trabajar en un nuevo proyecto europeo *Mathematics and Science for Life* (MaScil, 7º Programa Marco, 2013-2016) que supone una continuidad de la Comunidad PRIMAS (con trayectorias salientes y entrantes) y en el que, junto al problema del desarrollo profesional del profesorado y de la ecología del aprendizaje por investigación, y en conexión con el problema de la interdisciplinariedad abordado en COMPASS, tratamos el problema de la conexión de las Matemáticas y la Ciencias con el "mundo del trabajo", y su potencial papel en la transformación de los sistemas de enseñanza de Matemáticas y Ciencias a nivel europeo.

La figura 2 ilustra las diferentes comunidades de investigación creadas en torno a proyectos europeos y la evolución de la trayectoria de sus miembros entre comunidades, en función de los tipos de problema abordados, así como algunas de las prácticas.

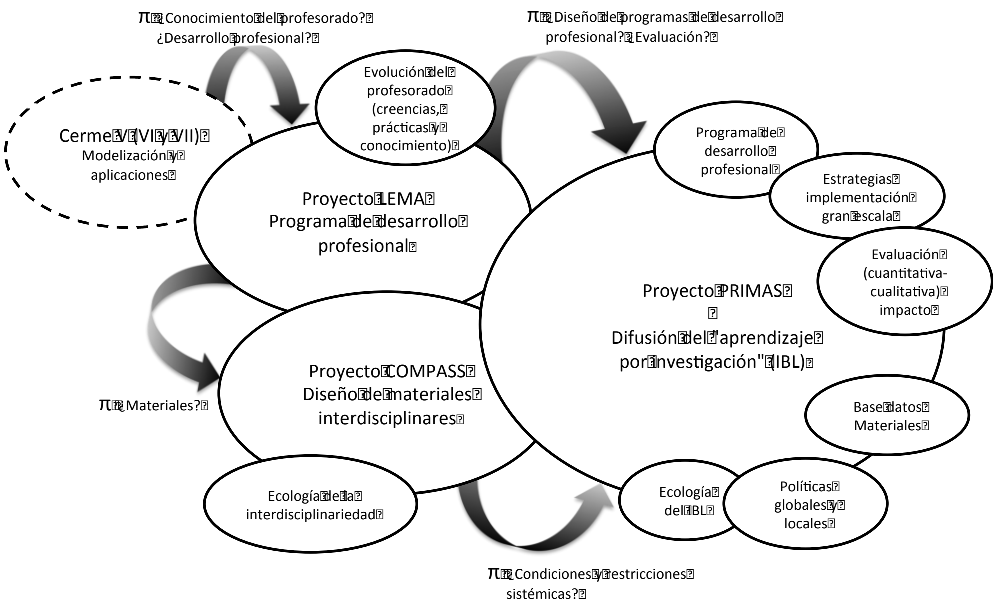


Figura 1. Evolución de CdIs vinculadas a proyectos europeos

TRAS EL GRADO DE DOCTOR: PRÁCTICAS ENTRE COMUNIDADES

Ahora me centro en mi trayectoria dentro de la Comunidad BAHUJAMA tras la realización de la tesis doctoral. Esta trayectoria está condicionada por las prácticas en las comunidades de investigación europeas, pero también por la consecución de proyectos del Plan Nacional de I+D+i: "Los Recorridos de Estudio e Investigación como propuesta didáctica para la enseñanza de la modelización matemática", cuyo sub-proyecto; "La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en Matemáticas y en Ciencias Naturales", coordino desde 2013.

Me referiré a algunos de los problemas abordados en la intersección entre la Comunidad BAHUJAMA y las comunidades asociadas a los proyectos europeos. En concreto, me referiré a la reinterpretación y reformulación como problemas didácticos desde la TAD de problemas docentes abordados en las comunidades de investigación europeas.

En el marco de la Comunidad LEMA, a partir del diseño e implementación del programa de desarrollo profesional, planteamos el problema didáctico siguiente: *¿En qué sentido el Programa LEMA modifica el equipamiento praxeológico*[xvii] *del profesorado participante?* Se puede considerar como un problema ubicado en la dimensión *económica*. En García y Ruiz-Higueras (2011), con base en el modelo para la descripción de las praxeologías didácticas del profesorado elaborado en Ruiz-Higueras y García (2011), analizamos el programa asociado al Proyecto LEMA, concluyendo que los módulos diseñados contribuyen a una evolución de las técnicas didácticas *topogenéticas*, *mesogenéticas* y *cronogenéticas* en la incorporación de la modelización en el aula.

También en relación con el Proyecto LEMA, y en torno a la modelización matemática, en García y Ruiz-Higueras (2010) abordamos el problema didáctico *económico* del diseño de actividades de modelización en el marco de la TAD. Partiendo de la definición de la modelización matemática como proceso de construcción de praxeologías de complejidad creciente (García, 2005), propusimos los recorridos de estudio e investigación como tecnología que describe y justifica la tarea del diseño de actividades de modelización. Una versión revisada (García y Ruiz-Higueras, 2013) ha sido aceptada para su presentación en el 22º Estudio ICMI sobre diseño de tareas.

En relación con el Proyecto COMPASS, ya he explicado cómo una tarea del proyecto (análisis de contextos nacionales) fue reformulada como un problema didáctico (dimensión ecológica) dentro de la TAD. Esta misma reformulación ecológica para el análisis del contexto se llevó a cabo en el Proyecto PRIMAS. Los resultados del análisis (Dorier y García, 2013) muestran un contraste entre restricciones que provienen de diferentes niveles de codeterminación didáctica (por ejemplo, las prácticas docentes dominantes, o la estructuración del currículo en los niveles inferiores de codeterminación), frente a condiciones favorables que emergen de otros niveles (como la evolución del papel que la escuela debe desempeñar en la sociedad del siglo XXI, las políticas europeas o la orientación general de la mayoría de currículos nacionales).

En la Comunidad PRIMAS, en el marco del diseño de un programa de desarrollo profesional en torno a la implementación del aprendizaje por investigación, desde la TAD hemos planteado la reformulación del modelo de desarrollo profesional bajo el que el programa ha sido diseñado, y su capacidad, a priori, para transformar el conocimiento profesional y las prácticas de los profesores. En García (2013) se describe un modelo para el desarrollo profesional del profesorado, extendiendo el *paradigma del cuestionamiento del mundo* (Chevallard, 2012), así como la noción de “recorrido de estudio e investigación”, al ámbito de la formación del profesorado, en continuidad con el trabajo de Ruiz-Higueras y García (2010) sobre formación del profesorado desde la TAD. El análisis del programa asociado al Proyecto PRIMAS en función de este modelo de desarrollo profesional lleva a concluir que se trata, a priori, de un programa *transicional* (en el sentido de Kennedy, 2005), pero que, según como se implemente, podría devenir en transformativo. Queda abierto el contraste empírico de su carácter *transicional/transformativo*, en función de los resultados del estudio cuantitativo que se está llevando a cabo.

CONCLUSIONES

He intentado describir mi identidad como investigador en el ámbito de la Didáctica de las Matemáticas. Según Wenger (2001), definimos quienes somos por la manera en que experimentamos nuestro yo mediante la participación y cosificación (identidad como *experiencia negociada*), en función de lo familiar y lo desconocido (identidad como *afiliación a comunidades*), según de dónde venimos y a dónde vamos (identidad como *trayectoria de aprendizaje*), por las maneras en las que conciliamos nuestras formas de afiliación a diferentes comunidades (identidad como *nexo de multiafiliación*) y negociando maneras locales de pertenecer a constelaciones más amplias (identidad como *relación entre lo local y lo global*).

Aunque no es un patrón universal, el inicio de la identidad de un investigador suele emerger de la comunidad a la que se inscribe en su formación pre-doctoral y para la realización de su tesis doctoral. Esta comunidad inicial determina la PI del investigador, así como los tipos de problema que aborda. En mi caso, fue a partir de mi participación en la Comunidad BAHUJAMA que empecé a desarrollar mi identidad como investigador, en el marco de praxeologías de la TAD, abordando problemas específicos, conectados con problemas didácticos ya tratados en dicha Comunidad.

Pero la identidad se conforma constantemente y evoluciona según la afiliación del investigador a diferentes comunidades, dando lugar a trayectorias de aprendizaje. En mi caso, he identificado dos trayectorias: por un lado, la vinculada a mi participación en comunidades de investigación europeas y, por otro, la evolución de mi identidad inicial dentro de la Comunidad BAHUJAMA.

La primera trayectoria ha supuesto mi integración en una comunidad heterogénea, sujeta a múltiples interacciones con una constelación de comunidades, entre las que continuamente se negocian significados (para modelización matemática, desarrollo profesional, interdisciplinariedad o aprendizaje por investigación), en la que las prácticas en el "centro" de la comunidad se conectan con prácticas y objetos en el límite con las demás comunidades, en la que los individuos migran entre comunidades intentando conciliar sus formas de afiliación. En la formación y evolución de estas nuevas comunidades se produce un mestizaje en las PIs y una negociación de las prácticas, que tiene su reflejo en los tipos de problema que se abordan. Inicialmente, los tipos de problema están casi siempre en el nivel de problemas docentes, ya que su reformulación dentro de una praxeología de investigación determinada choca con la necesidad de hacer las prácticas accesibles a todos los miembros de la comunidad. Pero, a su vez, también se constata la tensión entre estas prácticas y las propias de las comunidades de origen de cada investigador, que se manifiesta en la formulación de problemas de investigación derivados del problema docente inicial, a partir de las praxeologías de algunos miembros de la comunidad. Por ejemplo, en la Comunidad LEMA, con la formulación del problema didáctico (cognitivo) de las creencias del profesorado y su evolución, o en la Comunidad PRIMAS con la formulación del problema didáctico de la ecología del aprendizaje por investigación.

Este fenómeno conecta mi trayectoria en las comunidades europeas con mi trayectoria en la Comunidad BAHUJAMA. A partir de las praxeologías de investigación propias de la TAD, mi trayectoria post-doctoral está en gran parte marcada por los movimientos entre comunidades, mediante la reformulación como problemas didácticos en la TAD de aspectos de los problemas docentes abordados en las comunidades europeas. Por ejemplo, cuando surge la pregunta sobre los efectos del Programa LEMA en las praxeologías didácticas del profesorado, o cuando se formula desde la TAD un modelo de desarrollo profesional del profesorado a partir del que analizar, a priori, el carácter transformativo del Programa PRIMAS.

A través de los análisis previos, he mostrado las posibilidades del modelo teórico local, propuesto en el segundo apartado, para describir y analizar la trayectoria científica del investigador, evitando una aproximación simplista y meramente cronológica a la misma.

No quiero dejar pasar la oportunidad de acabar con algunos hechos que considero fundamentales. En primer lugar, el papel tan importante que tiene para todo investigador la parte inicial de su trayectoria, entendiendo por esta la que culmina en su tesis doctoral, a partir de la que configura una dimensión básica de su identidad, que le acompaña durante su vida profesional. En segundo lugar, las grandes posibilidades que ofrecen los proyectos internacionales para enriquecer y diversificar esta identidad, que se convierten en un motor del desarrollo profesional del investigador. Pero también, el coste que supone la integración en estas comunidades, en las que hay que negociar continuamente los compromisos mutuos y las empresas compartidas, y moverse en un conglomerado de praxeologías de investigación diversas, que en ocasiones te aleja de tu CdI inicial. Se trata de una empresa costosa en términos personales y, en ocasiones, en términos de la "productividad científica" reconocida institucionalmente.

Referencias

Abril, A. M. Ariza, M., Quesada, A., y García, F. J. (en prensa). Creencias del profesorado en ejercicio y en formación sobre el aprendizaje por investigación. *Revista Eureka sobre enseñanza y divulgación de las ciencias.*

Artigue, M., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Research praxeologies and networking theories. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2381-2390). Rzeszów, Polonia: ERME.

Barquero, B. (2009). *Ecología de la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las matemáticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra: Universitat Autónoma de Barcelona.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Trabajo de tesis doctoral. Zaragoza: Universidad de Zaragoza.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva de la actividad matemática.* Trabajo de Tesis doctoral. Bellaterra: Universitat Autónoma de Barcelona.

Bosch, M., Gascón, J., y Trigueros, M. (2011). Tres modalidades de diálogo entre APOS y TAD. En M. Bosch et al. (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 77-116). Barcelona: CRM-Universitat Autónoma de Barcelona.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 12*(1), 73-112.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie & régulation. En J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot y R. Floris (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Chevallard, Y. (2011). La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. En C. Margolinas et al. (Eds.), *Actes de la XVe École d'Été de Didactique des Mathématiques* (pp. 705-746). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2012). *Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm*. Regular lecture presentada en el XII International Congress on Mathematics Education. Julio de 2012, Seul, Corea del Sur [http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=205].

Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? En W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69-78). Nueva York: Springer.

Dorier, J. L., y Garcia, F. J. (2013). Challenges and opportunities for the implementation of inquiry-based learning in day-to-day teaching. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 45*(6). DOI: 10.1007/s11858-013-0512-8

García, F. J. (2005). *La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales*. Trabajo de Tesis doctoral. Jaén: Universidad de Jaén.

García, F. J. (2013). *Modificación de las praxeologías didácticas del profesorado: Un programa de desarrollo profesional en torno al aprendizaje por investigación*. Conferencia plenaria en el IV Congreso sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico, abril de 2013, Toulouse, Francia.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz-Higueras, L., y Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 226-246.

García, F. J., y Ruiz-Higueras, L. (2005). Mathematical praxeologies of increasing complexity: Variation systems modelling in secondary education. En M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1645-1654). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

García, F. J., y Ruiz-Higueras, L. (2010). Exploring the use of theoretical frameworks for modelling-oriented instructional design. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2166-2175). Lyon, Francia: INRP.

García, F. J., y Ruiz-Higueras, L. (2011). Modifying teachers' practices: The case of a European training course on modelling and applications. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 569-578). Dordrecht, Holanda: Springer.

García, F. J., y Ruiz-Higueras, L. (2013). *Task design within the Anthropological Theory of the Didactics: Study and research courses for pre-school*. Comunicación aceptada para el 22 Estudio ICMI -Task Design in Mathematics Education, julio de 2013, Oxford, Reino Unido.

Gascón, J. (1993). Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón de análisis-síntesis a la génesis del lenguaje algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *13*(3), 295-332.

Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(2), 203-231.

Kaiser, G., Sriraman, B., Blomhøj, M., y García, F. J. (2007). Report from the working group 'Modelling and Applications'- Differentiating perspectives and delineating commonalities. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth European Congress of the Research Society in Mathematics Education* (pp. 2035-2041). Larnaca, Chipre: University of Cyprus.

Kennedy, A. (2005). Models of Continuing Professional Development: a framework for analysis. *Journal of In-service Education*, *31*(2), 235- 250.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Llinares, S., y Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. Technologies, interactions and new forms of discourse. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Vol. 3. Participants in mathematics teacher education: Individuals, teams, communities and networks* (pp. 155-180). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Maaß, K., y Gurlitt, J. (2011). LEMA-Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo-Ferrri y G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (pp. 629-639). Dordrecht, Holanda: Springer.

Maaß, K, García, F. J., Mousoulides, N., y Wake, G. (2013). *Designing interdisciplinary tasks in an international design community*. Comunicación aceptada para el 22 Estudio ICMI -Task Design in Mathematics Education, julio de 2013, Oxford, Reino Unido.

Nikitina, S. (2006). Three strategies for interdisciplinary teaching: Contextualizing, conceptualizing, and problem-centring. *Journal of Curriculum Studies*, *38*(3), 251-271.

Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Modelling and applications in mathematics education. Introduction. En W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 3-32). Nueva York: Springer.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, Mª. J. González y M. Moreno (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la*

Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 107-126) Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses, Universidad de Zaragoza.

Rocard, M, Csermely, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Henriksson, H., y Hemmo, V. (2007). *Science education NOW: A renewed pedagogy for the future of Europe*. Bruselas, Bélgica: European Commission.

Rodríguez, E. (2005). *Metacognición, resolución de problemas y enseñanza de las matemáticas. Una propuesta integradora desde el enfoque antropológico*. Trabajo de Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Ruiz-Higueras, L., y García, F. J. (2010). Didáctica de las matemáticas y formación de maestros. En A. Bronner et al. (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-213). Montpellier, Francia: Université de Montpellier.

Ruiz-Higueras, L., y García, F. J. (2011). Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(1), 129-158.

Ruiz-Munzón, N. (2010). *La introducción del álgebra elemental y su desarrollo hacia la modelización funcional*. Trabajo de Tesis Doctoral. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Serrano, L. (2013). *La modelización matemática en los estudios universitarios de economía y empresa: Análisis ecológico y propuesta didáctica*. Trabajo de Tesis doctoral. Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Sierra, T. (2006). *Lo matemático en el diseño y análisis de organizaciones didácticas*. Trabajo de Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Tirosh, D., y Graeber, A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practices. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education* (pp. 643-687). Dordrecht, Holanda: Kluwer Academic Publishers (Springer).

Wenger, E. (2001). *Comunidades de práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* Barcelona: Paidós.

Wenger, E. (2006). *Communities of practice. A brief introduction* [http://www.ewenger.com/theory].

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo de los Proyectos "Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education across Europe" (FP7-SCIENCE-IN-SOCIETY-2009-1- 244380), "Mathematics and Science for Life" (FP7-SCIENCE-IN-SOCIETY-2012-1-320693) y "La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en Matemáticas y en Ciencias Naturales" (EDU2012-39312-C03-02).

[xiv] El símbolo "$\hookrightarrow$" no debe interpretarse como una inclusión, sino como el hecho de que la formulación de una dimensión de un problema didáctico requiere de una cierta formulación de la dimensión previa.

[xv] Acrónimo formado a partir de las universidades de los primeros integrantes de esta CdI: Universidad Autónoma de Barcelona, Universidad de Huesca, Universidad de Jaén y Universidades (Complutense y Autónoma) de Madrid.

[xvi] Algunas respuestas parciales a los mismos, resultantes del Proyecto, serán publicadas en el volumen 45, número 6, de la revista *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*.

[xvii] Entendido como una modelización praxeológica del conocimiento profesional del profesor.

CONTINUAR INVESTIGANDO TRAS LA TESIS DOCTORAL. RÉPLICAS A "construyendo una identidad" y "del cero hasta más allá del infinito"

Bernardo Gómez Alfonso

Universidad de Valencia

INTRODUCCIÓN

Compartimos esta audiencia dos investigadores jóvenes y dos sénior, de este contraste de generaciones es obligado preguntarse: ¿qué podemos decirnos unos a otros en relación con el tema objeto de este seminario?

La intervención de los ponentes que me anteceden ha dado cuenta de su respuesta. Para organizar la mía, tomo el referente de Freudenthal en *Problemas mayores en educación matemática* (1981), y lo hago como hizo él, formulando lo que para mí son preguntas principales para un joven investigador en educación matemática.

PRIMERA PREGUNTA

Mi primera pregunta se refiere a las aportaciones. Para situar la pregunta me referiré a la normalización de la investigación española en educación matemática. Corrían los años del final de la Dictadura Franquista, y empezaba el proceso de transición política. En esos años la investigación en Didáctica de las Matemáticas era incipiente, y estaba en gran parte en manos de los movimientos de renovación pedagógica, a menudo influidos por el debate político y el deseo colectivo de trabajar por la renovación educativa, política y social. Consecuencia de la fuerza iniciática de este movimiento colectivo fue la creación de sociedades de profesores, revistas profesionales y la renombrada colección Síntesis: Matemáticas cultura y aprendizaje (1987).

Nuevas leyes educativas propiciaron un cambio en el panorama investigador. Se reformó el modelo de la formación del profesorado (LRU, 1984); se institucionalizó el Área de Conocimiento de Didáctica de la Matemática y se crearon los Departamentos homónimos (1986) que desarrollaron programas de doctorado específicos. Con esto se normalizó la investigación en Didáctica de la Matemática dentro del sistema universitario, facilitando el acceso a fuentes de financiación Nacionales e internacionales de I+ D+i, y la presencia y colaboración en congresos, publicaciones y estudios internacionales. En este panorama normalizador de la investigación en didáctica de la Matemática merece mención especial, la constitución de la SEIEM, como foro de comunicación e impulso para la investigación en educación matemática, y que a fecha de hoy logra su madurez con la reciente aparición de su revista oficial AIEM.

En gran medida gracias a estos logros se ha constituido una importante comunidad de investigadores, con proyección y visibilidad nacional e internacional. Los didactas de las matemáticas españoles cuentan hoy con un clima más favorable para su actividad investigadora que hace no tantos años. Aunque, este clima es el resultado de los esfuerzos de una generación que se renueva y de otra que empuja con gran vitalidad, los peligros están al acecho. El deterioro de las condiciones de trabajo, la escasez de medios y los obstáculos en la carrera profesional, está propiciando un cambio en los objetivos: Acreditación e impacto son los nuevos sacramentos.

De esta digresión se sigue mi primera pregunta: ¿Qué aportan o que deberían aportar nuestros jóvenes investigadores en relación con la educación matemática?

Gómez, B. (2013). Réplicas a "Construyendo una identidad" y "Del cero hasta más allá del infinito". En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 109-115). Bilbao: SEIEM.

SEGUNDA PREGUNTA

Mi segunda pregunta se dirige hacia lo importante. Para introducir la pregunta he elegido un ejemplo del lúcido texto de Kline (1978): *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*

> “La maestra pregunta:
>
> «¿Por qué es 2+3=3+2?»
>
> Los estudiantes responden decididamente:
>
> «¿Por qué ambos son iguales a 5?»
>
> «No -reprueba la profesora-. La respuesta correcta es: por qué se cumple la propiedad conmutativa de la suma» …
>
> Los padres, ansiosos por conocer los progresos hechos por sus niños, también les preguntan. Un padre le pregunta a su hijo de ocho años: «¿Cuántas son 5+3??» Por toda respuesta obtiene que 5+3=3+5, por la propiedad conmutativa”. (p. 6)

Con este ejemplo, doy pie a mi segunda pregunta: ¿Qué debería ser lo importante para un joven investigador en educación matemática?

TERCERA PREGUNTA

Mi tercera pregunta se dirige a la ruta para ser experto. Para introducirla recurro a un extracto del libro *Matemática moderna y nueva pedagogía,* de Stephen White (1973).

“Me propongo darte alguna idea de las etapas que ordinariamente hay que recorrer para llegar a la categoría de experto jugador de bridge. El tema, después de todo, sigue siendo aquí la educación…. Se empieza con un vivo deseo de aprender a jugar muy bien al bridge. Este afán puede venir de una o de varias fuentes: … de alguna necesidad social, real o imaginaria… en la mayoría de los casos, el aprendiz empieza procurándose algunos libros sobre el bridge y estudiándoselos. Libros de iniciación los hay a docenas. El interesado elige uno que le recomienda algún jugador de bridge conocido suyo, y se pone a aprendérselo … Como los expertos todavía no quieren jugar con él, en esta fase se tendrá que buscar parejas y contrincantes entre los jugadores cuya habilidad sea más o menos parecida a la suya. Así y todo, va adquiriendo un poco de soltura, y, si siente verdadera afición por el juego, empieza a tomar nota de sus aciertos y sus fallos y a reflexionar sobre las causas de unos y otros… Esta etapa del proceso de aprendizaje se hace muy cuesta arriba y requiere trabajar de firme, es preciso superarla si se quiere llegar a ser un experto… El aprendiz conversa, discute y contrasta sus opiniones dentro del círculo de sus compañeros de juego. La mayoría de ellos saben de bridge no más que él, pero, al verse forzado a defender sus puntos de vista y a analizar los de los otros, va aprendiendo poco a poco. Es esta una extraña serie de contrastes y verificaciones, por las que un grupo logra elevar rápidamente el nivel de sus conocimientos (p. 121-133).

Con este texto, formulo mi tercera pregunta: ¿Cómo se llega o cómo se debería llegar a ser experto investigador en educación matemática?

“CONSTRUYENDO UNA IDENTIDAD…”

P.1. En el texto de Javier: “Construyendo una identidad…”, lo que parece más importante, lo que va por delante, lo que viene en el primer apartado es el relato de su pertenencia a unas CP (Comunidad de Práctica) y CdI (Comunidad de investigación), cuya actividad se describe bajo el modelo general de la TAD (Teoría antropológica de la didáctico), y específicamente en el marco de los PIs (Praxeologías, de *Praxis*: Práctica, en oposición a teoría o teórica, y *Logos*: razón: principio racional del universo. RAE) que son una manifestación de un plan de investigación descompuesto en cuatro componentes: tareas, técnicas, tecnologías y teorías. No queda claro dónde se ubican otras componentes de la investigación didáctica como, por ejemplo, las de comunicación, las de cognición, o las de representación.

Especial importancia atribuye al uso del patrón heurístico de desarrollo de problemas didácticos P_δ, dado por el esquema: $P_0 \oplus P_1 \hookrightarrow P_2 \hookrightarrow P_3 \hookrightarrow P_\delta$. Mediante este diagrama, diferencia entre problema docente (P_0) y problema didáctico (P_δ). El P_0 es pre-científico, por lo que requiere ser reformulado para generar un verdadero problema de investigación, a través de las dimensiones epistemológicas (P_1), económicas (P_2) y ecológicas (P_3), para llegar a ser un problema didáctico.

Con este bagaje el ponente deja clara su intención, señala su prioridad, e identifica la hermandad a la que se adscribe, esto es la terna formada por correligionarios, creencias y votos compartidos (traducción coloquial de lo que es denomina: Comunidad, empresa y compromiso), y como tal reservada a los iniciados, cuyo riesgo es verse aislados y renunciar a lo que está fuera de su mundo. Sentimiento que se ve reforzado por las referencias que utiliza para sustentar su documento.

P.2. En el siguiente apartado, tras la declaración de principios introductoria, el investigador da cuenta de lo que aporta en su trabajo de tesis doctoral. Tras plantearla en términos de congruencia módulo praxeología + problema docente, señala que su problema docente es la enseñanza de la proporcionalidad, pero nos hurta su razón de ser al no dar cuenta de por qué es un problema docente, ni cómo lo caracteriza; pero eso sí, lo sitúa ligándolo a las dos primeras de las cuatro preguntas iniciáticas: el qué, el cómo, el cuándo y el porqué de su enseñanza.

Como hipótesis adelanta su opinión de las causas del problema docente que ha elegido, señalando que procede del fenómeno de encierro o aislamiento en sí misma de la proporcionalidad, no solo en la investigación sino en su tratamiento escolar. Sustenta esta hipótesis de trabajo en el predominio de la dimensión cognitiva en la investigación precedente y en que está enfocada en el razonamiento proporcional. Esto es muy cuestionable, ya que es fruto de una mirada sesgada a los aportes de la investigación focalizada en la psicología cognitiva influida por el papel central que Piaget asignó a al razonamiento proporcional en el razonamiento formal (Hinhelder y Piaget, 1958). Es cierto que la psicología cognitiva es insuficiente para dar cuenta de los problemas educativos asociados a la proporcionalidad, por eso llama la atención que el ponente no mencione otras aportaciones más centradas en lo matemático, muchas de ellas presentes en la literatura en español (e.g., los trabajos de Freudhental, 1983 y 2001, Pluvinage y Dupuis 1981; Fiol y Fortuny, 1990; Vergnaud, 1981, 1983).

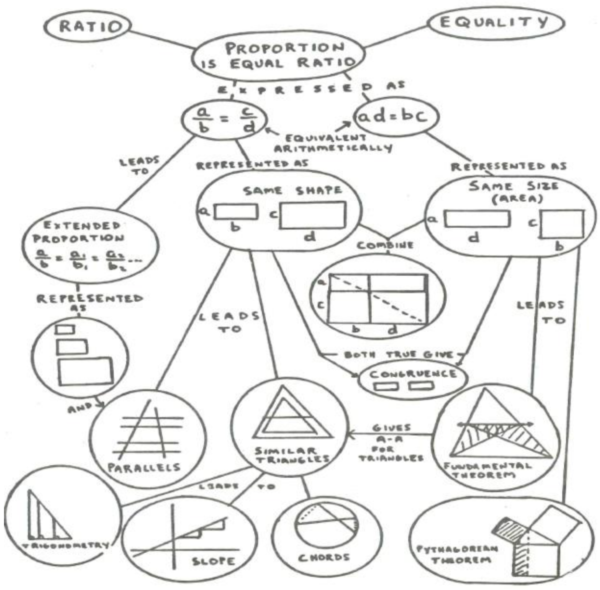
Su idea de partida es la existencia un modelo epistemológico de la proporcionalidad, que se desprende de los libros de texto y del diseño de la proporcionalidad. En sí mismo esto es un acto de fe, dado que no lo caracteriza, y no tiene en cuenta la variedad de ritos y los cambios que ha sufrido la enseñanza de la proporcionalidad a lo largo de los diferentes planes de estudio y la influencia de las inercias del pasado y de las culturas locales, en particular la terna matemáticas tradicionales, matemáticas modernas y matemáticas concretas (Pluvinage y Dupuis, 1981; Gómez, 2006).

Por otra parte, el fenómeno del aislamiento no parece que sea algo más que un lugar común, producto de un modelo de enseñanza diseñado para dar respuesta a las necesidades de la escuela graduada, donde las matemáticas no se organizan por ejes temáticos, sino por niveles, bloques temáticos y “ramas” de las matemáticas.

Pero, he aquí que el investigador parece caer en su propia red, ya que aísla su experimento sobre la enseñanza de la proporcionalidad a un par de cursos: 4º de la ESO y 1º de Bachillerato, perdiendo el referente de lo que ocurre antes y después de esos cursos, y en su proyección en otros ámbitos del curriculum (no solo de la matemática sino de las ciencias) donde está presente, como por ejemplo, en el cambio de unidades, porcentajes, escalas, mapas y maquetas, interpolación de medios en las progresiones, problemas de «clásicos» de regla de tres, de acciones simultáneas, teorema de Thales, funciones trigonométricas, semejanza de figuras, medición de distancias inaccesibles, pendiente, probabilidad, todos ellos modelados mediante la función lineal, etc.

Por añadidura, también aísla la proporcionalidad, al separarla de sus prerrequisitos: la co-variación simultánea y el resto de elementos del campo conceptual multiplicativo: multiplicación, división, fracciones, razón y proporción, linealidad y multilinealidad (Vergnaud, 1983).

También se aísla de sus problemas fundamentales: el tránsito de la razón interna a la razón externa (Freudenthal, 1983 y 2001, Fernández y Gómez, 2007), el paso del método aritmético al cartesiano en la linealidad (Gómez, 2007) y la interrelación entre la variedad de relaciones y significados que unifica la proporcionalidad en su diferentes niveles de complejidad, resaltando como fluyen (o se siguen) unas de otros como se muestra, por ejemplo, en el esquema de Solomon para la geometría.



Esquema conceptual de Solomon (1987)

P.3 En el tercer apartado del documento se nos da a conocer el camino que ha seguido el investigador para llegar a ser considerado un experto. Siguiendo la lógica del jugador de Bridge en esta fase se busca jugadores cuya habilidad sea más o menos parecida a la suya, donde al verse forzado a defender sus puntos de vista y a analizar los de los otros, va aprendiendo poco a poco, logrando elevar rápidamente el nivel de sus conocimientos.

Aquí, se produce el mestizaje y la tensión por el conflicto de ideologías. Su recorrido por el LEMA, COMPASS, PRIMAS, enriquece y diversifica su identidad y deja entrever el coste que le supone en términos de alejamiento de su hermandad inicial BAHUJAMA. En este sentido es significativo el giro copernicano dado a su problema docente inicial hacia lo cognitivo (p. 15) e incluso hacia lo no matemático: creencias y ciencias experimentales.

No queda si en este giro el ponente mantiene su posicionamiento en la modelización y aplicaciones, pero en cualquier caso le falta por definir cuál es su posición. Ya que, al igual de lo que ocurre con la “resolución de problemas” (ver Schroeder y Lester, 1989), el propósito de incorporar la modelización puede ser para enseñar *sobre* modelización, *para* modelizar, o *vía* modelización, según que lo que se desee es que los estudiantes aprendan estrategias de modelización, que apliquen los conocimientos matemáticos ya aprendidos a la modelización, o que usen la modelización para aprender nuevos conocimientos matemáticos. Aquí, la experiencia de lo que ha pasado en la resolución de problemas nos enseña mucho.

“DEL CERO HASTA MÁS ALLÁ DEL INFINITO…”

P.1 En el texto de Miguel: “Del cero hasta más allá del infinito…”, lo primero, su punto de partida, es un problema de enseñanza (no es ni docente, ni didáctico en el sentido de Javier, ni tampoco es de aprendizaje). El ponente, identifica su problema de enseñanza desde la reflexión sobre la propia práctica: el descontento que le produce el modelo de formación de profesores en su país, y decide constituirse en un agente de cambio del sistema educativo. Pero para esta empresa hace falta saber qué es lo que está mal y porqué, de lo cual no dice nada.

Coincido en que la reflexión sobre la propia práctica es importante, pero no me queda claro si es un buen punto de partida, porque si no se reflexiona sobre el propio aprendizaje: lo que uno sabe y es o no es capaz de hacer, y lo que uno está dispuesto a hacer, la reflexión puede quedar en el vacío.

A continuación, el ponente, hace una reflexión sobre su propio proceso de elaboración de tesis doctoral, señalando que hay una analogía o paralelismo con el proceso de resolución de problemas. Incluso señala que hacer la tesis hace ser un mejor resolutor de problemas (¿a qué clase de problemas se refiere con esta afirmación?). Qué duda cabe que hacer la tesis ayuda a mejorar el conocimiento de cómo se hace una tesis doctoral, pero no está tan claro que ayude a ser mejor resolutor de problemas aritméticos, o algebraicos, pongo por ejemplo. Sería muy enriquecedor que el ponente nos iluminara acerca de cómo las heurísticas de resolución de problemas matemáticos son análogas a las de la resolución de una tesis doctoral.

P.2

Sitúa su trabajo en la línea de investigación conocida como desarrollo y conocimiento profesional del profesor. Parafraseando a Mendoza en “el tocador de señoras”, se propone “tirar un tiro”, pero su ángulo de tiro es muy elevado ya que su objetivo es formar profesionales activos, críticos, reflexivos y conocedores de los contenidos y temas que han de enseñar. Esto está muy bien, pero ¿cómo se logra? Su propuesta es indagar en las socorridas “dimensiones y subdimensiones” del conocimiento profesional descritas por Ball y su colegas (Ball et al. 2008). Pero al poner el ojo en un imaginario conocimiento ideal del profesor parece prescindir de lo que ha sido siempre un referente seguro: el conocimiento del profesor ideal imaginario; es decir, del profesor que acredita las mejores prácticas.

El desarrollo de instrumentos para la caracterización del “Conocimiento matemático para la enseñanza” (CME en español, MKT en inglés) descritas por el equipo de la U. de Michigan (D. Ball, H. Hill, H. Bass y otros, a partir de las ideas de Shulman) es una línea de investigación de interés y actualidad para la Didáctica de la Matemática. Sin embargo, conviene no perder de vista que al igual que ocurrió con las ideas de Piaget, de esta caracterización no se sigue una propuesta directamente aplicable a la mejora de la enseñanza y formación de profesores. Lo que está por ver es cómo estas categorías iluminan el problema de investigación.

Tampoco está claro que la especificación de las categorías del CME (MKT) sobre una muestra de conveniencia que se reduce a dos personas, de las que no se establece claramente cuál es su conocimiento y preparación matemática, pueda servir para enriquecer la formación del profesorado en general y que esto se sustancie en aportaciones que le den proyección o utilidad formativa práctica o teórica.

Por otra parte, la especificidad de los distintos conocimientos matemáticos puede poner en cuestión la validez de las categorías generales que se pretenden utilizar para situaciones particulares, en la medida en que el elemento diferenciador de las investigaciones en Educación Matemática debe o no ser el análisis profundo y riguroso de los conceptos matemáticos sobre los que se investiga. En este sentido confunde la referencia al trabajo del grupo de Ball, dado que este se sustenta en grandes muestras de población y en cuestionarios muy bien planificados acerca de la calidad matemática en la instrucción.

La reflexión es una constante en el discurso del ponente que considera que se maximiza cuando los más expertos orientan a los menos expertos, en un proceso que es análogo tanto para el investigador en formación como para el profesor en formación. En este caso, no es que sea un proceso análogo sino que es el mismo proceso, ya que el profesor en formación y el investigador en formación son la misma persona. Claro que entonces, ¿qué papel juega el libro de texto?, ¿el diseño curricular?, ¿el conocimiento de la matemáticas?, ¿el conocimiento de las matemáticas del curriculum?, etc., en la formación de un profesor, si ésta descansa principalmente en la reflexión del profesor que es a la vez investigador que oye y aprende de la reflexión en colaboración con otros más expertos.

P.3 En la parte final del documento Miguel da cuenta de su trayectoria una vez finalizada la tesis. Aquí proyecta hacia el futuro el trabajo previo desarrollado en el doctorado, continuando con el "grupo de Huelva", y enlazando con elementos que trabajan directamente con el grupo de la Universidad de Michigan. ¿Será más de lo mismo, o será una nueva perspectiva sobre bases más sólidas?

CIERRE

Nunca en España ha habido tanta gente dedicada a la investigación en educación matemática, y nunca se ha escrito e investigado tanto sobre sus problemas educativos, sean docentes o didácticos. La mayor parte de los investigadores están casi obligados a concentrarse en áreas limitadas, para mantenerse al corriente de las creaciones de otra gente y producir resultados propios, haciendo que la actividad investigadora actual sea de gran especialización.

Lo que podría estar mal en el actual plan de trabajo no es tanto la especialización de los problemas que se tratan como el aislamiento de los abordajes a esos problemas entre sí, y de sus producciones, dando la imagen de que lo que dicen unos investigadores sobre un mismo problema no tiene nada que ver con lo que dicen otros sobre el mismo problema.

La Didáctica de las matemáticas corre el peligro de cerrarse sobre sí misma, de alimentarse de sí misma, y aunque es muy probable, que la mayor parte de la investigación que se hace contribuya al avance de la disciplina, ha llegado el momento de preguntarse si siguiendo por este camino se está generando conocimiento útil para mejorar la educación matemática, y si hoy están nuestros maestros, profesores y alumnos más y mejor preparados para enseñar y aprender matemáticas que ayer.

Con esta reflexión cierro mi intervención, deseando fervientemente mucho éxito a nuestros jóvenes investigadores.

Referencias

Fernández, A. (2001). Precursores del razonamiento proporcional: Un estudio con alumnos de primaria. (Tesis doctoral). Universitat de València, España.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Fernández, A., y Gómez, B. (2007). Una organización de tareas de razón en semejanza para el diseño de un modelo de enseñanza. En M. Camacho; P. Bolea; P. Flores; B. Gómez; J. Murillo, Mª T. González (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM* (pp. 173-180). Tenerife.

Fernández, A., y Puig, L. (2002). Análisis fenomenológico de los conceptos de razón, proporción y proporcionalidad. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, vol. 5, núm. 2.

Fiol, M.L., y Fortuny, J.M. (1990). *Proporcionalidad directa*. *La forma y el número.* Madrid: Síntesis nº 20.

Freudhental, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 133-150.

Freudhental, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel.

Freudhental, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Traducción Luis Puig. México: Cinvestav I.P.N. Departamento de Matemática Educativa.

Inhelder B., y Piaget J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence.* N.Y.: Basic Books.

Gómez, B. (1999). Tendencias metodológicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del análisis de los libros de antiguos: el caso de los problemas de compañías. *Revista latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, *2* (3), 19-29.

Gómez, B. (2007). La razón en semejanza: el caso del perrito. En E. Castro & J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en educación matemática: pensamiento numérico. Libro homenaje a Jorge Cázares Solórzano* (pp. 237–257). Granada: Editorial universitaria de Granada.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Eds.), *José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática* (pp. 47-69). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Gómez B. (2007). Problems of a linear kind: from Vallejo to Peacock. In Demetra Pitta–Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth CERME 5* (pp. 882-891). Larnaca, Cyprus. ERME. Department of Education. University of Cyprus.

Kline, M. (1978). *El fracaso de la matemática moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?* Madrid. Siglo XXI. (1ª ed. 1973).

Pluvinage, F., y Dupuis, C. (1981). La proportionnalité et son utilisation. *Recherches en didactique des Mathématiques*, *2*(2), 165-212.

Solomon, A. (1987). Proportion: Interrelations and meaning in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *7*(1), 14-22.

Schroeder, T.L., y Lester, F.K. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. In P.R. Trafton (Ed.), *New directions for Elementary School Mathematics, 1989 Yearbook of the NCTM* (pp. 31-42). Reston, VA: NCTM.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematical concepts and processes* (pp. 127-174). N. Y.: Academic Press.

Vergnaud, G. (1991). *L'enfant, la mathématique et la realité. Problémes de l’enseignement des mathématiques à l’école élémentaire*. 4ª Ed. Berne-Frankfurt-New York-Paris. Peter Lang. 1981 (Edición en español de Trillas)

White, S. (1973). *Matemática y nueva pedagogía*. Barcelona: Promoción cultural.

LLEGAR A SER UN INVESTIGADOR EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Becoming a researcher in mathematics education

María Luz Callejo de la Vega

Universidad de Alicante

Resumen

La identificación de trayectorias para "llegar a ser un investigador en didáctica de las matemáticas" en nuestro contexto institucional es una actividad que puede aportar conocimiento sobre nuestra propia comunidad. Usando como referencia las descripciones de las trayectorias de Francisco Javier García y C. Miguel Ribeiro planteo algunas ideas y perspectivas de futuro. Destaco los aspectos que considero interesantes para comprender mejor lo que significa llegar a ser un investigador en didáctica de las matemáticas en nuestro contexto. En mi exposición me referiré a las condiciones que hacen posible las trayectorias, para constatar los avances realizados y señalar algunos objetivos que se podrían vislumbrar.

Palabras clave: *didáctica de las matemáticas, comunidades de práctica, trayectoria de investigación.*

INTRODUCCIÓN

La trayectoria para llegar a ser un investigador en el área de didáctica de las matemáticas se desarrolla en el seno de *comunidades de práctica* (Wenger, 1998) que tienen objetivos comunes, comparten y desarrollan un discurso y un repertorio de recursos, y cuyos miembros se apoyan mutuamente. La socialización e interacción en el seno de comunidades de práctica que comparten un dominio de investigación específico va configurando en cada miembro una *identidad* como investigador y va produciendo aprendizaje en la medida en que el investigador comparte y construye significados y participa en prácticas colectivas (Lave y Wenger, 1991). Estas comunidades tienen una visibilidad en la medida en que discuten y exponen sus trabajos en diferentes ámbitos reconocidos por la comunidad más amplia de la que forman parte, en nuestro caso en la comunidad de didactas de la matemática, que organiza seminarios y congresos y difunde los resultados de las investigaciones a través de publicaciones.

Desde esta perspectiva nos acercamos a las trayectorias de investigación de Francisco Javier García y C. Miguel Ribeiro. Destacaré los aspectos que considero interesantes para comprender mejor lo que significa llegar a ser un investigador en didáctica de las matemáticas en nuestro contexto. Centraré la atención en las condiciones que hacen posible las trayectorias, como punto de partida para constatar los avances realizados y señalar algunos objetivos que se podrían vislumbrar.

CONSTRUYENDO UNA IDENTIDAD: COMUNICACIÓN DE F. J. GARCÍA

Francisco Javier García introduce su trayectoria en el marco de las comunidades de prácticas (Wenger, 1998) desde una perspectiva social del aprendizaje (Lave y Wenger, 1991). Especifica cómo la práctica se puede convertir en una conexión entre comunidades así como la relación entre

Callejo, M.L. (2013). Llegar a ser un investigador en Didáctica de las Matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 117-124). Bilbao: SEIEM.

identidad y participación. Enmarca su trayectoria investigadora de la siguiente manera (García, 2013):

> Actividad de aprendizaje a lo largo de toda la vida (profesional, al menos), que es una empresa colectiva que habitualmente el investigador no realiza en solitario, y que progresa en función de su adscripción a diferentes comunidades, de los problemas que aborda, de los resultados que va obteniendo y de los nuevos problemas que van emergiendo.

Considero que, en pocas líneas, García ha resumido varios aspectos que son importantes en una trayectoria investigadora: aprendizaje permanente, trabajar con otros – lo que implica llegar a compartir unos referentes - y dinamismo. Pasaré a comentar cómo estos aspectos están presentes en la exposición que hace de su trayectoria profesional.

No por obvia quiero dejar de subrayar que se trata de un "aprendizaje a lo largo de toda la vida". Este aprendizaje no termina con la defensa de la tesis doctoral y de las publicaciones que de ella se derivan, sino que va avanzando en la medida que el investigador va ampliando el horizonte de problemas de investigación. Una característica implícita es que el investigador novel va adquiriendo autonomía con relación a quienes le iniciaron y acompañaron en la etapa de elaboración de la tesis doctoral, se va relacionado con otras comunidades de investigación, dirige tesis y proyectos de investigación y produce conocimiento.

Dice García que este aprendizaje a lo largo de toda la vida es una "empresa colectiva que habitualmente el investigador no realiza en solitario". Él, como otros de su generación -y esto es un privilegio que otras generaciones no tuvimos a nuestro alcance- tuvo la suerte de encontrarse y participar en varias comunidades de práctica donde compartir un dominio de conocimiento, construir significados compartidos y compartir herramientas de trabajo para investigar. Estas comunidades le ayudaron a iniciarse en la investigación y a ir consolidando una línea de trabajo. En su caso destaco dos situaciones de distintas características:

- *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* (Baeza, 1998).
- *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME, Barcelona, 2005).

Los miembros del seminario interuniversitario forman una comunidad de investigación con fuerte identidad, con prácticas bien definidas, muy activa, con implantación en distintas universidades españolas y de otros países, con relaciones sistemáticas entre los distintos grupos y con proyección internacional (Ruíz et al., 2001). Esta comunidad empezó como *Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas* en 1991, se transformó en 1998 en grupo de trabajo de la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM) hasta diluirse en 2005 dentro del grupo *Didáctica de la Matemática como Disciplina Científica* de la SEIEM (Gascón, 2012).

Quiero destacar la importancia de la consolidación de esta práctica de grupos de trabajo con la creación de la SEIEM, como espacio para acceder, compartir y difundir conocimiento en una línea específica, porque es una puerta de acceso para los jóvenes investigadores a una comunidad más amplia, un ámbito de socialización con otras personas de su generación y de otras generaciones.

Este grupo de trabajo se enmarca en uno de los cuatro ámbitos que Llinares (2008) ha identificado en la investigación que se está realizando en Didáctica de la Matemática en España: *Construcción del significado matemático y de la actividad matemática*. Y dentro de él en dos agendas de investigación: (i) la propuesta de modelos teóricos para describir y explicar (modelo ontosemiótico) y (ii) el diseño de la enseñanza y su influencia en el desarrollo de la comprensión (teoría antropológica de lo didáctico- TAD). En estas agendas coexisten diversos enfoques, de ahí la necesidad de discutir los trabajos en otros foros como los simposios o congresos nacionales o internacionales.

La participación en 2005, año de defensa de la Tesis doctoral, en el *Congreso de la Sociedad Europea de Investigación en Educación Matemática* acerca a García a otra comunidad de investigación que incluye entre sus grupos el de "Modelling and applications", una comunidad menos delimitada que la anterior donde se visibilizan distintos enfoques y planteamientos de la modelización matemática y aplicaciones, que le abre el campo a la participación en varios proyectos europeos.

En cuanto a la evolución y dinamismo, García ha mantenido una cierta continuidad en su línea de trabajo y se ha ido abriendo a otras nuevas, en concreto a proyectos europeos tras la realización de su Tesis doctoral. Esta evolución es un indicador de aprendizaje como consecuencia de la práctica compartida. Él mismo identifica dos trayectorias: participación en comunidades de investigación europeas y evolución de su identidad en la Comunidad BAHUJAMA.

En la primera se plantea como pregunta: *Como profesor, ¿qué tengo que enseñar a mis alumnos y cómo tengo que enseñarlo, a propósito de la proporcionalidad?* La participación en los proyectos europeos, donde los componentes del grupo de investigación tienen diversidad de praxis de investigación, le ha hecho compartir con un grupo amplio un problema docente, formulado de forma más general en términos de las nociones de la cultura escolar, y no un problema formulado en términos de investigación. La participación en una comunidad heterogénea que él denomina "constelación de comunidades" le obliga a cambiar el centro de atención y a negociar continuamente significados. Por un lado cambia el foco de la investigación: se centra en el conocimiento y desarrollo profesional del profesorado, primero referido a la modelización e interdisciplinariedad (proyectos LEMA y COMPASS) y después al aprendizaje por investigación entre el profesorado (proyecto PRIMAS). Por otro lado, también merece destacar que llega a abordar un problema de investigación formulado en términos cognitivos (conocimiento y creencias del profesorado), dimensión que no estaba presente en la TAD. Por último García ha llegado a trabajar con investigadores de otro área de conocimiento, didáctica de las ciencias experimentales. Esto muestra una gran capacidad de apertura, de entrar en diálogo con otras visiones y perspectivas. Podríamos decir que a lo largo de su trayectoria ha construido una identidad con múltiples pertenencias, lo que supone una gran riqueza de apertura y posibilidades para el futuro.

Por último quiero destacar la visibilidad nacional e internacional de su trabajo mediante publicaciones internacionales como las revistas *ZDM* (2006) y *Revista Latinoamericana de Investigación en Educación Matemática* (2011), capítulos de libros (2011 y 2013) y comunicaciones en congresos (*Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 2005 y 2010).

DEL CERO HASTA MÁS ALLÁ DEL INFINITO: COMUNICACIÓN DE C.M. RIBEIRO

La comunicación de C. Miguel Ribeiro está impregnada por su visión de lo que entiende por investigar: un proceso de resolución de problemas, dinámico y creativo; un ejercicio que se hace en colaboración con otros, que abre a nuevas preguntas y proporciona nuevas estrategias de resolución de problemas, que capacita para abordar nuevas líneas de trabajo y para romper barreras; un proceso de toma de decisiones que implica elegir y descartar. A lo largo de su exposición alude con frecuencia a su actividad del resolutor de problemas: identificando un problema y otros nuevos que van emergiendo, buscando estrategias de resolución, revisando y discutiendo resultados.

El inicio de su trayectoria investigadora está marcado por una insatisfacción respecto a la forma, el tipo y el contenido de la formación de profesores, en la institución donde trabajaba como formador de profesores en el área de matemáticas; es en este ámbito laboral donde se despierta su deseo de investigar. La situación problemática que vislumbra Ribeiro es un potencial punto de partida para delimitar un problema de investigación, formular preguntas y diseñar una investigación. Ribeiro buscaba por una parte construir conocimiento para comprender la problemática detectada y por otra vislumbrar estrategias para hacer propuestas de mejora en la formación del profesorado. Esto le situó en una clara agenda de investigación: el desarrollo profesional del profesor de matemáticas (Llinares, 2008; Ponte, 2008).

Inicialmente se preguntó:

> Que dimensões do conhecimento profissional (crenças, conhecimentos, objetivos e tipos de comunicação matemática promovidos) estão subjacentes às ações dos professores (envolvidos num grupo de trabalho colaborativo), enquanto lecionam uma aula de matemática no 1º Ciclo? Como se relacionam essas dimensões? De que forma "evoluem" ao longo do tempo?

Estas y otras cuestiones que formula en su comunicación se pueden abordar de forma aislada o conjunta pero Ribeiro, que pretendía integrar investigación y formación de profesores, las considera de forma conjunta e interdependiente (por lo que existe un fuerte énfasis en subrayar la relación dialéctica entre investigación y práctica). Y así espera llegar a abordajes e ideas innovadoras:

> Uma postura desse tipo, associado a um pensamento visionário, permitirá abrir caminhos promissores para novas linhas de trabalho que garantam uma sustentada continuidade e evolução de perguntas emergentes do trabalho realizado, bem como as posteriores ações e projetos de investigação vinculados à trajetória.

Por otra parte, el trabajo colaborativo entre investigadores, que implica cuestionamiento, discusión y reflexión, va modelando las preguntas de investigación que se va haciendo a lo largo de su trayectoria y alumbrando nuevas líneas de investigación. Este trabajo se desarrolla en el grupo de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva y se concreta en el conocimiento matemático para la enseñanza:

> MKT das professoras, seu conteúdo, papel e impacto na prática letiva. Este foco no MKT associado às situações matematicamente críticas identificadas e uma perspectiva de análise como um estudo de caso instrumental (...) levou à discussão do conteúdo do MKT – focalizando nos seus subdomínios e problematizando a definição das suas fronteiras –, ao reconhecimento de dificuldades e condicionantes diversificadas em aceder ao conhecimento do professor apenas pela análise da prática letiva, e à identificação de aspetos específicos do conhecimento do professor que urgirá melhorar.

Reconoce que el trabajo colaborativo, "los otros", ya se trate del Grupo de la Universidad de Huelva o la participación en congresos y seminarios, desempeña diversas funciones en todas las etapas de la trayectoria investigadora:

> Se por um lado, as discussões com investigadores experientes contribuem para elevar a um nível superior a reflexão e raciocínio crítico possibilitando desenhar e desenvolver estratégias que permitam solucionar os problemas com que nos encontramos, por outro lado, as discussões com outros que se encontram em situação similar permitem obter o apoio de saber que não estamos sozinhos e que, alguns desses nos acompanharão nos futuros trilhos a traçar. Por ser esta a perspetiva do grupo em que me encontro inserido, tornou-se possível desenvolver um conjunto diversificado de estratégias que têm vindo a contribuir para solucionar alguns dos problemas encontrados (mas também decidir por que caminhos não seguir), e para a emergência de outros.

Este trabajo implica apertura a otras personas y a otros contextos. Por una parte es necesario y conveniente formar parte de un grupo de investigación donde compartir y discutir marcos teóricos y modos de llevar a cabo una investigación, pero el trabajo no se puede quedar ahí, es preciso abrirse a otros contextos donde contrastar y discutir, ampliar el círculo discutiendo con otros grupos. Destacaría en el caso de Ribeiro su participación y la de su grupo en seminarios y congresos nacionales e internacional como los *Simposio de la SEIEM* (2008, 2009, 2010 y 2012) el *Congress of European Research in Mathematics Education* (CERME) (2013), o la *Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME, 2011 y 2013). Esto es una muestra de la visibilidad de su trabajo. Destaco la presentación de trabajos en la SEIEM durante la elaboración de su tesis y después de su presentación en 2010, y las comunicaciones en congresos internacionales tras la defensa de la misma.

Riberio comparte al final de su comunicación el deseo de elevar el pensamiento, de pasar a un nivel superior, y citando a Camoes habla de *navegar por mares nunca dantes navegados*. Propone tres líneas de trabajo interrelacionadas: formación de profesores, conceptualización del conocimiento del profesor teniendo en cuenta su especificidad y contexto.

Y si el comienzo de su trayectoria investigadora estuvo marcado por una insatisfacción sentida en su trabajo como formador de profesores, al mirar hoy el recorrido realizado manifiesta su satisfacción del deber cumplido y la consciencia de un camino *bien* recorrido.

LLEGAR A SER UN INVESTIGADOR EN DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

En las trayectorias de investigación de García y Ribeiro se pueden apreciar algunas semejanzas y diferencias. Observamos aspectos comunes que son básicos en la actividad investigadora, aspectos que pueden estar más o menos logrados en cada una de ellas y aspectos que son complementarios. Destacaría como aspectos comunes:

- El aprendizaje en una comunidad de práctica evidenciada por la realización de sus Tesis doctorales insertos en grupos de investigación con agendas y prácticas de investigación bien definidas;
- la visibilidad de su trabajo a través de la participación en congresos nacionales e internacionales;
- la apertura a otras problemáticas dando continuidad a su trabajo; y
- la visión de este proceso como aprendizaje permanente.

Destacaría entre las diferencias el distinto origen que motivó el inicio de esta trayectoria: la inserción laboral en un contexto institucional (García) y la relación dialéctica entre la práctica y la investigación (Ribeiro) y la evolución de sus agendas de investigación.

El aprendizaje en una comunidad de práctica

Las exposiciones que García y Ribeiro hacen de cómo entraron en contacto con el mundo de la investigación a través de su trabajo de Tesis doctoral indican dos acercamientos diferentes. Francisco Javier García se acerca a través de un grupo de investigación con una agenda de trabajo y unas prácticas compartidas, y C. Miguel Ribeiro se integra en un grupo de investigación tras plantearse una problemática a partir de la insatisfacción que vive en su contexto profesional. La socialización de García en el grupo precede a la delimitación del problema de investigación, que forma parte de la agenda de investigación del grupo y que será objeto de la Tesis doctoral; sin embargo en el caso de Ribeiro el problema de investigación precede a la incorporación al grupo de investigación. En ambos casos se ha dado una confluencia de intereses personales y colectivos pues, como indican ambos ponentes, la investigación tiene una dimensión personal y social.

Su iniciación nos remite además a las dimensiones cognitiva, afectiva y social de la investigación como actividad humana. Porque investigar es preguntarse y cuestionarse, pero es también deseo, pasión por averiguar qué pasa ante un problema que se nos presenta o que intuimos, es curiosidad por saber y conocer sobre algo, es buscar alguna respuesta ante una duda o problema que afrontamos. La realización de una Tesis es una actividad académica en la que se va de la mano de otra u otras personas expertas que acompañan como tutores y que sostienen un trabajo que a veces es arduo y pesado, no solo para el doctorando sino también para quien lo dirige, que presenta dificultades y obstáculos, aunque también produce satisfacciones.

Consideramos la importancia del papel que desempeñan las comunidades de práctica para el desarrollo posterior de “llegar a ser un investigador”; en este caso las comunidades de investigadores más o menos articuladas. En particular, las dimensiones de la práctica de investigar (Wenger, 1998) permiten ayudarnos a comprender las trayectorias realizadas:

- Compartir la problemática que aborda la comunidad de investigación y los marcos teóricos que utiliza y negociar significados.
- Usar de forma adecuada el repertorio de recursos que ha ido elaborando la comunidad a través de su trayectoria.
- Ser capaz de trabajar productivamente con otros en la comunidad, de visibilizar el trabajo y de relacionarse con comunidades más amplias.

En los dos casos existe una introducción paulatina en el uso de un discurso evidenciado por los referentes teóricos que les ayudaron a enmarcar sus problemas de investigación. En el caso de García la Teoría Antropológica de lo Didáctico y en el caso de Ribeiro las dimensiones del conocimiento profesional del profesor. La interacción con las comunidades de práctica en que se insertan va produciendo aprendizaje y generando significados compartidos. También existe la problematización de un aspecto de los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas que quiere ser mejor comprendido: la definición del problema de investigación en el *dominio* que identifica a cada comunidad de práctica.

La participación en una comunidad de investigación con identidad propia ha marcado también la reformulación y el tratamiento de la problemática planteada: García parte de un problema docente relacionado con la proporcionalidad: *Como profesor, ¿qué tengo que enseñar a mis alumnos y cómo tengo que enseñarlo, a propósito de la proporcionalidad?*, que reformula como pregunta de investigación desde tres dimensiones: epistemológica, económica-institucional y ecológica, en el marco de la TAD.

Y Ribeiro delimita un problema y unas preguntas de investigación a partir de una problemática que se presenta en la práctica educativa con el objetivo de mejorarla. *Que dimensões do conhecimento profissional (crenças, conhecimentos, objetivos e tipos de comunicação matemática promovidos) estão subjacentes às ações dos professores (envolvidos num grupo de trabalho colaborativo), enquanto lecionam uma aula de matemática no 1º Ciclo? Como se relacionam essas dimensões? De que forma “evoluem” ao longo do tempo?* Las reformula en el marco de la teoría del *Conocimiento matemático para la enseñanza* (MKT), que está claramente en el dominio de la cognición.

La participación en una comunidad de práctica produce un aprendizaje como consecuencia de la práctica compartida, aprendizaje que se contempla desde una perspectiva social (Lave y Wenger, 1991). Y un indicador del aprendizaje es la evolución que se constata en la propia comunidad y en sus miembros.

En este sentido observamos que la agenda de investigación de García ha ido cambiando a lo largo de su trayectoria, no sólo en contenidos sino también en la negociación de los significados: de la *Construcción del significado matemático y de la actividad matemática*, y dentro de esta línea la teoría antropológica de lo didáctico, se desliza al *Conocimiento y desarrollo profesional de profesor*; esta última en una comunidad heterogénea donde ha tenido que negociar significados sobre: modelización matemática, desarrollo profesional, interdisciplinariedad o aprendizaje por investigación.

La de C. Miguel Ribeiro ha estado siempre enmarcada en la del *Conocimiento y desarrollo profesional de profesor,* con diversidad de focos de atención y de resultados, pero con un núcleo claro: el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT por sus siglas en inglés) - su contenido, papel e impacto en la enseñanza-.

Finalmente destacamos la visibilidad y relación con comunidades más amplias, pero desarrollando previamente lo común desde el "compromiso mutuo" dentro de la comunidad de investigación (Wenger, 1998).

AVANCES Y PROSPECTIVA

Para concluir señalo algunos de los aspectos positivos de las trayectorias:

- Incorporación a grupos de investigación consolidados, con diferentes agendas de investigación, que han sido espacios de socialización de intereses, de problemas de investigación y de prácticas. Algunos de estos grupos son interuniversitarios y otros están ubicados en una universidad aunque abiertos a la participación de otras personas y grupos.
- Apertura a espacios de discusión y contraste, más allá de aquellos donde se realizan las investigaciones, especialmente congresos de ámbito nacional e internacional.
- Visibilidad del trabajo mediante publicaciones en actas de congresos y en menor medida artículos y capítulos de libros.

Y tres objetivos:

- Dar más visibilidad al trabajo ya realizado publicando artículos en revista de reconocido prestigio. Estos artículos pueden abordar con más profundidad los temas presentados como comunicaciones en congresos.
- Consolidación como investigadores con la codireccción y dirección de trabajos y proyectos de investigación.
- Continuar produciendo conocimiento en las líneas que están ya presente en la experiencia posdoctoral.

Referencias

García, F.J. (2003). Construyendo una identidad: Trayectorias de investigación tras el grado de doctor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 91-108). Bilbao: SEIEM

Gascón, J. (2012). La revolución brousseauniana como razón de ser del grupo DMDC. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordoñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, 15-22. Jaén: SEIEM.

Lave. J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning. Legitimate peripheral participation*.Cambridge MA: Cambridge University Press.

Llinares, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde "ISI-web knowledge" y ERIH. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, 25-53. Badajoz: SEIEM.

Ponte, J.P. (2008). A investigação em educação em Portugal. Realizações e perspectivas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII*, 55-78. Badajoz: SEIEM.

Ribeiro, C.M. (2003). Del cero hasta más allá del infinito – algunas perspectivas desde el comienzo de la tesis doctoral hasta el futuro “también” a largo plazo. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 71-90). Bilbao: SEIEM

Ruíz, L., Orús, P., Godino, J.D., y Gascón, J. (2001). Perspectiva de la investigación del grupo didáctica de las matemáticas como disciplina científica. En L. Contreras, J. Carrillo, N. Climent y M. Sierra (Eds.). *Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 175-182). Huelva: Universidad de Huelva.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice: learning, meaning and identity*.Cambridge MA: Cambridge University Press.

COMUNICACIONES

ESTRATEGIAS DE FUTUROS PROFESORES DE PRIMARIA EN PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers

Rut Almeida y Alicia Bruno
Universidad de La Laguna

Resumen

Este trabajo analiza las estrategias de resolución de problemas aditivos simples con números negativos por parte de futuros profesor de enseñanza primaria. Los resultados muestran seis estrategias diferentes que dependen de la dificultad del problema y en especial, de la posición de la incógnita. Los futuros profesores usan números negativos en los problemas que les resultan más sencillos y recurren a otras estrategias en los problemas más complejos. Las respuestas evidencian dificultades que se suponen, son superadas en la enseñanza obligatoria.

Palabras clave: *futuro profesor, problemas aditivos, números negativos.*

Abstract

This study analyzes the strategies used by pre-service primary school teachers for solving simple addition problems involving negative numbers. The findings reveal six different strategies that depend on the difficulty of the problem and, in particular, on the unknown quantity. We note that students use negative numbers in those problems they find easy and resort to other strategies in more complex problems. Furthermore, the problem-solving strategies reveal lingering difficulties involving negative numbers.

Keywords: *prospective teacher, additive problems, negative numbers*.

Almeida, R. y Bruno, A. (2013). Estrategias de futuros profesores de primaria en la resolución de problemas aditivos con números negativos. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 127-136). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La preocupación por mejorar la enseñanza y aprendizaje de los números negativos se ha manifestado en la publicación de numerosos trabajos que comienzan alrededor de 1970 (Vergnaud y Durand, 1976; Marthe, 1979) y han aumentado progresivamente hasta la actualidad (Cunnigham, 2009; Gallardo y Saavedra, 2011; Steiner, 2004; Widjaja, Stacey, y Steinle, 2011). También en España este tópico ha sido foco de interés desde distintas perspectivas (Bruno y Martinón, 1999; González, 1995; Maz, 2005) Las investigaciones más numerosas se han realizado con alumnado de primaria y secundaria, y en menor medida, con futuros profesores.

En el currículo de matemáticas en España, el primer contacto de los alumnos con los números negativos se propone al final de la Educación Primaria, y su estudio más profundo corresponde a la Educación Secundaria. Los futuros profesores de ambos niveles deben manejar con soltura situaciones cotidianas que permitan dar significado a las operaciones de números enteros, ya que son esas las que utilizarán en su futura docencia.

Las investigaciones indican que los alumnos de educación primaria pueden utilizar los números negativos y realizar con ellos operaciones simples de suma y resta. Para ello siguen estrategias sencillas y construyen modelos mentales basándose en su conocimiento sobre los positivos, y suelen tener mayores dificultades al tratar las operaciones formalmente (Peled, Mukhopadahyay y Resnick, 1989).

El conocimiento intuitivo de los alumnos refleja una distancia importante entre la comprensión del significado de los números negativos, frente a su representación abstracta, a través de símbolos. En este trabajo analizamos las estrategias que utilizan un grupo futuros profesores de Primaria al resolver problemas aditivos simples con presencia de números negativos, con el objeto último de analizar si en ellos también se produce ese *distanciamiento entre lo concreto y lo simbólico*.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ADITIVOS CON NÚMEROS NEGATIVOS

Las investigaciones sobre problemas relativos a estructuras aditivas con números negativos están centradas en distintos aspectos: a) dificultad de los problemas según sus estructuras semánticas (cambio, combinación, comparación), b) procedimientos de resolución, c) tipos de representación, d) influencia del contexto y de los signos de los números, e) dificultad de los problemas según la edad de los alumnos. Vergnaud y Durand (1976) concluyeron que los problemas con estructura de cambio son más sencillos que los que combinan dos cambios. Sin embargo, tiene más influencia en la dificultad de los problemas la posición de la incógnita que la estructura (Bruno y Martinón, 1999). Marthe (1979) indicó que cuando los problemas tienen signos opuestos (sumar o restar un número positivo con otro negativo) son más complejos que cuando tienen el mismo signo.

El contexto del enunciado es un factor menos determinante en la dificultad que la estructura, aunque también puede producir diferencias en el éxito (Bell, 1986). El contexto de deber-tener lleva a más éxito y el contexto de cronología es el que produce mayor fracaso (Bruno y Martinón, 1999).

Se han analizado las estrategias de resolución, encontrando que los alumnos resuelven estos problemas con operaciones y/o mediante representaciones, como la recta numérica. Las estrategias varían en función del contexto y de la dificultad del problema. Para la mayoría de los alumnos los contextos deber-tener y cronología inducen a un menor uso de la recta que los otros contextos.

Para muchos alumnos hay problemas aditivos especialmente difíciles, en los que no logran encontrar la operación adecuada con números negativos. Se hace necesario buscar métodos de enseñanza que ayuden a establecer relaciones entre el conocimiento abstracto y las situaciones contextualizadas.

El conocimiento de los futuros docentes de primaria o secundaria sobre los números negativos no ha sido objeto de estudio en muchos trabajos.

Widjaja, Stacey y Stente (2011) analizan los errores al representar en la recta numérica números decimales negativos futuros profesores de primaria, indicando que es un reto importante para una proporción significativa de futuros profesores de primaria. Steiner (2009) evaluó la comprensión conceptual de la suma y resta de enteros de futuros profesores de primaria usando un modelo que combina la recta numérica y las fichas de colores. El estudio mostró que el modelo ayudó a los participantes a una mejor comprensión de los números y los algoritmos de suma y resta.

En Bruno, Espinel y Martinón (1997) se analiza la resolución de problema aditivos con números negativos con diferentes estructuras de problemas de futuros docentes de primaria. Se observó cómo tienden a usar números positivos antes que negativos y recurren a estrategias basadas en métodos gráficos. En este trabajo complementamos el citado estudio, centrándonos en cuatro estructuras y analizando las estrategias con más profundidad.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

Este trabajo amplia el conocimiento sobre la forma de resolver determinados tipos de problemas aditivos con números negativos por parte de los futuros profesores de primaria, siendo el objetivo del estudio el siguiente:

> *Estudiar las estrategias que emplean los futuros profesores de primaria para resolver los problemas aditivos de cambio, comparación, cambio-comparación e igualación, en función del tipo de estructura e incógnita.*

Tipos de problemas del estudio

Este trabajo estudia los problemas de cambio, comparación e igualación y una variante de problemas que puede considerarse híbrido entre cambio y comparación que denominamos cambio-comparación. A continuación describimos los problemas considerados.

a) Comparación e Igualación

En ciertas situaciones numéricas encontramos dos estados, (estado 1 y estado 2) que se comparan (diferencia), utilizamos el esquema:

estado 1 + diferencia = estado 2

Hay dos formas básicas de expresar la diferencia. En los problemas de comparación la diferencia se expresa por medio de “más que” o de “menos que”. En los problemas de igualación se dice cuánto debe aumentar el estado menor para igualar al mayor o lo que debe disminuir el mayor para igualar al menor.

b) Cambio y Cambio-comparación

En otras situaciones hay un estado inicial, una variación y un estado final. Estos problemas tienen un esquema:

estado inicial + variación = estado final

Hay dos tipos de expresión de la variación. En los problemas de cambio la variación se expresa de manera simple (ganar, subir bajar...). En los problemas de cambio-comparación se expresa la variación con “más que” o “menos que”, de forma similar a los problemas de comparación (ver ejemplo en el Anexo).

c) Dato desconocido

Además de la diferencia entre las estructuras, en los problemas también es relevante la posición de la incógnita.

Problemas de incógnita 3: el dato desconocido es el tercero de los esquemas anteriores

(estado 2 o estado final).

Problemas de incógnita 2: el dato desconocido es el segundo en los esquemas anteriores (diferencia y variación).

Problemas de incógnita 1: el dato desconocido el estado 1 o el estado inicial

Los problemas de incógnita 1 no se analizan en este trabajo.

En los problemas de incógnita 3 la resta significa quitar, mientras que en los problemas de incógnita 1 y 2 se asocia a la distancia entre dos cantidades.

Metodología

Se ha realizado una prueba escrita con 8 problemas aditivos, 4 de ellos de incógnita 3 y 4 de incógnita 2 (enunciados en Anexo).

Los contextos utilizados responden a aquellos que implican una representación vertical (temperatura, nivel del mar y ascensor). Dado que el signo de los números influye en el éxito y la forma de resolver los problemas, se limitó los signos de los números de la siguiente forma:

positivo + negativo = negativo (problemas de incógnita 3)

negativo - positivo = negativo (problemas de incógnita 2)

Recogida de datos

La prueba escrita la contestaron 137 estudiantes futuros profesores de Educación Primaria que cursaban el segundo curso de Maestro de Primaria de la Universidad de La Laguna y habían recibido docencia en las asignaturas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas. La prueba se realizó en una sesión habitual de clase de una hora.

RESULTADOS

En el análisis de los resultados se ha tenido en cuenta si la respuesta es correcta/incorrecta y la estrategia de resolución. En muchas ocasiones los alumnos emplean diferentes estrategias en un mismo problema.

Estrategias de resolución de los problemas

Los estudiantes resolvieron los problemas utilizando seis estrategias básicas. Mostramos un ejemplo de cada una tomando las respuestas de distintos alumnos a un mismo problema, el de Cambio-Comparación, CbCp2.

Por la mañana, la temperatura en París era de 4º sobre cero y a lo largo del día bajó hasta quedarse en 5º bajo cero por la noche. ¿Cuántos grados más abajo, estaba la temperatura por la noche que por la mañana?

Respuesta con números negativos: $-5 - (+4) = -9$; $-5 - 4 = -9$

Estrategia 1. Plantear una operación de números positivos

En esta estrategia se resuelven los problemas con una suma o una resta de números positivos, utilizando los dos números dados en el enunciado. El hecho de usar números positivos implica que para llegar a la solución correcta es necesario contextualizar el resultado a la situación negativa (Figura 1).

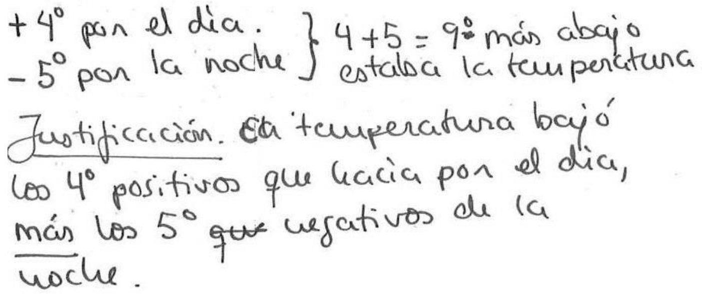


Figura 1. Respuesta del alumno 67

Estrategia 2. Plantear una operación de números negativos

Esta estrategia implica utilizar los dos números del enunciado del problema y efectuar con ellos una operación de suma o resta (Figura 2).

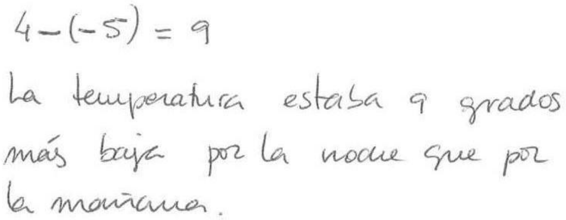


Figura 2. Respuesta del alumno 112

3. Representar en la recta numérica

Esta estrategia consiste en realizar una representación de los números en la recta numérica y establecer comparaciones entre los números señalados, contar sobre ella, o bien señalar un movimiento (Figura 3).

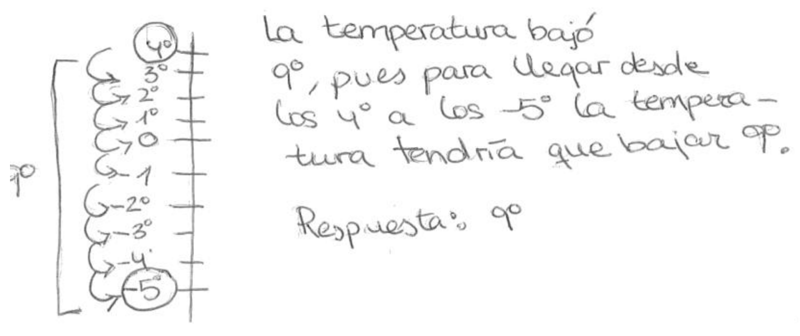
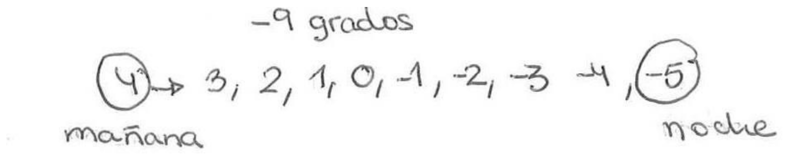


Figura 3. Respuesta del alumno 2

Estrategia 4. Contar siguiendo la secuencia numérica

Implica escribir un parte de la secuencia numérica, empezando y acabando con los dos números dados en el enunciado del problema. La secuencia numérica se escribe en forma horizontal o vertical. La secuencia vertical puede considerarse una representación simplificada de la recta numérica, aunque también puede entenderse como una forma de “seguir el conteo” (Figura 4).



Mañana Noche

Figura 4. Respuesta del alumno 36

Estrategia 5. Dar una explicación verbal

Consiste en redactar las posiciones de los números dados en el enunciado y los movimientos o comparaciones que se producen entre ellos, para llegar, de una manera verbal, a la solución contextualizada (Figura 5). No se escribe ninguna operación, ni dibuja una representación gráfica. Esta estrategia implica un proceso mental, ya sea de conteo, para estimar las distancias entre los números o para efectuar una operación (aunque esas estrategias paralelas no quedan explícitas en la escritura de los alumnos).

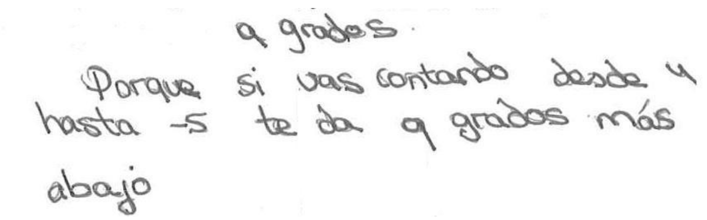


Figura 5. Respuesta del alumno 76

Estrategia 6. Hacer un esquema o dibujo

En esta estrategia se hace un dibujo o un esquema de la situación que describe el problema, situando los números dados en el enunciado y razonando a partir de dicha representación. En ocasiones, el dibujo realizado está muy detallado y real, y en otras, es un simple esquema (Figura 6).

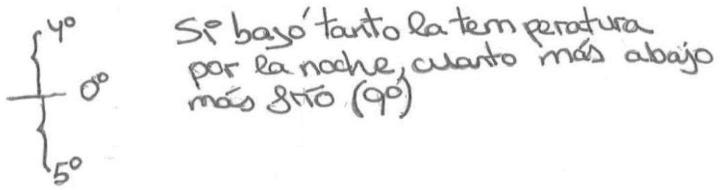


Figura 6. Respuesta del alumno 57

Estrategias según los problemas

En el análisis de resultados se ha considerado como correctas las respuestas que dan el número negativo que resuelve el problema, o bien, su opuesto número positivo, contextualizado al problema. Por ejemplo, el problema cuya resolución con números negativos es (+6)+(-7)=-1, o bien, 6-7=-1, también se ha clasificado como correctas las respuestas -1 o 1 grado bajo cero.

En la tabla 1 aparecen los porcentajes de éxito en los 8 problemas de la prueba. Todos los problemas de incógnita 3 tuvieron porcentajes altos de éxito excepto el problema de comparación que presentó los resultados más bajos de la prueba (68%). Los problemas de incógnita 2 tuvieron un éxito ligeramente inferior a los de incógnita 3, excepto el problema de cambio que tuvo un éxito del 88%, más próximo a los porcentajes de la mayoría de los problemas de incógnita 3.

Tabla 1. Porcentaje de éxito de los problemas

Problemas de Incógnita 3				Problemas de Incógnita 2			
Cb3	Cb-Cp3	Cp3	Ig3	Cb2	Cb-Cp2	Cp2	Ig2
92	90	68	88	88	76	77	77

Los problemas tuvieron más dificultad de lo que se esperaba para alumnos universitarios, ya que no se exigía que la operación con números negativos en su forma "canónica". Las dificultades fueron contextuales o debidas a incorrectas interpretaciones del enunciado, pero reflejan deficiencias en el conocimiento de los números negativos.

Tabla 2. Porcentajes de estrategia según los problemas

	Problemas							
	Incógnita 3				**Incógnita 2**			
Estrategias	Cb3	CbCp3	Cp3	Ig3	Cb2	CbCp2	Cp2	Ig2
Operación positivos	3	2	24	6	11	23	21	36
Operación negativos	54	37	16	35	5	7	5	3
Recta numérica	10	11	9	17	12	22	15	8
Secuencia	7	17	18	21	20	20	22	15
Explicación	9	15	12	6	39	17	18	8
Dibujo	-	1	5	2	4	1	6	2
Operación positivos y Otra estrategia	-	-	2	-	2	2	4	18
Operación positivos y Otra estrategia	17	15	7	13	1	5	3	1
Recta Secuencia Dibujo	-	2	7	-	-	3	6	8

La tabla 2 muestra las diferentes estrategias utilizadas en los problemas. La mayoría de las veces se emplean de forma única, y en otras se combinan dos o tres estrategias.

Los problemas de incógnita 3, Cb3, CbCp3 y Ig3, tienen resultados similares en el éxito y en las estrategias (tablas 1 y 2). La estrategia predominante es *operar con números negativos*, y hay un escaso uso de *operaciones con números positivos* y de realización de *dibujos*.

El problema Cp3 presenta un comportamiento diferente a los tres anteriores, ya que 39 alumnos de los 124 dieron una respuesta errónea. Muchos alumnos interpretaron que el enunciado del problema da la posición del pájaro (+2) y la posición del pez (-6) y se les pide la distancia entre ambos o la comparación entre las posiciones, es decir, realizaron una reestructuración del enunciado del problema como si fuera de incógnita 2 (Figura 7).

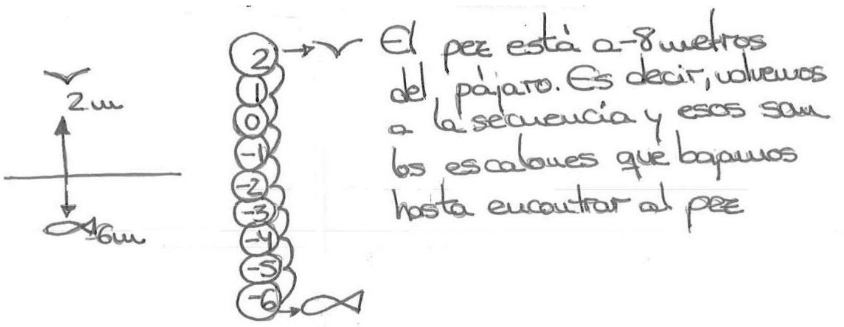


Figura 7. Respuesta del alumno 75

La errónea interpretación del enunciado por parte de tantos alumnos puede estar provocada porque se realiza una lectura rápida del mismo, después de haber contestado anteriormente a cinco problemas de enunciados semejantes. El hecho de que lo interpretaran como un problema de incógnita 2 hace que las estrategias sean similares a las de estos problemas.

En los problemas de incógnita 2 disminuye la estrategia *operar con números negativos*, pasando a ser la menos usada en los cuatro problemas, lo que indica una ausencia de conocimiento del significado de la resta como diferencia de dos estados de números negativos.

Los problemas Cp2 y el CbCp2 presentan estrategias similares, las cuales están muy repartidas. Parece que la semejanza de los enunciados en cuanto a la forma de expresar la comparación y la variación lleva a empelar las mismas estrategias.

En el problema Cb2 destaca la estrategia de dar una *explicación* verbal por encima de las demás (39%), esto se debe la pregunta del enunciado *¿Cuál fue el movimiento del ascensor?*, llevó a muchos futuros profesores a dar una respuesta en la que sólo indicaban la dirección del movimiento ("el movimiento fue de bajada", "que descendió", etc.). Es decir, no dieron una respuesta numérica del tipo: "el ascensor bajó 5 plantas".

En el problema Ig2, un 54% de los alumnos escribieron la operación con números positivos 3+5=8. Un número considerable de alumnos (al menos un 25%) mostraron lo que Peled et al. (1989) denominó *el modelo de recta dividida*. Un alumno cuando usa este modelo describe la distancia de un número positivo hasta el 0, y a continuación suma la distancia del 0 al número negativo que da el enunciado del problema. El alumno 35 contestó: *8 metros. Sumé 3 a 5, ya que tendría que bajar 3 metros para ponerse al nivel del mar, más otros 5 para ponerse al a altura del submarinista.* Los alumnos que no usen este modelo ven la distancia o el movimiento como un continuo desde 3 hasta menos 5.

CONCLUSIONES

Hemos encontrado una variedad de estrategias en las respuestas de los futuros profesores de primaria para resolver los problemas aditivos que reflejan diferentes modos de pensamiento. Los estudiantes analizados identifican los problemas con situaciones en las que están implicados los números negativos, ya que en algún paso del problema escriben números con signo negativo. Sin embargo, no expresan la operación en todos los problemas con la misma facilidad y recurren a otras estrategias, lo que ha provocado una variedad de respuestas.

Encontrar la solución correcta a los problemas no ha sido excesivamente difícil (el rango de error ha estado entre un 8% y 32%), pero lo que ha resultado complejo es resolverlos planteando una operación con números negativos. Hay una clara diferencia en las estrategias de resolución según los problemas en cuanto a la posición de la incógnita (los de incógnita 3 se resuelven con números negativos y los de incógnita 2 con otras estrategias) y escasa diferencia en cuanto a las cuatro estructuras de problemas (cambio, comparación, cambio-comparación e igualación), como había reflejado en Bruno y Martinón (1997).

Los futuros profesores no logran resolver con números negativos los problemas en los que el dato desconocido es la variación o la diferencia y recurren al "sentido común" para expresar la solución de forma contextualizada o gráficas. Su proceso de enseñanza-aprendizaje no les ha llevado a distinguir las situaciones de resta asociadas a "quitar" de la resta como "diferencia de dos estados". Sin embargo, las situaciones de resta como diferencia son más fáciles para explicar el significado de la resta números negativos, ya que la resta como "quitar" (o "bajar" en nuestros problemas) implica una concepción más sofisticada. En cierta forma reflejan la misma dificultad que la encontrada en alumnado de primaria y secundaria, en cuanto al distanciamiento entre la comprensión intuitiva de estos problemas y la formalización de los mismos a través de una operación con números negativos.

Agradecimientos: Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación. Madrid.

Referencias

Bell, A. (1986). Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias*, *4*(3), 199-208.

Bruno, A., Espinel, C., y Martinón, A. (1997). Prospective teachers solve additive problems with negative numbers. *Focus on learning problems on mathematics*, *19*(4), 36-55.

Bruno A, y Martinón A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. *International Journal in Mathematic Education Science and Technology*, *30*(6), 789-809.

Cunnigham, A. W. (2009). Using the number line to teach signed numbers for remedial community college mathematics. *Mathematics Teaching Research Journal Online*, *3*(4), 1-40.

Gallardo, A., y Saavedra, G. (2011). Significados de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 361-369). Ciudad Real: SEIEM.

González, J.L. (1995). *Los números enteros relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada. Granada.

Marthe, P. (1979). Additive problems and directed numbers. *Proceedings of the III PME*, 153-157. Warwick.

Maz, A. (2005). *Números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral Universidad de Granada. Granada.

Peled, I. Mukhopadahyay, S., y Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. *Proceedings of the XIII PME*, 106-110.

Steiner, C. J. (2009). *A study of pre-service elementary teachers'conceptual understanding of integers*. Unpublished doctoral dissertation, Kent State University, Kent.

Vergnaud, G. y Durand, C. (1976). Structures additives et complexité psychogénétique. *La Revue Française de Pédagogie*, *36*, 28-43.

Widjaja, W., Stacey, K., y Steinle, V. (2011). Locating negative decimals on the number line: Insights into the thinking of preservice primary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*, 80-91.

ANEXO

Enunciados y tipos de los problemas del estudio

Incógnita 3	
Luis observó la temperatura por la mañana y por la noche. Por la mañana, la temperatura era de 6º sobre cero y a lo largo del día, bajó 7º. ¿Qué temperatura hacía por la noche?	**Cambio (Cb3)** estado inicial + variación = <u>estado final</u> (+6) + (-7) = -1 6 - 7 = -1
Antes de moverse, el ascensor de un edificio estaba parado en la planta 4. Ahora está 6 plantas más abajo de esa posición. ¿En qué planta está ahora?	**Cambio-Comparación (CbCp3)** estado inicial + variación = <u>estado final</u> +4 + (-6) = -2 4 - 6 = -2
Un pájaro vuela a 2 metros sobre el nivel del mar y un pez está 6 metros por debajo del pájaro ¿En qué posición está el pez?	**Comparación (Cp3)** estado 1 + diferencia = <u>estado 2</u> +2 + (-6) =-4 2 – 6 = -4
En Madrid la temperatura es de 3º sobre cero. Si la temperatura en Madrid baja 5 grados se iguala a la de Bilbao ¿Cuál es la temperatura en Bilbao?	**Igualación (Ig3)** estado 1 + diferencia = <u>estado 2</u> +3 + (-5) = -2 3 – 5 = -2
Incógnita 2	
Un ascensor estaba en la planta 3, se movió y se paró en la planta 2 del sótano. ¿Cuál fue el movimiento del ascensor?	**Cambio (Cb2)** estado inicial + <u>variación</u> = estado final -2 - (+3) = -5 -2 - 3 = -5
Por la mañana, la temperatura en París era de 4º sobre cero y a lo largo del día bajó hasta quedarse en 5º bajo cero por la noche. ¿Cuántos grados más abajo, estaba la temperatura por la noche que por la mañana?	**Cambio-Comparación (CbCp2)** estado inicial + <u>variación</u> = estado final -5 - (+4) = -9 -5 – 4 = -9
Un edificio tiene dos ascensores (A y B). El ascensor A está en la planta 4 y el ascensor B está en la planta 1 del sótano. ¿Cuántas plantas más abajo está el ascensor B que el A?	**Comparación (Cp2)** estado 1 + <u>diferencia</u> = estado 2 -1 - (+4) = -5 -1 - 4 = -5
Un paracaidista vuela a 3 m. sobre el nivel del mar y un submarinista nada a 5 m. bajo el nivel del mar. ¿Cuántos metros tiene que bajar el paracaidista para estar en la misma posición que el submarinista?	**Igualación (Ig2)** estado 1 + <u>diferencia</u> = estado 2 -5 - (+3) = -8 -5 - 3 = -8

CONOCIMIENTOS MATEMATICOS DE PROFESORES EN PLANIFICACION DE COMPETICIONES DEPORTIVAS

Mathematical knowledge of teachers in sports competitions planning

Ana Teresa Antequera Guerra[a] y María Candelaria Espinel Febles[b]

[a]C.E.O. de Juan XXIII. aantegue@yahoo.es

[b]Universidad de La Laguna. mespinel@ull.es

Resumen

En este estudio se observan las estrategias de resolución y el conocimiento matemático, para una muestra de 70 futuros profesores de Educación Primaria, en relación con la planificación de un torneo deportivo. El análisis se realiza en base a las respuestas dadas a una tarea, que consiste en completar diagramas de árbol según varía el número de jugadores de un torneo deportivo, con el fin de descubrir una pauta de generalización. Los resultados muestran que los futuros profesores recurren a su intuición o a su experiencia personal, mostrando distintas estrategias que no siempre coinciden con la representación válida para resolver el problema. La experiencia sugiere la conveniencia de una formación en matemática discreta, aprovechando la relación interdisciplinar entre deportes y matemáticas y, así, cultivar aprendizajes en distintos contextos.

Palabras clave: *formación de profesores, matemáticas y deportes, diagrama de árbol, resolución de problemas.*

Abstract

This study observes solving strategies and mathematical knowledge, for a sample of 70 future teachers of primary education, in relation to the planning of a sports tournament. The analysis is based on the answers given to a assignment, which involves completing tree diagrams as varies the number of players in the tournament, with the aim of discover a pattern of generalization. Outcomes show that teachers rely on their intuition or personal experience, showing different strategies that do not always coincide with the accurate representation to solve the problem. The experience suggests the convenience of training in discrete mathematics, drawing on the interdisciplinary relationship between sports and mathematics, and thus cultivates learning in different contexts.

Keywords: *teacher instruction, mathematics and sports, tree diagram, problem solving.*

1. INTRODUCCIÓN

La formación de maestros en Educación Primaria debe garantizar que se adquieran los conocimientos necesarios para ejercer las competencias en distintas disciplinas. Además de dominar las materias a enseñar y sus didácticas, así como la relación interdisciplinar entre ellas, se ha de ser capaz de abordar eficazmente situaciones en contextos diversos. La planificación y organización de actividades deportivas es un ejemplo de cómo desde distintas áreas se puede incentivar las competencias. En este contexto, las matemáticas ofrecen conocimientos útiles para lograr una organización exitosa, como son el estudio de emparejamientos, la combinatoria y conceptos de matemática discreta, pudiéndose involucrar al alumnado en el diseño.

La planificación de eventos deportivos recurre principalmente a dos estrategias, los torneos, sistema de rondas eliminatorias, y la liga, competición en la que todos se enfrentan con el resto una sola

Antequera Guerra, A. T. y Espinel Febles, M. C. (2013). Conocimientos Matemáticos de Profesores en Planificación de Competiciones Deportivas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 137-146). Bilbao: SEIEM.

vez. En el caso del torneo se usa como representación el diagrama de árbol y en la liga, un grafo completo, siendo ambos gráficos de gran utilidad en la resolución de problemas matemáticos. En teoría de grafos, un árbol es un grafo conexo sin ciclos. Esto significa que no hay aristas múltiples y que cada par de vértices se conecta por un único camino. El sistema de eliminatorias, conlleva que los perdedores se retiren en cada ronda y se empareje a los ganadores, dando eventualmente descanso a un jugador, si es que queda un número impar de jugadores. El torneo o eliminación directa es muy empleado en competiciones de tenis y en copas de fútbol, y es frecuente su aparición en la prensa deportiva en forma de representaciones en árbol (Espinel, 1995).

La experiencia que se presenta, como *primer propósito,* aspira a que los futuros profesores reconozcan y valoren las conexiones de las matemáticas con situaciones del mundo real. La actividad planteada parte de un torneo con cuatro jugadores, a partir del cual han de diseñar un torneo con seis jugadores, dando lugar a una transición no espontánea y que puede suponer un cierto bloqueo, por lo que se trata de observar las posibles estrategias de solución, siendo este el *segundo propósito* de la experiencia. Luego, se propone organizar un torneo con ocho jugadores, en un intento de establecer una relación entre el número de jugadores, partidos jugados y número de partidos en que participa el posible campeón. Se pretende, como *tercer propósito,* que observen la peculiaridad de la generalización en este modelo.

2. MARCO TEÓRICO

El modelo de *conocimiento del profesor* propuesto por Shulman, y otras adaptaciones posteriores (Godino, 2009), definen el conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) como el conocimiento de: los errores y dificultades comunes, las concepciones erróneas, las estrategias utilizadas, la comprensión del alumno y evolución de su razonamiento matemático.

El conocimiento del profesor sobre la matemática puede ser deficitario respecto a algunos campos. Este suele ser el caso de la *matemática discreta* y sus conceptos asociados, como la combinatoria, los grafos, las matrices, la elección social o la teoría de juegos, de ahí el interés de este estudio. El desarrollo de la matemática discreta apenas se ha recogido en los currículos escolares, a excepción de algunos países como Hungría, parte de EEUU, Holanda o Alemania. La resolución de problemas en estos tópicos proporciona una oportunidad para incorporar destrezas propias de la matemática: resolver problemas no rutinarios, con diferentes estrategias, desarrollar el pensamiento crítico, tomar decisiones apoyándose en razonamientos matemáticos, saber cómo el conocimiento científico influye en la actividad práctica (DeBellis & Rosenstein, 2004). Además, permite introducir nuevos contenidos y profundizar en modelos que se aproximen a situaciones reales donde se aplique la matemática.

Para lograr un verdadero aprendizaje, el profesor debe seleccionar buenas situaciones – problema, creando las condiciones para que el estudiante se involucre en la actividad matemática de la resolución, validación de las soluciones aportadas y comunicación. En la *resolución de problemas*, es útil trabajar con modelos (Polya, 1965; Hernández & Socas, 1994). A menudo, estos modelos contemplan trazar un diagrama para entender el significado del problema.

Entre las representaciones que suponen una ayuda para la resolución de problemas se encuentra el *diagrama de árbol*. Este diagrama se usa para enumerar todos los resultados posibles de una serie de experimentos, donde cada experimento tiene un número finito de maneras de llevarse a cabo. Su uso es frecuente en problemas de conteo y probabilidad. En educación primaria, su primera función es facilitar el recuento, especialmente se suele utilizar el diagrama de árbol para problemas de producto cartesiano (Cañadas & Figueiras, 2009).

La *generalización* es una de las estrategias para resolver problemas. Calcular un término lejano quizás resulte muy difícil cuando se pretende que se busque una regla general, por ello, Stacey

(1989) distingue entre tareas de generalización cercana que piden buscar el siguiente término u otro término que puede ser obtenido mediante recuento, o haciendo un dibujo o una tabla, y las tareas de generalización lejana, que requieren la identificación de un patrón o pauta general. Trabajar el proceso de generalización con futuros profesores de primaria, tiene como objeto que dominen los sistemas de representación numérica, gráfica, verbal y algebraica.

Desde un punto de vista formal, en la generalización de un sistema de eliminatorias, si el número de contrincantes n es potencia de dos, $n = 2^k$ (4, 8, 16, 32,…), entonces todos los jugadores participan en la primera ronda, que es el caso para cuatro y ocho jugadores. Sin embargo, si n no es una potencia de dos, $n \neq 2^k$, algunos jugadores entran en la competición en la segunda ronda, situación de seis jugadores. Así, si se llama m al número de jugadores que entran en la competición después de la primera ronda, este número se calcula como la diferencia entre 2^k (menor entero k, tal que $2^k > n$) y el número de contrincantes, esto es, $m = 2^k – n$. Además, el número de enfrentamientos de la primera ronda es $n – 2^{k-1}$. Por ejemplo, para seis jugadores, n = 6, se tiene $m = 2^3 – 6 = 2$, siendo dos el número de jugadores que se unen a la competición después de la primera ronda. Y, $n – 2^{k-1} = 6 – 2^2 = 2$, indica que el número de enfrentamientos de la primera ronda es dos. Para el caso de n = 10, el número de contrincantes que se unen a la competición después de la primera ronda es seis ($m = 2^4 – 10 = 6$), y el número de juegos de la primera ronda es dos ($n – 2^{k-1} = 10 – 2^3 = 2$).

El problema de investigación en este trabajo es indagar sobre la utilización del diagrama de árbol como apoyo visual para interpretar y predecir datos en contextos deportivos y, además, observar las estrategias que son utilizadas para la organización de un torneo por futuros profesores.

3. METODOLOGÍA

En el estudio participan 70 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de La Laguna. En la asignatura Didáctica de la Numeración, Estadística y Azar, se dedica un tema a la resolución de problemas en el currículo de primaria, los problemas aritméticos aditivos y multiplicativos, y varias estrategias de resolución de problemas.

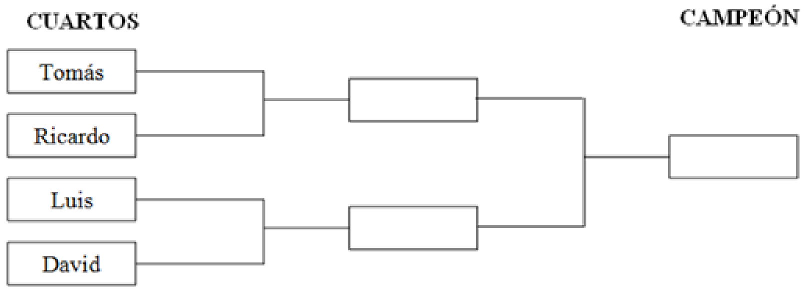
3.1. Tarea propuesta

En la Figura 1 se muestra la actividad que realizan los estudiantes, donde aparecen las cinco cuestiones a las que han de responder.

TORNEO PARA ENCONTRAR AL CAMPEÓN

En el club se convocado un campeonato en el que van a participar los cuatro jugadores. El torneo constará de dos rondas eliminatorias, en las que el ganador pasa a la siguiente fase, y el perdedor es eliminado.

El siguiente cuadro muestra como se desarrolla el torneo



a) Rellena el cuadro como quieras dando un posible ganador.
b) ¿Cuántos partidos se juegan en total en este torneo de cuatro jugadores?
c) ¿En cuántos partidos ha tomado parte el jugador que resulta campeón?
d) Construye un cuadro análogo al anterior si participasen en el campeonato seis jugadores, y responde a las mismas cuestiones.
e) Haz lo mismo si en el campeonato participan ocho jugadores.

Figura 1. Actividad presentada a los estudiantes

Esta misma actividad se experimentó con 127 alumnos de secundaría obligatoria (ESO), con una finalidad distinta a los objetivos propuestos en esta investigación, en concreto, para observar las destrezas de estos alumnos en el uso de diagramas de árbol (Antequera & Espinel, 2009), con el propósito de introducir conceptos de teoría de juegos.

3.2. Análisis de la información

Para el estudio de las respuestas de los estudiantes, se considera que ésta consta de nueve preguntas o ítems codificados de la siguiente forma:

A = Completar el árbol de 4 jugadores, apartado a);
B = Número de partidos con 4 jugadores, apartado b);
C = Partidos campeón con 4 jugadores, apartado c);
D1, D2 y D3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 6 jugadores;
E1, E2 y E3: corresponden a las preguntas a), b) y c) para 8 jugadores.

Los resultados se presentan desde dos puntos de vista. Primero, se realiza un estudio cuantitativo sobre la puntuación media del grupo de 70 estudiantes y se recoge el porcentaje de éxito de cada ítem. Se aprovecha el estudio previo realizado con alumnos de secundaria para comparar porcentajes de éxitos. En segundo lugar, se realiza un análisis cualitativo, observando las estrategias y los errores cometidos por los estudiantes, las dificultades y cómo buscan respuestas.

3.3. Resultados cuantitativos de los estudiantes para profesores

Para puntuar los ítems se codificó cada respuesta de forma dicotómica, como 1 = bien y 0 = mal o blanco, por lo que la puntuación de la actividad va de 0 a 9 puntos.

La puntuación media del total de los 70 estudiantes es de 5,14 puntos, según se recoge en la Tabla 1. Sólo tres estudiantes alcanzan los 9 puntos que es la máxima puntuación. En la Tabla 2, fila de profesores, se recogen los resultados relacionados con el éxito a cada uno de los nueve ítems de los que consta la actividad.

Los ítems correspondientes a diagramas de árbol son A, D1 y E1, y obtienen mayor porcentaje de éxito según se muestra en la Tabla 2. El primer ítem A, rellenar el árbol para cuatro jugadores, lo resuelven con éxito la totalidad de los estudiantes (100%). No les resulta tan fácil la construcción del árbol para 6 jugadores, ítem D1, que responden correctamente menos de la mitad de los estudiantes (45%). La pregunta, E1, construcción del árbol para 8 jugadores, presenta un resultado un poco mejor (66%). Para hallar el número de partidos parece que es determinante el tamaño del árbol. Para cuatro jugadores, ítem B, la pregunta tiene un alto éxito (80%), que se reduce para seis (36%), D2, y para ocho (53%), E2, jugadores. En cuanto al número de partidos en que participa el campeón, es llamativo que para seis, D3, muy pocos dan una respuesta (7%) y no saben seguir un camino para el campeón.

3.4. Comparación de resultados de profesores en formación y alumnos de secundaria

En la Tabla 1 se puede apreciar que en los dos grupos la media de las puntuaciones obtenidas es casi la misma, apenas superada por los alumnos de secundaria. De hecho, la diferencia de puntuación entre los dos no es estadísticamente significativa (t = -1.704, p = 0.09).

Tabla 1: Estadísticos de grupo

		Puntuaciones		
Grupo	*n*	*Media*	*Desviación típica*	*Error típico de la media*
Profesores	70	5,1429	2,43933	,29156
Secundaria	127	5,7402	2,30669	,20469

Cuando la comparación se realiza por ítems, Tabla 2, los resultados son apreciablemente peores para los futuros profesores.

Tabla 2: Porcentajes con respuestas correctas de cada ítem

	A	B	C	D1	D2	D3	E1	E2	E3
Profesores	100	80	75,71	45,71	35,71	7,14	65,71	52,86	51,43
Secundaria	95,28	77,29	74,80	61,42	47,24	10,24	88,19	57,48	61,42

4. ESTUDIO DE CASOS

Se consideran las soluciones aportadas para las cuestiones relativas a seis y ocho jugadores, realizando un análisis cualitativo según estrategias de resolución.

4.1. Árbol para seis jugadores

Entre los estudiantes que responden a la pregunta d) sobre un árbol con seis jugadores, se muestran cinco casos que resumen las estrategias seguidas y que suponen patrones diferentes.

CASO 12d

Este estudiante recurre a un árbol doble, Figura 2, sin completar con nombres de jugadores en las casillas. El modelo es el ideal, en el sentido de que es puro, abstracto y esquemático. Lo que concuerda con la madurez que se le supone a un estudiante universitario.

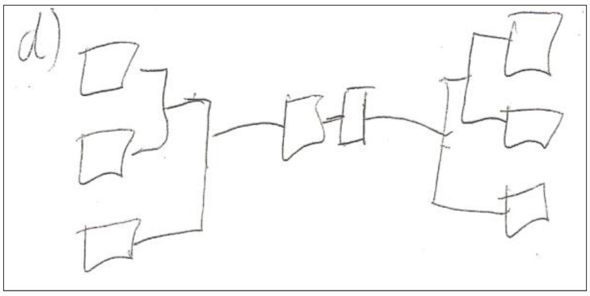


Figura 2. Árbol doble, 12d

CASO 38d

El caso 38d difiere del anterior, el árbol no es doble y, además, lo personaliza. Aunque recoge las distintas rondas, se observa en la Figura 3 que no coloca correctamente los emparejamientos, los jugadores Luis y Juan que sitúa en Cuartos de Final deberían estar en Semifinales, pues son los que no juegan la primera ronda. Elige a Luis, que ha jugado dos partidos, como el campeón de este torneo y, por tanto, no se da cuenta que, al personalizar, comete un error que no le permite ver otro posible ganador. Es decir, no se da cuenta que hay dos posibilidades para el ganador en lo que se refiere al número de partidos jugados.

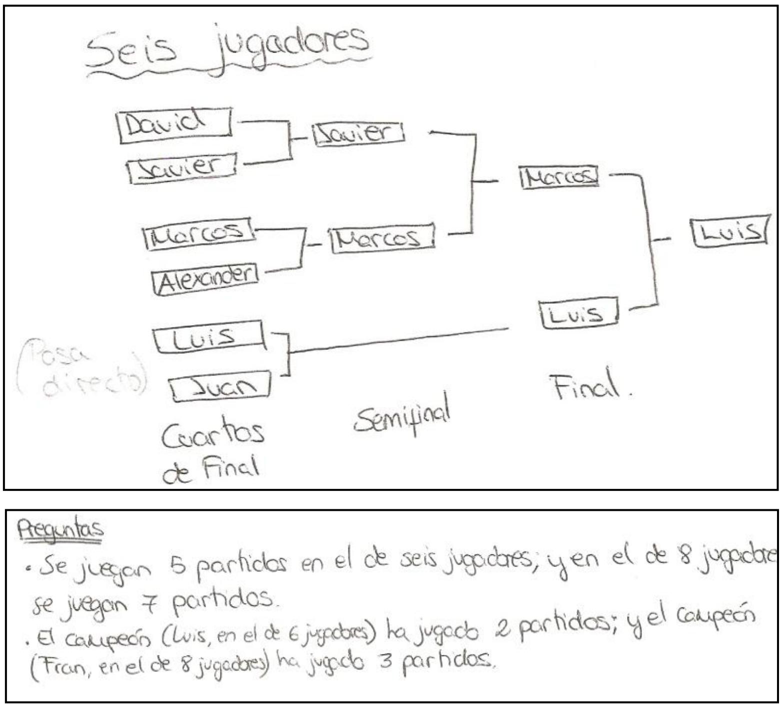


Figura 3. Árbol y respuesta a preguntas, 38d

CASO 49d

Este estudiante, Figura 4, sin llegar a personalizar con nombres, sí que marca el ganador con una cruz, y esto le impide detectar la otra solución posible para el número de partidos que juega el ganador, con lo que comete el mismo error que el caso 38d.

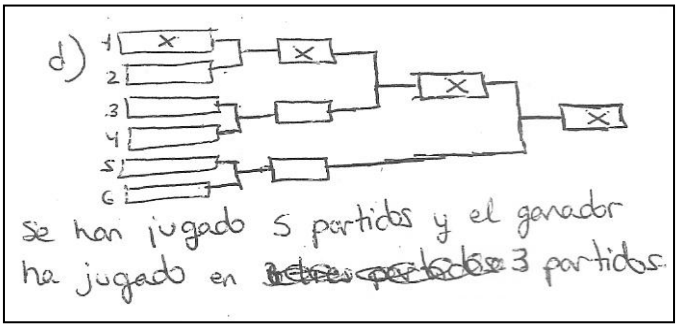


Figura 4. Árbol, 49d

CASO 54d

Se observa en la Figura 5 como, al encontrarse con un número impar de jugadores en la segunda ronda, resuelve organizando un triangular. Sin embargo, no llega a definir las normas de este tipo de enfrentamiento, ni a explicarlo. Además la representación no es un árbol en el sentido matemático de grafo.

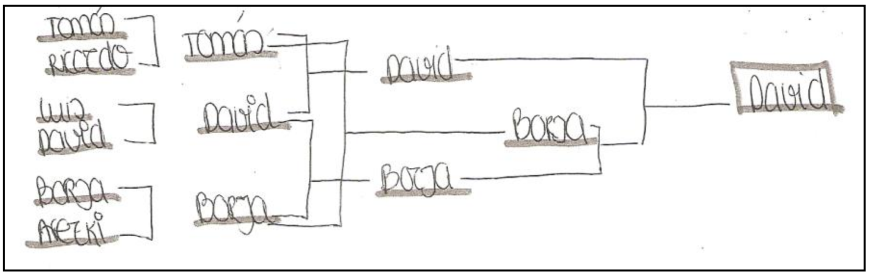


Figura 5. Triangular, 54d

CASO 55d

El caso 55d también presenta una respuesta en forma de triangular, Figura 6, en la que define y explica el mismo, dando una solución si se produce un triple empate entre los tres jugadores en la segunda ronda. De hecho, completa su respuesta escribiendo: *La final se juega un triangular a enfrentamiento único y en caso de triple empate el de mejor resultado.*

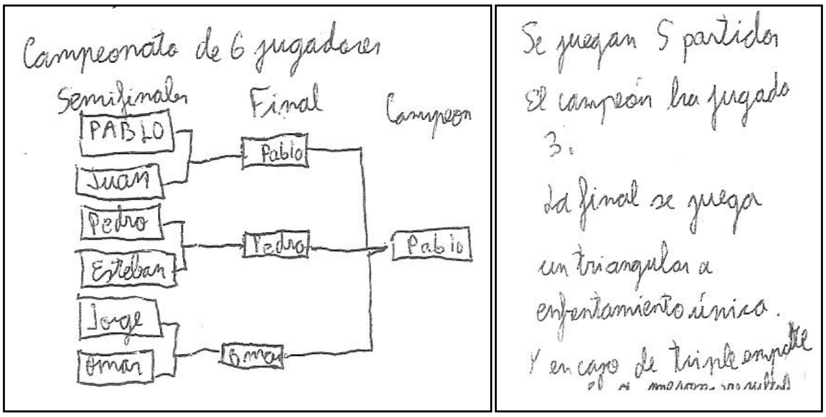


Figura 6. Triangular con respuestas de partidos, 55d

En la pregunta d), construir un árbol para seis jugadores, sólo dos estudiantes trazan un árbol doble como el que se recoge en la Figura 2, el resto resuelve la planificación del torneo con una representación análoga a la que le muestra en el enunciado de la actividad con cuatro jugadores, Figura 1, realizan tres parejas y es en la segunda ronda cuando se plantean cómo seguir la organización del torneo. A partir de aquí surgen dos estrategias. En la primera plantean un árbol si en la primera ronda juegan cuatro jugadores y los otros dos jugadores se incorporan en la segunda, estrategia seguida por el 94% de los estudiantes que responden correctamente esta cuestión, corresponde a las Figuras 3 y 4. La final la juega el campeón de los cuatro primeros jugadores con el que sale ganador de la pareja que juega sólo en la segunda vuelta. La segunda estrategia plantea una primera vuelta en la que juegan los seis jugadores, de la que resultan tres ganadores y con estos plantean un triangular. Las respuestas de este tipo corresponden a las Figuras 5 y 6. Muchos de los estudiantes que optan por esta "solución", proponen que si estos tres jugadores se enfrentan entre sí, de ahí ha de salir el campeón. Salvo excepciones como el caso de la Figura 6, que trata de explicar las reglas y condiciones del triangular, la mayoría de los futuros profesores no muestran conocer que la relación "ganar a" no es transitiva, lo que puede llevar a un empate triple entre los jugadores, razón por la que esta respuesta no es válida.

4.2. Árbol con 8 jugadores

En las respuestas a la pregunta e), torneo de ocho jugadores, se recogen dos variantes.

CASO 8e

El caso 8e personaliza sólo con letras, y une dos cuadros de cuatro jugadores para obtener el cuadro de ocho jugadores, que, además, coincide con la configuración estándar que se utiliza en las competiciones deportivas cuando se muestran en prensa las eliminatorias entre jugadores o equipos. Hay siete estudiantes que construyen un árbol doble como se recoge en la Figura 7, son el 15% de los que contestan bien.

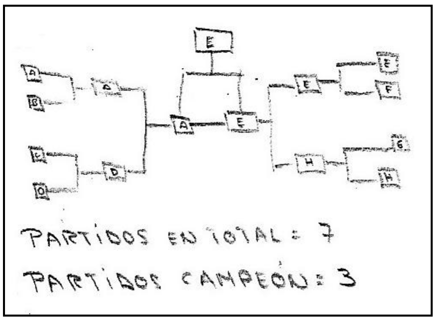


Figura 7. Árbol, 8e

CASO 49e

La Figura 8 muestra el gráfico típico que ha elaborado la mayoría de los estudiantes que responden correctamente a esta cuestión. En este caso 49e, va marcando el posible ganador como guía para poder responder a la pregunta sobre cuántos partidos juega el campeón. Este estudiante, el mismo cuya aportación se recoge en la Figura 4, mantiene su estrategia para encontrar el campeón marcando las casillas del gráfico.

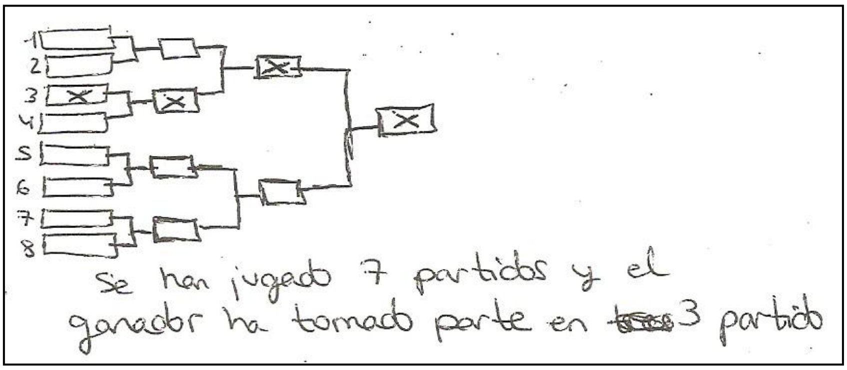


Figura 8. Árbol, 49e

5. CONCLUSIONES Y REFLEXIÓN

Los resultados muestran que, respecto al primer propósito, relación deportes y matemáticas, los estudiantes entienden la situación que se les plantea, aunque el contexto en el que se desarrolla, una competición deportiva, les resulta extraño en el contexto de una clase de didáctica de la matemática. A grandes rasgos, las producciones de los estudiantes responden a dos comportamientos. Aquellos que, a partir del árbol con cuatro jugadores, lo reproducen para ocho jugadores, siendo quizás éste, el comportamiento esperado en una clase de matemáticas, aunque su razonamiento y pensamiento matemático no les permite abstraerse para conseguir la solución general a las preguntas. Y el proceder de los que recurren a sus conocimientos deportivos para responder y continuar la secuencia cuando aumenta el número de jugadores. Ese conocimiento de la vida cotidiana les lleva a situaciones que no les permite responder con éxito a preguntas sobre el número de partidos jugados en los que participa el campeón.

El segundo propósito, el uso de los diagramas de árbol en la resolución de problemas y observar las estrategias, lleva a varias reflexiones. Se puede considerar que la experiencia proporciona información de lo que los estudiantes piensan sobre la construcción de cuadros de competición, pudiéndose detectar distintas estrategias de solución. En la construcción del árbol con seis jugadores es donde surgen las producciones más interesantes, ya que la tarea que tienen que realizar no es mera reproducción, sino que han de adaptar el modelo propuesto. Además, es significativo señalar cómo intentan plantear sistemas de competición que sean, además de lógicos, justos para todos los jugadores. Surgen estrategias que llevan a plantear soluciones alternativas a la correcta, pero que no se pueden considerar como totalmente erróneas. Así, muchos estudiantes consideran que cuando hay tres jugadores debe ganar el mejor de los tres. El triangular sería una opción válida si no hubiese condiciones matemáticas implícitas que hacen que su estrategia falle y que los estudiantes desconocen. Es el caso de las relaciones de orden y su aplicación desde el punto de vista práctico y, en concreto, la relación de transitividad que aplican para encontrar el campeón y que no se verifica en el caso de un triangular.

Sobre trabajar un proceso de generalización cercana y lejana, para observar pautas o buscar patrones ante la generalización numérica y algebraica, se desiste después de observar las dificultades y concepciones erróneas que arrastran los estudiantes y que se observan en los casos particulares o generalización cercana. Esto no impide que algunos sí que lleguen a deducir que lo más cómodo para planificar es que el número de jugadores sea una potencia de dos, es decir, lo más que llegaron fue a escribir esta secuencia. A posteriori, se esperaba realizar una discusión sobre los errores y dificultades, que fuese motivo de reflexión, como una ayuda profesional y su posible adaptación a primaria.

Esta experiencia ratifica la importancia del conocimiento del profesor según modelo de Shulman, pues se observa que fallan los contenidos matemáticos, debido a que su formación en combinatoria y probabilidad ha sido escasa, tienen un mínimo conocimiento de la matemática discreta y nulo en grafos. Así, trazan árboles donde las aristas se superponen o duplican los vértices, cometiendo errores similares a los alumnos de secundaria, como conectar los jugadores, vértices del grafo, por más de un camino, pues desconocen totalmente la idea de representación de árbol como un grafo. Los futuros profesores no parece que posean mayor formación en este sentido que los alumnos de secundaria.

El hecho de que un alto número de estudiantes deje en blanco las cuestiones sobre el número de partidos jugados en total y por el ganador tiene como consecuencia que los porcentajes de éxito sean bajos en estas cuestiones, siendo incluso peores que los de los alumnos de secundaria. El relativo peor resultado, puede deberse al tiempo disponible ya que en esta experiencia sólo dispusieron de media hora, mientras que en secundaria tuvieron toda la hora de la clase de matemáticas. Además, en secundaria habían tenido instrucción previa en combinatoria y probabilidad, mientras que para los fututos profesores, la actividad es anómala en clase de didáctica de las matemáticas. Si bien, a posteriori, varios solicitan que se profundice en esa relación de las matemáticas con la planificación de competiciones deportivas, ya que saben que entre sus múltiples competencias, estará organizar actividades deportivas en el centro escolar.

Referencias

Antequera, A.T., Espinel, M.C. (2009). Diagramas de árbol como destrezas cotidianas de estudiantes de secundaria. *Actas XIV Jaem*, Girona.

Cañadas, M.C., Figueiras, L. (2009). Razonamiento en la transición de las estrategias manipulativas a la generalización. En M.J. González, M.T. & J. Trujillo (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIII*, pp. 161-172. Santander: SEIEM.

DeBellis, V.A., Rosenstein, J.G. (2004). Discrete Mathematics in Primary and Secondary Schools in the United States. *ZDM*, 36, 2, 46-55

Espinel, M.C. (1995). La presencia de la matemática discreta en las competiciones deportivas. *Boletín Sociedad "Puig Adams"*, 47, 47-57.

Godino, J.D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*, 20, 13-31.

Hernández, J., Socas, M. (1994). Modelos de competencia para la resolución de problemas basados en los sistemas de representación en Matemáticas. *Suma*, 16, 82-90.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20, 2, 147-164

DEFICIENCIAS EN EL TRAZADO DE GRÁFICAS DE FUNCIONES EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Deficiencies in plotting graphs of functions in high school students

Matías Arce y Tomás Ortega

Universidad de Valladolid

Resumen

Este trabajo trata sobre el concepto de función, básico en el Análisis Matemático, y, en particular, su representación gráfica, centrándonos en aspectos relacionados con la forma, el trazado de dicha representación. Se presentan los resultados encontrados al realizar un estudio de las representaciones gráficas de funciones existentes en los cuadernos de matemáticas de estudiantes de varias aulas de 1º de Bachillerato. Hemos encontrado varias deficiencias en el trazado de gráficas que se repiten en un alto número de estudiantes, relacionadas con los conceptos de función y asíntota, con el uso de las escalas en los ejes del diagrama cartesiano y con las características de algunas funciones. Además, discutimos sobre las limitaciones técnicas y las dificultades didácticas y cognitivas que pueden dar lugar a su aparición, realizando al respecto algunas recomendaciones didácticas.

Palabras clave: *Función, representación gráfica de una función, trazado de gráficas, errores y dificultades, Bachillerato.*

Abstract

This paper deals with the concept of function, basic in Mathematical Analysis, and, in particular, in its graphical representation, putting our attention on plotting graphs of functions. Here, we present the findings of a study on graphical representations of functions found in mathematical notebooks of high school students. We encountered several deficiencies in plotting graphs, related to the concepts of function and asymptote, the use of scales in diagram axes and the characteristics of some functions. Besides, we discuss about the technical limitations and the didactic and cognitive difficulties that may promote their emergence, and, finally, we make some didactic recommendations for teachers.

Keywords: *Function, graphical representation of a function, graphing, mistakes and difficulties, High School.*

Introducción

El trabajo que aquí se expone está encuadrado dentro de un proyecto de investigación más amplio que se está llevando a cabo en la Universidad de Valladolid, que estudia los cuadernos de matemáticas (de ahora en adelante, CM) de los alumnos de 1º de Bachillerato, herramienta poco estudiada en Didáctica de la Matemática. El proyecto de investigación se enmarca dentro del bloque de Análisis Matemático, y busca el establecimiento de diferentes perfiles de elaboración y uso del CM en los alumnos y posibles relaciones entre estos perfiles y el rendimiento académico. A lo largo del análisis de los CM de los estudiantes participantes, y aunque no era un objetivo de la investigación global, nos ha sorprendido la presencia de una gran cantidad de deficiencias, algunas muy frecuentes, en las representaciones gráficas (RG) de funciones existentes en sus CM. La importancia del concepto de función, básico en análisis matemático, y sus diferentes

Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencias en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de Bachillerato. A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 147-155). Bilbao: SEIEM.

representaciones hace que consideremos relevante dar a conocer esta problemática y reflexionar sobre los motivos que pueden propiciarla, aunque creemos que son necesarias investigaciones específicamente dirigidas a conocer cuáles son las causas reales que provocan estas deficiencias y proponer situaciones adaptadas para su revisión y reajuste (Azcárate, 1995).

Para Castro y Castro (1997), las representaciones son "las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes" (p. 96). Estas pueden ser externas (con un soporte físico tangible) o internas (imágenes mentales formadas de los objetos matemáticos), relacionándose la generación de unas y otras a través del proceso de visualización. Duval (1993) señala que los sistemas de representación son el motor para el aprendizaje y el dominio de un concepto: el conocimiento de varios sistemas de representación y la capacidad para pasar de unos a otros enriquece lo que Tall y Vinner (1981) llaman *imagen* o *esquema conceptual* de un concepto ("concept image"), la estructura cognitiva que un individuo asocia al mismo. Los alumnos suelen confiar en sus imágenes conceptuales para la resolución de problemas (Vinner, 1991), apareciendo, en ocasiones, conflictos entre la imagen conceptual y la definición del concepto, como en el estudio de Kidron (2011) sobre la asíntota horizontal.

En ocasiones, las representaciones elaborados por los alumnos contienen errores, desajustes, que pueden revelar características o componentes erróneos. Los errores, normales y naturales en los procesos de enseñanza y aprendizaje, han sido objeto de investigación constante en Educación Matemática, aunque desde aproximaciones e intereses diferentes (Rico, 1995). El trabajo de Rico contiene algunas clasificaciones de errores propuestas por diferentes autores. Socas (2007) da una clasificación de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas que son las que, en definitiva, provocan los errores. Una de las cinco categorías que Socas establece son las *dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos*, que pueden estar ligadas a la naturaleza abstracta del concepto, como entidad conceptual, o a la manipulación simbólica, a un nivel sintáctico; estableciendo este autor tres estadios progresivos de desarrollo en la adquisición de un sistema de representación: *semiótico*, *estructural* y *autónomo*.

Leinhardt, Zaslavsky y Stein (1990) analizan los diferentes tipos de tareas y las ideas equivocadas ("misconceptions") más recurrentes en los alumnos sobre las funciones y sus gráficas. Estudios más modernos sobre la interpretación, comparación o construcción de gráficas tanto en situaciones contextualizadas como no, buscando las concepciones de los estudiantes en estas cuestiones, son los de Deulofeu (1995), Fabra y Deulofeu (2000) y Dolores (2004). Estas investigaciones destacan ciertas tendencias significativas en el alumnado: la discretización de funciones (atención excesiva a puntos relevantes y su ubicación), la representación como continuas de funciones que no lo son y, coincidiendo con Leinhardt et al. (1990), la falta de percepción de la noción de covariación, de dependencia entre las variables. Destacamos también el trabajo de Pecharromán (2008), donde se diseña un modelo de enseñanza para las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.

Planteamiento del trabajo. Objetivos

En el trabajo aquí expuesto nos centraremos en el sistema de representación gráfico de las funciones, analizando las representaciones externas del concepto que encontramos en los CM de varios grupos de alumnos de Bachillerato, focalizando la atención en su forma y estudiando si la RG refleja las propiedades y características de la función representada. Socas (2007) hace hincapié, al hablar de errores, en la presencia de esquemas cognitivos inadecuados. En nuestro caso, pudiera ser que las incorrecciones encontradas en las RG de algunos de los alumnos no estuvieran provocadas por la presencia de esquemas inadecuados, sino por la poca atención o precisión al trazar la gráfica, no reproduciéndose adecuadamente las ideas y propiedades existentes, lo que puede ser fuente de dificultades para el aprendizaje (ejemplo en Ortega, 1998). De ahí que prefiramos utilizar la palabra “deficiencias” para estas incorrecciones, que pueden estar causadas por diferentes motivos.

Los objetivos planteados son los siguientes:

- Detectar cuáles son las deficiencias más frecuentes en el trazado de las gráficas de funciones.

- Reflexionar sobre las limitaciones técnicas y las dificultades didácticas o cognitivas que pueden ocasionar estas deficiencias.

- Recomendar acciones didácticas que puedan paliar estas deficiencias.

Marco teórico-metodológico de análisis. Contexto del estudio

En el estudio participan 29 estudiantes de 1º de Bachillerato de dos centros distintos: un instituto público de un barrio de Valladolid (donde participan dos aulas: de la modalidad Científico-Técnica y de Sociales) y un colegio privado-concertado situado en las afueras de la ciudad (donde participa la clase de la modalidad Científico-Técnica). Las tres aulas, elegidas por disponibilidad, tienen un profesor de matemáticas diferente y un número reducido de estudiantes (unos 10 por aula), participando todos ellos en este estudio salvo una minoría que no tienen CM.

En las aulas participantes, la docencia desarrollada fue la natural de los profesores, sin directrices ni intervención por parte del equipo investigador. Pedimos elaborar al docente de cada aula un diario de clase donde explicara brevemente la docencia desarrollada (desde el punto de vista tanto teórico como práctico. Los investigadores actuaron, algunos días, como observadores en el aula. De la información de diarios y observación extraemos que el bloque de Análisis Matemático sólo se completó en el aula de Sociales, no completándose el tema de derivadas en las otras dos aulas. El docente del aula de Sociales solía dejar tiempo en la propia clase para el trabajo del alumno en las tareas propuestas, que iba revisando y finalmente corregía de manera grupal. En las otras dos aulas la docencia se centraba en el desarrollo de la teoría y la corrección de ejercicios, desarrollando los alumnos su trabajo personal casi siempre fuera del aula. Ninguno de los tres profesores revisaba los CM de sus alumnos, salvo las revisiones visuales del primero mientras trabajaban los alumnos en el aula.

Los documentos utilizados para realizar el análisis son las fotocopias de los CM de los alumnos pertenecientes a este bloque. El marco teórico-metodológico utilizado para el análisis de las fotocopias es el *análisis de contenido* (Krippendorff, 1990; Bardin, 1996), técnica de interpretación de textos capaces de albergar un contenido que, leído e interpretado adecuadamente, nos permite conocer mejor diversos aspectos y fenómenos (Andréu Abela, 1998). La técnica es especialmente adecuada para analizar material poco estructurado (Krippendorff) como los CM y su principal objetivo es pasar de la mera descripción de un texto a su interpretación y a la formulación de inferencias, teniendo en cuenta para estas el contexto en que se desarrolla el análisis. Bardin llama unidad de registro a cada uno de los segmentos de contenido tomados como base para el análisis. En este trabajo, cada una de las RG existentes en esas fotocopias de los CM ha sido una unidad de registro. Estas han sido analizadas independientemente de que fueran construidas por los propios alumnos (en el sentido de Leinhardt et al., 1990, generación de algo nuevo no existente) o transcritas de otro medio. Se ha analizado la corrección matemática de cada RG, ayudándonos de la información contextual (diarios y observación varios días en las aulas) para saber qué representaba cada una. En cada unidad de registro se han indicado, en caso de que existieran, las deficiencias en la representación gráfica (DRG) existentes más notorias, es decir, aquellas que entendemos que pueden dar lugar a dificultades en la interpretación del comportamiento de la función si solo contáramos con su RG como información de la misma.

Una vez completado el estudio de las deficiencias en cada unidad de registro, hemos agrupado aquellas más frecuentes en cuatro categorías diferentes (generadas de manera inductiva), que se explican en el próximo apartado.

Deficiencias frecuentes encontradas en el análisis

Sin pretender hacer una clasificación exhaustiva, presentamos las cuatro categorías diferentes en que hemos agrupado las DRG encontradas, ilustrando las mismas con escaneos de RG de CM donde se aprecia cada uno de los tipos de un modo más evidente.

1. DRG relacionadas con el concepto de función

Una de ellas es el trazado de ramas que son práctica o totalmente verticales en funciones con ramas infinitas no asintóticas[xviii] (RI), como pueden ser las funciones polinómicas de segundo o tercer grado o las funciones exponenciales (en la Figura 1 se ilustra esta DRG en una función cuadrática). Se ha observado en 18 de los 29 alumnos (un 62%).

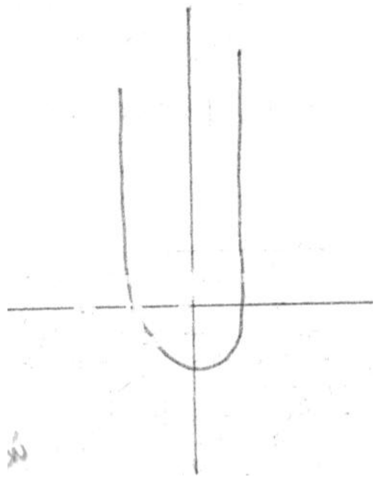


Figura 1

Es frecuente la aparición de este mismo comportamiento en ramas asintóticas[1] (RA) en su proceso de aproximación a asíntotas verticales (RA totalmente verticales), como indicaremos en el punto 2. Dentro de esta categoría, encontramos también, en 9 alumnos (un 31%), funciones donde se representan valores del dominio con dos (o más) imágenes, al solaparse varios trazados en la RG de la función. Especialmente se produce al realizar las RG de funciones definidas a trozos, en las que los estudiantes ignoran el dominio de definición de cada parte. La Figura 2 muestra este comportamiento, en el intervalo [1,3]:

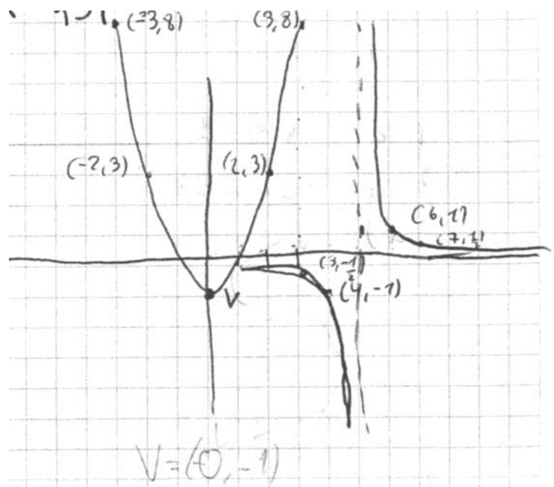


Figura 2

2. DRG relacionadas con el concepto de asíntota

La DRG más mayoritaria de esta categoría la encontramos en RG de funciones con RA en las cuales no se produce un acercamiento progresivo a la asíntota horizontal (AH) o vertical (AV). En 24 alumnos (un 83%) encontramos equidistancia entre la RA y la AV a partir de un determinado momento (DRG también relacionada con el concepto de función, como indicamos en el punto 1). El fenómeno de equidistancia es algo menos frecuente entre una RA y una AH (en 18 alumnos, un 62%). Además, en 10 alumnos (un 34%) hay alguna RG donde llega a producirse, incluso, un alejamiento entre RA y asíntota en la parte final de su trazado. La figura 3, donde se representa una hipérbola y sus asíntotas, evidencia estos fenómenos:

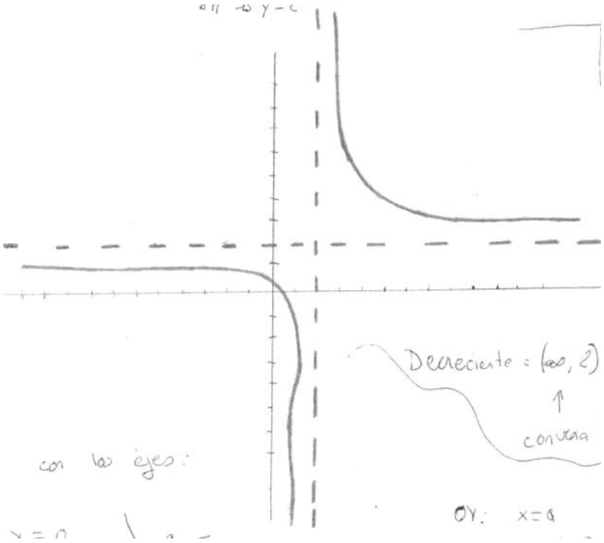


Figura 3

Por otra parte, hay 6 alumnos (un 21%) que no dibujan las asíntotas existentes en algunas de las RG de sus CM, lo que provoca una dificultad para discernir el comportamiento de algunas ramas de la función a través de la visualización de la RG. La Figura 4, donde no se dibuja la AV existente en x=2, ilustra este fenómeno. Además, hay RG en 5 alumnos (un 17%) donde la RA no da sensación de ser tal, al dibujarse ésta demasiado corta, bien quedándose muy alejada de la asíntota o bien acercándose a ésta con dirección inadecuada, dando la sensación de que la rama cortaría a la asíntota si esta se prolongara.

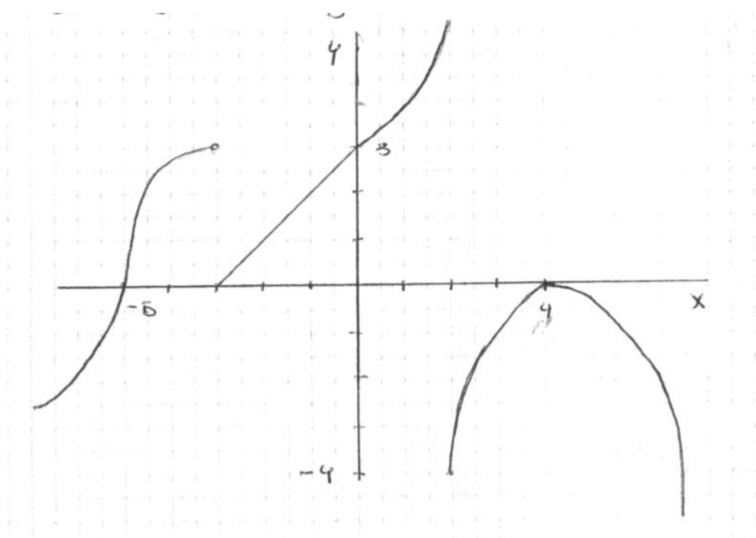


Figura 4

3. DRG relacionadas con la asignación y uso de escalas en los ejes cartesianos

Encontramos varias deficiencias de este tipo. En 12 alumnos (un 41%) encontramos un uso de escalas no proporcionales (distinta unidad a lo largo del eje) en alguno de los ejes de los gráficos existentes. Este problema se concentra en la clase de la modalidad de Ciencias Sociales, apreciándose en 7 de sus 8 alumnos (un 87’5%), sobre todo en las RG asociadas a problemas de interpolación lineal (Figura 5).

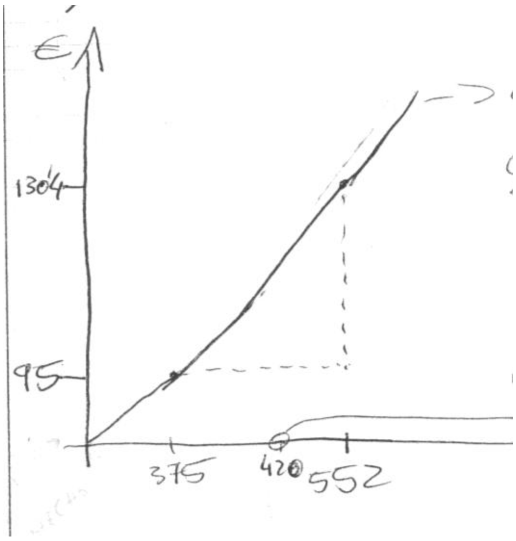


Figura 5

La DRG de este tipo más frecuente (en 22 alumnos, un 76%) es la omisión de las escalas en los ejes coordenados en funciones donde sí son necesarias para una RG precisa (por ejemplo, para hacer la RG de una función dada su expresión algebraica). En su gran mayoría, la omisión está relacionada con el uso implícito como unidad de la cuadrícula de las hojas del CM. Observamos un uso, en general, poco crítico de las escalas en los alumnos, abusando de la escala con unidad el lado de la cuadrícula, aunque pueda ser más recomendable utilizar otras unidades para visualizar mejor las propiedades de la función.

4. DRG relacionadas con las características de las funciones

Encontramos en 10 alumnos (un 34%) DRG en funciones crecientes en su dominio, como pueden ser y=+$\sqrt{x}$ ó y=log(x), cuya RG en la parte final del trazado de la RI se realiza paralela al eje de abscisas o, incluso, decreciente. Es cierto que la tasa de crecimiento que tienen las dos funciones anteriores (en las que se detecta esta DRG) es cada vez más pequeña al aumentar x, pero un estancamiento tan pronunciado pudiera producir confusión, al observar la gráfica, sobre si la rama es RI o RA. En la Figura 6 observamos esta deficiencia, además del mal uso de las escalas:

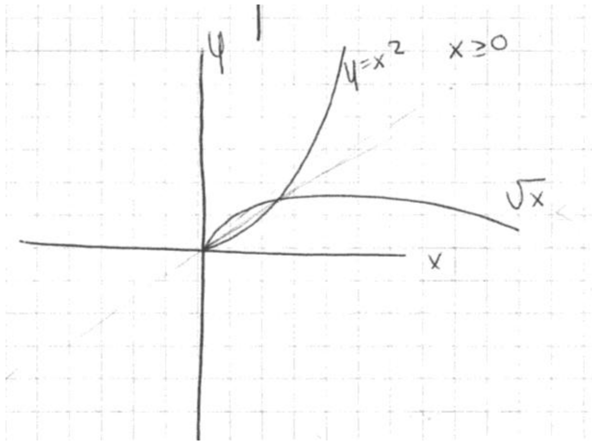


Figura 6

Otra DRG, muy frecuente en una de las aulas, ha sido la RG de funciones cuadráticas en las cuales la gráfica tiene una forma pronunciada de "pico" en el entorno del vértice de la parábola. Se ha detectado en 8 alumnos (un 28%), siete de ellos pertenecientes a un mismo aula. En la Figura 7 se evidencia esta DRG (en la parte superior), que puede dificultar la asimilación posterior del concepto de derivabilidad. Otro aspecto que puede oscurecer el comportamiento de la función en un entorno del vértice de la parábola es la representación del punto que marca el vértice con un tamaño demasiado grande.

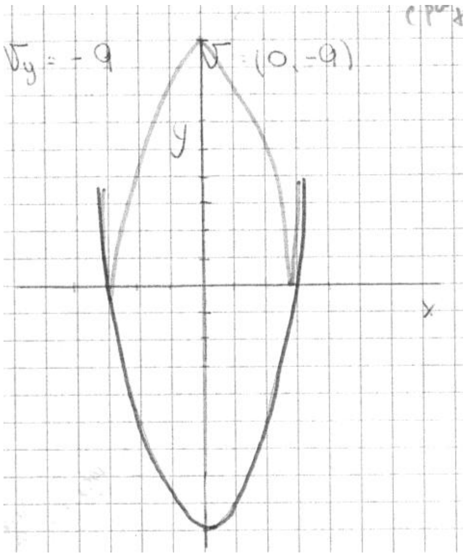


Figura 7

En la Figura 7 también podemos observar las DRG, detectadas en 6 alumnos (un 21%), al representar la simetría, respecto del eje de abscisas, de los valores negativos de una función f para representar y=|f(x)|.

Discusiones y conclusiones

Establecemos varias causas para la aparición de estas DRG, de diferente naturaleza y que requerirían un tratamiento distinto para su superación:

- Pueden estar causadas por problemas del alumno al reproducir, a través de un deficiente trazado en la RG de la función sobre el papel, el comportamiento o propiedades de la función o sus elementos, que el alumno tiene correctamente interiorizados en sus esquemas conceptuales.

- Pueden reflejar un desconocimiento de cómo se traducen ciertas propiedades de la función en su RG.

- Pueden reflejar la existencia de errores en el esquema conceptual que el alumno tiene de conceptos como el de función, asíntota, o las características de determinados tipos de funciones.

El docente, a través de ciertos errores didácticos, puede provocar una mayor aparición de estas DRG. Por ejemplo, los picos en funciones suaves pueden proceder de dibujar en la pizarra las RI partiendo de un mismo punto (como el vértice en una parábola).

Una función puede determinarse completamente a través de su RG, pero existen dificultades, en algunas funciones, para poder visualizar o extraer cuál es su comportamiento o propiedades a través únicamente de su RG en papel, por ejemplo para discriminar entre la existencia de una RA o una RI en funciones como y=log(x). Estas dificultades pueden magnificarse con un trazado poco preciso, y pueden convertirse en un obstáculo si el alumno no tiene interiorizadas las propiedades de un tipo o modelo determinado de función en sus esquemas cognitivos, lo que le puede llevar, en ese caso, a deducir propiedades incorrectas al visualizar su RG. Como recomendación didáctica para los docentes, sugerimos plantear tareas donde se proponga la formulación de propiedades de una función a través únicamente de su RG, con la presencia de casos donde exista alguna de las dificultades comentadas, y que posibilite la aparición de estas limitaciones y su concienciación sobre ellas. Normalmente la RG de una función suele realizarse tras estudiar sus propiedades. Con los mismos objetivos anteriormente comentados proponemos también la utilidad de una visión retrospectiva, donde se estudie hasta qué punto la RG refleja las propiedades conocidas de la función, y si esta puede mejorarse. También pueden proponerse tareas por parejas donde se intercambien RG elegidas por el docente, y los alumnos tengan que indicar cuáles son sus propiedades (solo con la información de su RG) y compararlas con las propiedades reales de la función. Para disminuir la problemática puede ser recomendable el uso de símbolos gráficos que caractericen y ayuden a discriminar las propiedades, como el uso de la flecha en las RA.

Otra limitación del papel es la imposibilidad de realizar "zoom" en una RG para analizar el comportamiento de una función visualizando una zona más reducida o más amplia. Estas representaciones son posibles con el uso de CAS (Computer Algebra System), pero éste puede provocar alguna dificultad para el estudio global de funciones por una pérdida de la idea de representación cartesiana (cuando desaparecen los ejes), pudiendo, también, crearse conflictos con la imagen mental de la gráfica que tiene el alumno (Leinhardt et al., 1990). Además, el efecto del pixelado al hacer un "zoom" excesivo puede causar problemas relacionados con los conceptos de función, asíntota y discretización. Todo ello hace necesaria una instrucción adecuada en su uso.

Las limitaciones del papel hacen que aumente la importancia de la elección de la escala y sus efectos en la construcción de gráficos. Coincidimos con Leinhardt et al. (1990) en que un gráfico no puede interpretarse completamente sin tener en cuenta sus escalas, apareciendo las tareas relacionadas con el escalado como un tipo de tareas a plantear a los alumnos en el estudio de funciones y su RG. Hemos constatado en este análisis que los alumnos no dedican demasiada atención a las escalas, destacando: la aparición frecuente de gráficas sin escala, el uso abusivo de la escala implícita en la cuadrícula de la hoja y la utilización de escalas no proporcionales en algún eje (categoría 3 de DRG, punto anterior). Estas deficiencias pueden están relacionadas con un déficit en la concepción global de las funciones que tienen los alumnos, causado por un exceso en el uso de tablas de valores y la focalización de la gráfica en torno a esos puntos (problemas de discretización ya comentados en los antecedentes). Los cambios en la escala provocan ciertos cambios en el aspecto de una función, que hacen que el trazado y visualización de sus propiedades y características sea más o menos difícil. Las limitaciones del papel para la RG hacen necesario escoger una escala razonable que nos facilite ese trazado y visualización, evitando los efectos contraproducentes que puede tener la consideración de valores excesivamente grandes de abscisas y ordenadas (que hagan los trazados de las RI prácticamente verticales u horizontales) o el uso de escalas con unidad demasiado pequeña al trazar RA (que favorece la aparición de fenómenos de equidistancia, punto 2 del apartado anterior). Por ello, recomendamos a los docentes proponer tareas donde los alumnos visualicen las diferencias que provoca la elección de escalas en la RG de una función y tareas donde, tras presentar una función verbalmente o a través de su expresión analítica, se discuta cuál es la escala más adecuada para su RG "óptima". Este tipo de tareas también favorece la concepción global del concepto de función.

Debido a que no era inicialmente el estudio de las RG un objetivo de nuestra investigación global, no podemos determinar, con los datos recogidos, en qué casos nos encontramos ante errores de trazado, asociados a la traducción entre sistemas de representación o errores causados por esquemas cognitivos inadecuados. Consideramos necesario seguir investigando esta problemática, con investigaciones específicas centradas en ella (estudios en aulas con grabaciones y entrevistas a los alumnos) que nos permitan conocer las causas que provocan estas DRG y la creación de tareas o situaciones adaptadas que nos permitan reajustar los esquemas cognitivos inadecuados en cada caso.

Referencias

Andréu Abela, J. (1998). *Las técnicas de análisis de contenido: una revisión actualizada*. [Documento en línea]. En: http://public.centrodeestudiosandaluces.es/pdfs/S200103.pdf [Consulta: 2011, mayo 18].

Azcárate, C. (1995). Sistemas de representación. *UNO*, 4, 53-61.

Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido*. Madrid: Editorial Akal (2ª ed.).

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En Rico, L. (coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ICE- Horsori.

Deulofeu, J. (1995). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre distintas gráficas de funciones. *UNO*, 4, 6-16.

Dolores, C. (2004). Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME*, 7(3), 195-218.

Duval, R. (1993). Sémiosis et Noésis. Conférence A.P.M.E.P.I.R.E.M.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: continuidad y prototipos. *RELIME*, 3(2), 207-230.

Kidron, I. (2011) Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9 (6), 1261-1279.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica.* Barcelona-Buenos Aires-México: Paidós Comunicación.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60(1), 1-64.

Ortega, T. (1998). Algunos apuntes sobre el uso de gráficas cartesianas. En Lacasta, E. y Pascual, J. (eds.), *Actas del Segundo Simposio de la SEIEM* (pp. 155-164). Pamplona: SEIEM.

Pecharromán, C. (2008). *Aprendizaje de las propiedades globales de las funciones a través de sus gráficas.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Gómez, P. y Rico, L. (eds.), *Educación Matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En Camacho, M., Flores, P. y Bolea, P. (eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). La Laguna, Tenerife: SEIEM.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning. En Tall, D. (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Holanda: Kluwer

---

[xviii] En este trabajo, las iniciales RI harán referencia a ramas infinitas no asintóticas (que no se acercan a una asíntota), mientras que RA harán referencia a ramas infinitas asintóticas.

USO DE TECNOLOGÍA EN EL APRENDIZAJE DE GEOMETRÍA CON GRUPOS DE RIESGO: UN ENFOQUE DISCURSIVO

Use of technology in the learning of geometry with groups at risk: A discursive approach

Alberto Arnal y Núria Planas

Universidad de Zaragoza, Universidad Autónoma de Barcelona

Resumen

Tomando el aprendizaje como participación en prácticas discursivas, presentamos un estudio sobre el aprendizaje de la Geometría en clases de secundaria con alumnado en situación de riesgo social. Bajo el supuesto del uso de la tecnología como promotor de participación, se diseñó e implementó una secuencia didáctica en un entorno de geometría dinámica. En el análisis de casos de estudiantes se consideraron aspectos cognitivos, afectivos e instrumentales de modo integrado. En este informe se ilustran dos resultados derivados del desarrollo de un caso. Por un lado, la dificultad por definir la noción de incentro se asocia a un uso del entorno informático poco significativo matemáticamente. Por otro, el rechazo a la exposición pública en la pizarra digital interactiva se asocia a la experiencia de dificultades en procesos de pensamiento matemático.

Palabras clave: *aprendizaje, Geometría, uso de tecnología, alumnado en riesgo, datos de aula.*

Abstract

Taking learning as participation in discursive practices, we present a study on the learning of Geometry in secondary classrooms with socially at-risk students. Under the assumption of technology-based environments acting as facilitators of participation, a didactical sequence with dynamic geometry software was designed and implemented. In the analysis of cases of students, we jointly considered cognitive, affective and instrumental aspects. For this report, we illustrate two results emerging from the construction of one case. On the one hand, the difficulty in the definition of the notion of incenter is related to a mathematically weak use of the technological environment. On the other hand, the rejection toward being publicly exposed on the interactive whiteboard is related to the experience of difficulties in mathematical thinking processes.

Keywords: *learning, Geometry, technology use, at-risk students, classroom data.*

INTRODUCCIÓN Y OBJETIVOS DEL ESTUDIO

En el marco de dos proyectos de investigación sobre la comprensión del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas como participación en prácticas discursivas de aula reguladas por normas sociales y socio-matemáticas (Yackel, Gravemeijer y Sfard, 2011), nuestro equipo ha completado varios estudios (e.g., Morera, Planas y Fortuny, 2012; Chico y Planas, 2011). El trabajo que aquí presentamos comparte este posicionamiento discursivo a fin de explorar factores de influencia en la mejora de la participación matemática de alumnado en situación de riesgo social. La participación matemática se interpreta en un entorno instructivo con contenidos curriculares de geometría plana. Se pone especial énfasis en la resolución de tareas de contextualización de los puntos notables del triángulo y en las propiedades de este objeto mediante un programa de geometría dinámica. Entendemos que la detección de evidencias de mejora en la participación matemática permite detectar escenarios, oportunidades y evidencias de aprendizaje matemático (Morera, Planas y Fortuny, 2013). Al mismo tiempo, entendemos que la identificación de obstáculos a la participación

Arnal, A. y Planas, N. (2013). Uso de tecnología en el aprendizaje de la Geometría con grupos de riesgo: un enfoque discursivo. A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 157-164). Bilbao: SEIEM.

matemática permite identificar escenarios con escasa creación y aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje matemático (Morgan y Watson, 2002).

Para la construcción de casos de alumno, se recurre a dos dimensiones cuyo análisis se corresponde con la consecución de dos objetivos científicos:

- Objetivo 1 (Dimensión instrumental) – Identificar progresos y dificultades de alumnos relativos al uso directo o indirecto de tecnología en su aprendizaje de la Geometría.
- Objetivo 2 (Dimensión afectiva) – Identificar actitudes y emociones relativas a la introducción de un entorno tecnológico en dicho aprendizaje.

En lo que sigue, resumimos nuestro enfoque teórico, la intervención didáctica para la toma de datos y el procedimiento de análisis aplicado al desarrollo de casos de alumno. Por cuestiones de espacio nos ceñimos a trabajos que conectan el aprendizaje de la Geometría con el uso de programas de geometría dinámica y a otros más generales que examinan el dominio afectivo en el aprendizaje de las Matemáticas. Consideramos las características del grupo de alumnado sobre todo en el diseño instructivo y en la interpretación de las formas de participación en el aula. Continuamos con la ejemplificación parcial del caso de Brayan y la síntesis de dos resultados obtenidos en la construcción de este caso. Acabamos con una breve discusión de acciones futuras de investigación.

ASPECTOS DE LA DIMENSIÓN INSTRUMENTAL

La incorporación de entornos tecnológicos de aprendizaje de la Geometría ha sido explorada a nivel local (e.g., Marrades y Gutiérrez, 2000) e internacional (e.g., Healy y Hoyles, 2001). Por lo general, se trata de estudios con datos proporcionados durante la implementación de secuencias didácticas diseñadas con el propósito de introducir o bien consolidar el uso de tecnología en el desarrollo de pensamiento matemático. Son trabajos con un doble fin de innovación e investigación, que documentan la planificación, diseño e implementación de secuencias didácticas junto con su análisis y evaluación. Buscan clarificar el papel que el uso de un cierto programa informático tiene en el aprendizaje y la enseñanza de la Geometría, pero los propios resultados de la investigación acaban informando sobre cómo modificar la secuencia didáctica. Siguiendo estos trabajos y la tradición del diseño experimental en educación matemática, se apunta a la importancia de la secuencia didáctica como artefacto mediador en la construcción de aprendizaje.

El diseño experimental de Morera (2013) destaca la anticipación y concreción de los tipos de orquestación durante la resolución de problemas en interacción con un programa de geometría dinámica. El uso del programa se organiza de un modo sistemático que guíe la génesis instrumental del estudiante antes y durante el desarrollo de discusiones en gran grupo. La orquestación se refiere a acciones donde hay un uso directo de la tecnología o bien donde hay un uso indirecto mediante la mención a producciones realizadas en el ordenador. Siguiendo los tipos de orquestación de Drijvers y otros (2010) y con base en el carácter mediador de la enseñanza en el aprendizaje (Mariotti, 2000), se apunta a la importancia de caracterizar la gestión que el profesor hace de las prácticas de aula. En nuestro estudio tomamos dos tipos de orquestación: ‘demostración técnica-explicación de la pantalla’, para el trabajo individual y en parejas con el programa de geometría dinámica en los miniportátiles, y ‘discusión de la pantalla-trabajo del sherpa’, para la discusión en gran grupo con la visualización en la pantalla digital interactiva de las producciones realizadas por los alumnos.

ASPECTOS DE LA DIMENSIÓN AFECTIVA

En Planas (2004) se documenta el detalle de un caso de alumno con baja participación en el aula de matemáticas y un escenario emocional frágil en relación con las expectativas de aprendizaje matemático. Este es uno de los varios casos de alumno en situación de riesgo social de los cuales se reporta una baja participación matemática generalizada. Por otra parte, Blanco, Guerrero y

Caballero (2013) señalan la existencia de diferencias en el aprendizaje matemático de estudiantes para maestro asociadas a la diversidad de escenarios emocionales experimentados. Otros trabajos del ámbito internacional confirman la fuerte relación entre participación, cognición y afecto (e.g., Leder, 2006). Del conjunto de estos trabajos, se infiere que el estudio de la influencia de los escenarios emocionales en los procesos de participación matemática en el aula constituye un modo de prever el grado posible de aprovechamiento de oportunidades de aprendizaje.

Hannula (2006) destaca el carácter psicológico y social del afecto. En el contexto de nuestra investigación, esto implica que el análisis de la dimensión afectiva requiere considerar datos sobre los procesos de razonamiento matemático, así como sobre las normas de la clase donde se desarrollan dichos procesos y sobre los participantes con quienes se comparten. En particular, la introducción de un entorno de geometría dinámica es un factor clave que modifica algunas de las normas de las aulas del estudio, ya sean sociales (e.g., los miniportátiles y la pizarra digital son recursos válidos para el trabajo individual, en pareja y en gran grupo) o socio-matemáticas (e.g., las demostraciones técnicas con el programa de geometría dinámica son matemáticamente suficientes y la explicación de la secuencia de acciones en la pantalla digital es necesaria). Cabe esperar que la introducción de nuevos instrumentos y los cambios derivados en las normas de clase provoquen cambios en la configuración de escenarios emocionales.

PARTICIPANTES, SECUENCIA DIDÁCTICA Y TOMA DE DATOS

Nuestra investigación es un estudio múltiple de casos de estudiante, vinculados entre ellos cuando pertenecen al mismo grupo clase. En primavera de 2010 se seleccionaron tres aulas de un centro de secundaria en Huesca, ubicadas dentro de los denominados programas institucionales de apoyo. Los tres profesores aceptaron implementar una secuencia didáctica de Geometría que se les proporcionó y comentó con antelación. Para los respectivos grupos, se seleccionaron un total de 4, 1 y 4 alumnos de acuerdo con criterios de bajo absentismo (apreciación del profesor), gusto por la tecnología (cuestionario inicial al alumno) y voluntad de colaborar en el estudio (entrevista informal).

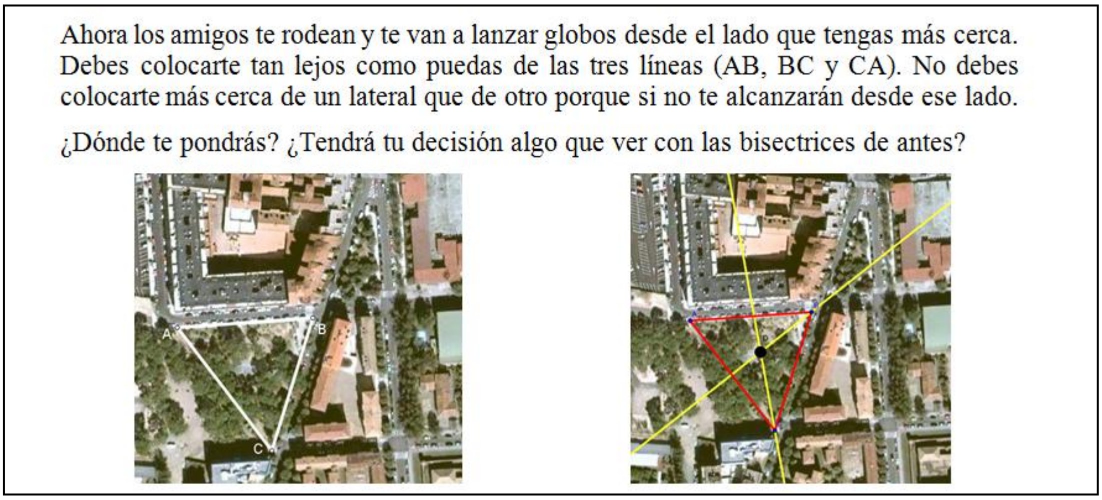


Figura 1. Ejemplo de una tarea y su solución en la tercera sesión de clase

Se diseñó una secuencia didáctica compuesta por cinco actividades que, a su vez, incluían varios problemas. Para cada actividad, se elaboró un guión que se suministró a los profesores como punto de partida para que concretaran su configuración didáctica y su modo de explotación. La primera actividad, por ejemplo, versa en torno a la noción de ángulo y las regularidades que surgen de juegos sobre rebotes en paredes y caminos mínimos entre dos puntos exteriores a una recta tocando la misma. Se propone a los alumnos una aproximación inicial con lápiz y papel, seguida de una exploración con animaciones mediante el programa de geometría dinámica. Las sesiones restantes tienen una organización similar. La Figura 1 muestra el enunciado y las fotografías de uno de los problemas en la tercera sesión. En la fotografía de la derecha, se observa que se pone de relieve la suficiencia de la solución con la intersección de solo dos bisectrices. Tras haber examinado el concepto de bisectriz como línea recta que contiene todos los puntos a igual distancia de dos laterales del patio del centro, los alumnos tienen que pensar la misma tarea para los laterales, primero con dos y luego con tres, que limitan un parque cercano con forma triangular. Así se pretende facilitar la aparición del concepto de incentro como lugar geométrico de los puntos a igual distancia de las tres paredes imaginarias que rodean el parque.

Se realizaron grabaciones de video para cada sesión de clase, con una cámara para cada alumno seleccionado. Se recogieron, además, los protocolos escritos con la resolución de las actividades. Al inicio de cada ficha para el alumno, se incluyeron preguntas para identificar actitudes y emociones previas al inicio de la sesión. Se incluyeron también preguntas intercaladas para identificar dificultades cognitivas e instrumentales en la resolución de las distintas tareas, y posibles cambios en actitudes y emociones. Al terminar cada sesión y durante el mismo día lectivo, se llevaron a cabo entrevistas individuales con los alumnos de los casos. Para cada alumno, las cinco entrevistas tuvieron un guión distinto en función de las respuestas escritas en las preguntas sobre actitudes, emociones y dificultades dentro de la correspondiente ficha. Si, por ejemplo, el alumno había insistido por escrito en la dificultad de usar adecuadamente el programa informático, se le leía su frase exacta y se le pedía que la comentara. Los tres grupos de datos (videos, protocolos y entrevistas) para un alumno son la fuente primaria en la construcción del caso.

(Se pide a una alumna en la pizarra digital que dibuje puntos equidistantes de A y B)

Alumna: ¡Ya está! (dibuja un punto equidistante de A y B que no es el punto medio)

Profesor: ¿Por ahí, más o menos? Medías la distancia de este punto a aquí (A) y de este punto a aquí (B) y te quedaba la misma. ¿Crees que habrá más puntos que cumplan esto?

Alumna: Igual sí.

Profesor: ¿Y dónde crees que estarán, más o menos?

Alumna: Puede estar de este lado. (Señala el simétrico del marcado respecto de AB)

Profesor: ¿Y un poquito más hacia aquí (señala AB), un punto que esté a la misma distancia de los dos?

Alumna: Pues sí, puede ser…

Profesor: Intenta dibujar por dónde irían los puntos que están a la misma distancia.

Alumna: ¡He encontrado un punto! (Dibuja un nuevo punto a igual distancia de A y B, entre el primero que ha dibujado y AB)

Profesor: ¿Y crees que habría más por aquí que estén a la misma distancia?

Alumna: Por el medio, ¿no?

Profesor: En el medio, sí, sí…

Alumna: Ah, el punto medio, sí. ¡Anda, están en línea!

Figura 2. Ejemplo de episodio sobre el progreso de una alumna

Los métodos de análisis fueron cualitativos e interpretativos. Respecto al primer objetivo, para la identificación de progresos en el aprendizaje y dificultades se buscaron episodios con evidencias de comprensión y/o uso correcto o bien erróneo de un concepto o procedimiento matemático (ver un episodio en la Figura 2). Respecto al segundo objetivo, para la identificación de actitudes y emociones se asignaron valores positivos, negativos y no concluyentes a datos donde hubiera manifestaciones explícitas de afecto (e.g., “Es más divertido hacer Matemáticas con ordenador” –valor positivo; “Me cansa buscar tanta herramienta” –valor negativo; “La pizarra digital a veces está bien” –valor no concluyente), estos valores se compilaron y luego se compararon. La mirada conjunta al total de actitudes y emociones y al total de progresos y dificultades, junto con la detección de regularidades y aspectos significativos, da cuenta de cada caso de alumno.

CONSTRUCCIÓN DEL CASO DE BRAYAN

Pasamos a explicar dos resultados para el caso de Brayan. El primero es de carácter instrumental y contribuye a la consecución del objetivo sobre identificación de progresos y dificultades en el aprendizaje de la Geometría durante la resolución de los problemas de la secuencia. A tal efecto, reproducimos parte de un episodio de la tercera sesión y lo comentamos desde la perspectiva del aprendizaje de Brayan, quien conceptualiza mal la noción de incentro bajo la influencia del procedimiento seguido con el programa de geometría dinámica. El segundo resultado es de carácter afectivo y contribuye a la consecución del objetivo sobre identificación de actitudes y emociones del alumno durante su participación matemática en el nuevo entorno tecnológico. A tal efecto, aportamos ejemplos de enunciados escritos o hablados por Brayan también en la tercera sesión, donde expresa rechazo a la exposición pública de sus razonamientos en la pizarra digital. Se trata del alumno cuyo caso se desarrolló con más detalle desde el inicio de la investigación, perteneciente a un aula distinta a la de la alumna que protagoniza el episodio de la Figura 2.

Resultado relativo a la dimensión instrumental

En el problema de la Figura 1, se está trabajando la construcción de los puntos que equidistan de los laterales del parque, dos a dos. Se ha visto que dichos puntos son construibles con el programa de geometría dinámica y que forman una línea recta que cumple las condiciones de bisectriz. A continuación, los alumnos se enfrentan a la utilización reiterada de la funcionalidad del programa que construye la bisectriz de un ángulo dados los dos lados o bien dados tres puntos que definan unívocamente el ángulo (el vértice y un punto en cada lado). El episodio que reproducimos ocurre tras el error de Brayan al proponer como incentro del triángulo ABC (ver Figura 1) “el punto medio entre A y la intersección de la bisectriz por A con el lado opuesto”. Este alumno comete otro error cuando construye mal la bisectriz con el programa de geometría dinámica al pinchar en los tres puntos en orden incorrecto. A raíz del procedimiento con el programa, se confunde.

Brayan: Ya está (ha dibujado sólo una bisectriz en su miniportátil).

Profesora: A ver… ¿en qué punto te situarías tú?

Brayan: Yo en el… (no ha dibujado un punto, sino una recta).

Profesora: Para que estés lo más lejos posible de todas las rectas, por igual claro, porque si estás más cerca…

Brayan: En la bisectriz… trazar la bisectriz y ya está.

Profesora: ¿Y cualquier punto de esa bisectriz?

Brayan: No… sí, de los tres A con B, B con C, C con A.

Profesora: Pero entonces, ¿cuántas bisectrices os estáis dibujando? (…)

Brayan: Tres (repite a un compañero, que ha utilizado tres puntos para construir una bisectriz).

Profesora: ¿Una solo? Pero entonces estarás a igual distancia de dos lados pero del tercero no… depende de dónde te pongas.

Brayan: En el medio, nos hemos puesto en medio (señala el punto medio entre A y la intersección de la bisectriz por A con el lado opuesto).

Profesora: ¿En el medio de qué? En estos puntos estarás a la misma distancia, esto es la bisectriz desde B.

Brayan: No, desde A (se refiere a que con el programa primero pincha en A, luego en B y en C para trazar la bisectriz que pasa por B).

Profesora: Desde B porque pasa por B.

Hay varios episodios en los cuales el uso del programa de geometría dinámica no supone un obstáculo a la comprensión matemática de Brayan, apareciendo más bien como un recurso útil en el desarrollo de estrategias de resolución de los problemas. No pretendemos sugerir, por tanto, que la introducción de entornos tecnológicos es en general un obstáculo al aprendizaje matemático. Sí parece razonable concluir, sin embargo, sobre la necesidad de explorar hasta qué punto los procedimientos propios de un programa informático pueden llegar a interferir en la elaboración de nociones matemáticas que son construibles con dichos procedimientos.

Resultado relativo a la dimensión afectiva

Al finalizar la discusión en torno al problema de la Figura 1 y tras haberse clarificado la noción de incentro, la profesora propone a Brayan que salga a la pizarra digital para explicar su resolución ante el resto de participantes. Al inicio de esta sesión y en otras sesiones anteriores, este alumno ha mostrado una buena disposición a atender las explicaciones de la profesora y de algunos de sus compañeros en la pizarra digital ("Cuando explican las cosas en la pizarra digital, me entero mejor del problema") e incluso se ha manifestado a favor de ser voluntario ("Me gusta salir a la pizarra digital y que todo el mundo me pregunte cosas"). En otras sesiones, cuando está convencido de haber resuelto bien la tarea, no pone objeciones a exponerse públicamente y a usar los recursos de la pizarra digital. Aún así, se limita a ofrecer explicaciones de demostraciones técnicas mediante la pantalla sin añadir palabras de clarificación, por ejemplo cuando muestra cómo mover el vértice de un triángulo para que sea rectángulo. No obstante, en la cuarta sesión, llega a rechazar frontalmente explicar sus razonamientos mediante la pizarra digital. En relación con este momento, en la entrevista dice "Ya me estaba cansando de tanto tablet, [lo que me cansa de los tablet es] el GeoGebra…". Es probable que las dificultades matemáticas experimentadas en la definición de bisectriz y en la de incentro, y posteriormente en la clasificación de triángulos (e.g., No consigue dibujar tres triángulos distintos según sus ángulos), hayan tenido un efecto disuasorio y de prudencia que ha modificado las preferencias de Brayan en las formas públicas de participación, y que ha supuesto un cambio en su escenario emocional.

El análisis de todos los datos en torno a Brayan pone de relieve que el rechazo al uso de la pizarra digital se prolonga más de una sesión, aunque no responde a una reacción global contra el uso de esta herramienta tecnológica a lo largo de la secuencia didáctica. Dadas las alternativas que sugiere Brayan ("Lo hago en el miniportátil"), no hay indicios de abandono de la tarea. Lo que parece estar teniendo influencia en el rechazo del alumno no es tanto la propia herramienta y las dificultades por instrumentarla, sino la función de exposición pública que se le da a la herramienta en el aula. Al respecto, puede ocurrir que no se haya dado la suficiente importancia didáctica a la explicitación y gestión de nuevas normas sociales que regulen la participación en el espacio público creado durante el uso de la pizarra digital. A Brayan se le han hecho notar varios errores matemáticos sin que se haya explicitado que la detección de errores en las producciones con la pizarra digital sirve para profundizar en la discusión de la tarea. Una de las consecuencias es que no se aprovecha todo el potencial didáctico de esta herramienta. El alumno se recluye en el ámbito privado del trabajo con el miniportátil sin que se proyecte en la pantalla de la pizarra lo que está realizando.

DISCUSIÓN FINAL Y ACCIONES FUTURAS

Uno de los principios del enfoque discursivo en nuestra área apunta a la necesidad de fortalecer la relación entre lo matemático y lo didáctico mediante opciones de investigación que resalten la incidencia del contenido matemático en la generación de explicaciones de los fenómenos que se someten a estudio. Por ello, para la ejemplificación parcial del caso de Brayan hemos tomado dos resultados que no son ajenos a la complejidad de los contenidos geométricos que surgen en la resolución de las tareas. Entendemos que el uso más o menos significativo del entorno informático, junto con la disposición ante la exposición pública en la pizarra digital interactiva, tienen que ver con la comprensión que el alumno ha desarrollado de los contenidos matemáticos a manipular. Existe la posibilidad razonable de que el alumno haya desarrollado una interpretación estática de la noción de incentro que influya en la dificultad por usar el programa como herramienta de construcción dinámica de dicha noción. Si el incentro se concibe como una noción estática que designa un punto notable del triángulo, entonces resulta difícil imaginar el proceso de elaboración que avanza hasta un punto fijo de llegada. Algo parecido se puede argumentar con respecto a la particularidad de lo matemático en la obtención del segundo resultado.

Por otra parte, los resultados presentados en este informe indican equilibrios entre el aprendizaje matemático de Brayan, sus formas de participación mediante el uso de tecnología y su experiencia de emociones vinculadas a percepciones sobre ciertos usos del entorno tecnológico. Este alumno, cuya participación matemática había sido escasa hasta el inicio de la secuencia, mejora en ocasiones su implicación en las tareas matemáticas del aula y se muestra como alguien con capacidad de decisión y de actuación en la resolución de dichas tareas. A grandes rasgos puede afirmarse que el nuevo entorno tecnológico y la propia secuencia didáctica son favorables a la participación y al aprendizaje, aunque no de un modo absoluto. Tal como hemos documentado, el entorno tecnológico tiene un papel crítico en relación con al menos dos cuestiones: 1) se requiere aprender a diferenciar entre los procedimientos en la construcción técnica de objetos matemáticos y los procedimientos en la construcción conceptual de estos objetos; 2) se requiere acompañar la introducción de entornos tecnológicos con la actualización de normas sociales a fin de adecuar las explicaciones sobre las formas de participación válidas en los nuevos espacios que se crean.

En futuros estudios será necesario revisar los procesos de diseño e implementación de secuencias didácticas orientadas al aprendizaje de la Geometría en entornos de geometría dinámica, teniendo en cuenta algunos de los aspectos que potencian el uso matemáticamente significativo de la tecnología (e.g., Plantear actividades específicas para trabajar la distinción entre construcciones técnicas y construcciones conceptuales) y la creación de escenarios emocionales positivos (e.g., Gestionar discusiones para actualizar, ampliar y clarificar las normas sociales y socio-matemáticas propias de los tipos de orquestación y de los contenidos de enseñanza).

Con nuestra investigación y su continuidad, esperamos contribuir a consolidar el enfoque discursivo en los estudios sobre uso de la tecnología y aprendizaje de la Geometría en particular, y sobre aprendizaje de las Matemáticas en general. Al hacer hincapié en la comprensión de las relaciones entre participación, cognición y afecto, resaltamos la importancia de generar un determinado tipo de entorno para el aprendizaje. Los aspectos de regulación pública de la participación y de regulación individual del afecto no deben descuidarse en aquellos estudios que buscan caracterizar los escenarios de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. La cuestión sobre si los avances en este sentido supondrán mejoras especialmente significativas en las condiciones de aprendizaje matemático de los grupos en situación de riesgo social queda abierta.

Agradecimientos

El trabajo de Tesis Doctoral del primer autor se inició en el marco del Proyecto EDU2009-07113 y está en fase de finalización dentro del Proyecto EDU2012-31464, ambos financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad.

Referencias

Blanco, L. J., Guerrero, E. y Caballero, A. (2013). Cognition and affect in mathematics problem solving with prospective teachers. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1-2), 335-365.

Chico, J. y Planas, N. (2011). Interpretación de indicadores discursivos en situaciones de aprendizaje matemático en pareja. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 319-328). Ciudad Real: SEIEM.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H. y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics, 75*, 213-234.

Hannula, M. (2006). Affect in mathematical thinking and learning. En J. Maass y W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 209-232). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Healy, L. y Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computer for Mathematical Learning, 6*, 235-256.

Leder, G. C. (2006). Affect and mathematics learning. En J. Maass y W. Schlöglmann (Eds.), *New mathematics education research and practice* (pp. 203-208). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 25-53.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 87-125.

Morera, L. (2013). *Contribución al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología*. Manuscrito de Tesis Doctoral. Bellaterra: UAB.

Morera, L., Fortuny, J. M. y Planas, N. (2012). Momentos clave en el aprendizaje de isometrías en un entorno de clase colaborativo y tecnológico. *Enseñanza de las Ciencias, 30*(1), 143-154.

Morera, L., Planas, N. y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Ubuz y otros (Eds.), *Actas del VIII Congreso de la European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa). Antalya, Turquía: ERME.

Morgan, C. y Watson, A. (2002). The interpretative nature of teachers' assessment of students' mathematics: Issues for equity. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(2), 78-110.

Planas, N. (2004). Metodología para analizar la interacción entre lo cultural, lo social y lo afectivo en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias, 22*(1), 19-36.

Yackel, E., Gravemeijer, K. y Sfard, A. (Eds.) (2011). *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb*. Dordrecth, Holanda: Springer.

PROBABILIDAD VS PORCENTAJE EN LA FORMULACIÓN DE LOS PROBLEMAS DE PROBABILIDAD CONDICIONAL

Probability vs Percentage in the formulation of conditional probability problems.

Joaquín Arnau y M. Pedro Huerta

Universitat de València

Resumen

En este trabajo mostramos los resultados de una investigación realizada con futuros profesores de matemáticas de educación secundaria en resolución de problemas de probabilidad condicional. En particular se comparan las dificultades de los problemas pertenecientes a dos conjuntos de problemas que difieren en el formato de expresión de la cantidad preguntada: probabilidad o porcentaje. Se constata la extrema dificultad que presentan estos problemas para los futuros profesores, dificultad que se ve incrementada con la inclusión del término probabilidad en el enunciado. Se informa además de que las dificultades aparecen ya en la fase de cálculos, en la que se hace patente la confusión entre la probabilidad condicional y la probabilidad conjunta.

Palabras clave: *Probabilidad condicional, Problemas ternarios, Resolución de problemas, Dificultades de los problemas, Profesores de matemáticas en formación.*

Abstract

In this piece of work we show the results of a research with pre-service mathematics teachers solving conditional probability problems. In particular, difficulties of problems from two sets are compared. Problems differ in the way questions are expressed, in terms of probabilities or percentages. Difficulties of problems increase if the word probability is used in formulating the question in problems. We also report that these difficulties already appear in previous steps before giving an answer to the question, as in the calculations phase, where the confusion between the conditional probability and the joint probability might usually appear.

Keywords: *Conditional probability, Ternary Problems, Problem solving, Problems difficulties, Pre-service secondary school teachers.*

INTRODUCCIÓN

En la investigación sobre resolución de problemas, uno de los aspectos por los que se han interesado los investigadores ha sido la búsqueda de posibles relaciones entre lo que Kulm (1979) llama variables de la tarea y la dificultad del problema (Lesh y Zawojewski, 2007, p. 766). Este interés no ha pasado inadvertido en la investigación sobre resolución de problemas de probabilidad condicional. Así, Carles et al. (2009) y Huerta et al. (2011) consideran distintas dificultades – ahora en plural – a lo largo del proceso de resolución, para tener una idea más amplia de dificultad del problema que la simple medida del éxito en la respuesta. Estos autores estudian la influencia que sobre ellas tiene la estructura de datos y el contexto en el que se formula el problema. Por otra parte, Huerta y Cerdán (2010) estudian la influencia que sobre las dificultades puede tener el enfoque con el que el resolutor aborda la resolución del mismo, lo que los autores llaman lecturas – aritmética o algebraica – y mundo – aritmético o probabilístico –, para estudiantes del máster de formación del profesorado de matemáticas. Díaz y De la Fuente (2007) y Contreras et al. (2010) investigan otro tipo de dificultades, la de los resolutores, en particular la de los futuros profesores de educación primaria en el uso de las tablas de doble entrada relacionadas con la lectura e interpretación de los datos y con el cálculo de probabilidades.

Arnau, J. y Huerta, M. P. (2013). Probabilidad vs Porcentaje en la formulación de problemas de probabilidad condicional. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 165-173). Bilbao: SEIEM

Este trabajo es una continuación de otros anteriores que exploran qué influencia puede tener las distintas variables de la tarea (en el sentido de Kulm, 1979) sobre las dificultades de los problemas y sobre el comportamiento de los resolutores (Carles et al., 2009; Huerta, et al, 2011). En particular, aquí investigamos el efecto de formular la pregunta del problema en términos de porcentajes o de "probabilidades", permaneciendo el resto de variables de la tarea constantes. Los problemas siguientes son estructuralmente isomorfos, definidos en el mismo contexto, pero difieren en la forma en la que se formula la pregunta.

Problema 4a: *En un instituto, el 26% de los estudiantes no aprueba ni matemáticas ni filosofía y un 4% aprueba filosofía pero no aprueba matemáticas. Se sabe también que de los estudiantes que aprueban matemáticas el 80% aprueba filosofía. Entre los estudiantes que aprueban filosofía, ¿qué porcentaje aprueba matemáticas?* (Amorós, 2012)

Problema 4b: *En un instituto, el 26% de los estudiantes no aprueba ni matemáticas ni filosofía y un 4% aprueba filosofía pero no aprueba matemáticas. Se sabe también que de los estudiantes que aprueban matemáticas el 80% aprueba filosofía. Si un estudiante ha aprobado filosofía, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado matemáticas?* (Arnau, 2012*)*

Además, se informa de la influencia que pueda tener una u otra formulación sobre el enfoque de la resolución, aunque los enunciados inviten a considerar el enfoque aritmético, en el caso del problema 4a (Amorós, 2012), antes que probabilístico, en el caso del problema 4b (Arnau, 2012).

En Huerta et al (2011), completado en Amorós (2012), se muestra como los problemas isomorfos a los del anexo, aunque formulados en porcentajes, presentaron dificultades elevadas a futuros profesores a pesar de su formulación. Así, por ejemplo, dependiendo del problema, entre un 59,3% y un 80,4% de estudiantes no llegan a dar una respuesta numérica correcta al problema. Intentamos aquí informar, aunque parcialmente, en dónde pueden recaer dichas dificultades.

Así pues, trabajando con una muestra de estudiantes que puede equipararse a la usada en el estudio de Amorós (2012) y con un cuestionario equivalente al que se usó allí, pero cuyos problemas se formulan en la versión de probabilidad, en este trabajo trataremos de dar respuesta fundamentalmente a dos preguntas:

1. ¿Qué influencia tiene, tanto en el enfoque de resolución como en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional, formular la pregunta usando la palabra "probabilidad" frente a formularla usando otros formatos, como el porcentaje?

2. ¿Es posible identificar en los cálculos intermedios y finales el origen de las dificultades de los problemas de probabilidad condicional?

MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

Los problemas a los que nos referimos en este trabajo son los que Cerdán y Huerta (2007) llaman problemas ternarios de probabilidad condicional, en los que se implican a dos sucesos básicos y a sus respectivos complementarios (Huerta, 2009). Son problemas escolares (Lonjedo, Huerta y Carles, 2012), de enunciado verbal, formulados con tres cantidades conocidas y una desconocida por la que se pregunta. Una, al menos, de estas cantidades se corresponde con una probabilidad condicional.

Lo que es característico de estos problemas, y pertinente decir aquí, es que es posible hallar una solución a cualquiera de estos problemas mediante el empleo de relaciones ternarias, al menos teóricamente. Éstas pueden ser de dos tipos: aditivas, como por ejemplo: $P(A) + P(\bar{A})=1$, $P(A|B) + P(\bar{A}|B)=1$ y $P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(B)$ $p\ A + p\ A = 1$; y multiplicativas, directamente relacionada con la definición de probabilidad condicionada, como esta: $P(A|B) \times P(B) = P(A \cap B)$$p(A\ B \times p\ B = p(A \cap B)$.

Una resolución de un problema puede verse como un entretejido de relaciones ternarias entre cantidades conocidas y desconocidas como las descritas. Dependiendo de si, para dar respuesta al problema, basta o no con las cantidades conocidas disponibles en el enunciado, o si, por el contrario, hay que sobredimensionarlo introduciendo cantidades desconocidas como incógnitas, el entretejido lo calificamos de aritmético o algebraico, respectivamente. Decimos entonces que un problema tiene una lectura teórica aritmética si es posible resolverlo mediante un entretejido de relaciones aritmético. En caso contrario, decimos que tiene una lectura teórica algebraica. La complejidad teórica de un problema puede entonces asociarse con la complejidad de la red teórica de relaciones ternarias requeridas para su resolución constituida por el menor número de dichas relaciones. La dificultad de un problema, en cambio, se define en función de lo que los resolutores hacen al resolver el problema (por ejemplo, la razón entre el número de aquellos que no llegan a dar una respuesta de entre los que lo abordan, nos da una idea de la dificultad de contestar a la pregunta planteada). La complejidad de un problema es teórica mientras que su dificultad es experimental y calculada.

En la investigación en resolución de problemas se suelen distinguir un conjunto de variables independientes o de la tarea del conjunto de variables dependientes sobre el que las primeras pueden ejercer algún tipo de influencia (Kulm, 1979). En este trabajo las variables independientes que se consideran son la variable de la estructura, cuyos valores vienen dados por la familia a la que pertenece cada problema, la variable del contexto en el que se ha formulado cada problema y la variable del formato en el que se ha expresado las cantidades conocidas y desconocidas, porcentajes para unas y para otras en Amorós (2012) y porcentajes para las cantidades conocidas y probabilidades para las desconocidas en Arnau (2012). En este sentido, las cantidades se consideran ternas (x, S, f) en las que x es un número, S es la proposición que describe a x (abusando del leguaje decimos que x mide a S) y f el formato de expresión para las cantidades, que en los problemas de probabilidad pueden ser frecuencias, porcentajes o razones y probabilidades en el intervalo [0, 1].

Esta idea de cantidad es especialmente relevante para el análisis de las dificultades que tiene cada problema de ser respondido correctamente, dificultades que calculamos mediante la consideración y comparación de variables dependientes que relacionan el número de estudiantes que lo abordan (ABORDADOS), con el número de estudiantes que emiten una respuesta (RESULTADO), del tipo que sea, con el número de estudiantes que dan como respuesta un número correcto (NÚMERO), con el número de estudiantes que dan una descripción correcta de la respuesta (DRESC), que hemos distinguido en descripción correcta e incorrecta. Estas variables nos permiten medir, respectivamente, las dificultades siguientes: apreciada (DAP), del problema (DP), de la solución del problema (DPS) y de la descripción correcta (DDRESC). Todas las medidas se expresan en porcentajes, siendo la dificultad máxima 100 y la dificultad mínima 0 (para más detalles ver, por ejemplo, Carles et al (2009) o Huerta et al. (2011).

METODOLOGÍA

La muestra de resolutores la forman 39 estudiantes del Máster Universitario en Profesor/a de Educación Secundaria en la Universitat de València. Predominan aquéllos con Licenciatura en Matemáticas pero son minoritarios respecto de la suma del resto de titulaciones (Tabla 1).

Mientras que a los estudiantes graduados en Matemáticas se les supone una formación básica y completa en probabilidades y estadística, a los estudiantes de otras titulaciones se les solicita acreditar dicha formación con un mínimo número de créditos en sus respectivos planes de estudio. Por ello suponemos a toda la muestra participante en esta investigación lo suficientemente preparada en matemáticas para abordar problemas escolares de probabilidad condicional como los presentados y no requerir inicialmente enseñanza específica en este tema.

Tabla 1: **Muestra de estudiantes según su titulación.**

Titulación de acceso	F	%
Licenciados en matemáticas	16	41’0
Ingenieros	8	20’5
Arquitectos	12	30’8
Otros (no identificados)	3	7’7
Total	39	100

Los estudiantes resolvieron un cuestionario formado por 7 problemas (anexo), escogidos de tal manera que fueran lo suficientemente representativos de las diferentes complejidades que pueden presentarse en esta familia de problemas (Huerta, 2009) y que están determinadas, básicamente, por el número de probabilidades condicionadas presentes en su enunciado, por sus lecturas analíticas teóricas asociadas (aritméticas o algebraicas) y por la complejidad de la red teórica de relaciones entre las cantidades. El tiempo para completarlo no fue un obstáculo, disponiendo de tiempo suficiente con un máximo de 2 horas.

Las resoluciones escritas se analizan siguiendo el esquema de codificación que proponen Huerta, et al. (2013) y que es usado en las investigaciones anteriores ya referidas en este trabajo.

RESULTADOS Y ANÁLISIS

En la tabla siguiente (Tabla 2), mostramos los valores que toman las dificultades en cada una de las investigaciones. A la izquierda, la pregunta es un porcentaje (Amorós, 2012); a la derecha, una probabilidad (Arnau 2012).

Tabla 2: En gris, las dificultades por problema cuando se pregunta por un porcentaje. En blanco, esas mismas dificultades cuando se pregunta por una probabilidad.

Problema	DAP		DPR		DSP		DDRESC	
1	1,90	5,13	17	29,73	69,80	86,49	45,50	56,52
2	0	5,13	5,60	37,84	59,30	83,78	52,90	56,52
3	0	16,67	37	35,00	75,90	85,00	23,50	10,00
4	0	12,82	35,20	41,18	63	79,41	37,10	45,45
5	1,90	10,26	15,10	25,71	73,60	85,71	48,90	60,00
6	3,50	25,00	34,60	44,44	65,40	72,22	26,50	12,50
7	5,60	15,38	47,10	69,70	80,40	96,97	51,90	87,50
$\overline{X}$	1,84	12,91	27,37	40,51	69,63	84,23	40,90	46,93
σ	2,12	7,01	14,88	14,34	7,52	7,50	12,07	27,54

En general, e independientemente del problema del que se trate, aun con mínimas excepciones, los valores asociados a las dificultades de los problemas crecen si la palabra probabilidad está presente. También crecen los valores promedios de las dificultades, lo que nos permite comparar la dificultad de un cuestionario frente al otro.

En particular, problema a problema se observa un incremento en la dificultad apreciada y en la dificultad de la solución del problema. Es decir, por una parte, los estudiantes aprecian un mayor dificultad inicial en los problemas en los que la palabra probabilidad está presente y, por otra, al mismo tiempo, muestran una mayor dificultad a la hora de proporcionar una respuesta numéricamente correcta. Con el fin de apreciar si las diferencias son estadísticamente significativas, se realizó un contraste de estos valores mediante intervalos de confianza (Tabla 3), resultando que el incremento en los valores de DA es significativo para los problemas 3, 4 y 6, mientras que las diferencias en DSP son significativas en los problemas 1, 2 y 7. La dificultad de dar una respuesta (DPR) al problema crece significativamente en los problemas 2 y 7. Un examen más detallado de estas diferencias significativas debería ser llevado a cabo, relacionando qué variables de la tarea hacen que esto sea así.

Tabla 3: Intervalos de confianza para el contraste de los valores de las dificultades en ambos trabajos. Los intervalos resaltados indican que se rechaza la hipótesis nula y se puede afirmar que hay diferencias significativas.

Problema	DAP	DPR	DSP	DDRESC
1	[-0.11 , 0.5]	[-0.31 , 0.05]	[-0.33 , -0.001]	[-0.38 , 0.16]
2	[-0.12 , 0.02]	[-0.49 , -0.15]	[-0.42 , -0.07]	[-0.33 , 0.26]
3	[-0.28 , -0.05]	[-0.23 , 0.27]	[-0.28 , 0.10]	[-0.11 , 0.38]
4	[-0.23 , -0.02]	[-0.27 , 0.15]	[-0.35 , 0.02]	[-0.43 , 0.26]
5	[-0.19 , 0.02]	[-0.28 , 0.07]	[-0.29 , 0.04]	[-0.42 , 0.19]
6	[-0.36 , -0.07]	[-0.36 , 0.17]	[-0.31 , 0.18]	[-0.15 , 0.43]
7	[-0.23 , 0.03]	[-0.43 , -0.02]	[-0.29 , -0.04]	[-0.67 , -0.04]

Por otra parte, hemos realizado una comparación sobre el enfoque de la resolución de los problemas, cuyos resultados pueden verse en la Tabla 4:

Tabla 4 : Porcentaje de resoluciones ubicadas en el mundo teórico de la probabilidad en ambas investigaciones.

Problema	En porcentaje	En probabilidad
1	24,5	48,6
2	27,8	40,5
3	29,6	34,3
4	22,2	35,3
5	24,5	40,0
6	26,9	33,3
7	23,5	33,3

A pesar de apreciar un incremento, para todos los problemas, de un enfoque probabilístico de las resoluciones, observemos no obstante que en ningún caso éste supera el 50%, lo que indica que la mayoría de resolutores prefieren enfocar la resolución de los problemas en el propio contexto en que se formulan, sin que para ello necesiten realizar una traducción del problema original al mundo teórico de la probabilidad.

La razón podría estar en la diferente formación inicial de los resolutores. Para ello, consideramos de manera separada a los resolutores según provenían de una licenciatura en Matemáticas o de una titulación de Arquitectura o Ingenierías. Sin ningún tipo de hipótesis previa a favor de uno u otro grupo, nos preguntamos si la titulación universitaria tenía influencia en las dificultades de los problemas y en el enfoque – aritmético o probabilístico – que los resolutores daban a la resolución del problema. Los resultados sobre las dificultades no mostraron diferencias estadísticamente significativas, por lo que podemos decir que las dificultades de los problemas son, en general, comparables para ambas muestras de estudiantes, es decir, son igualmente "difíciles" para unos que para otros. Sin embargo, sí que observamos que los licenciados en matemáticas recurrían en mayor porcentaje al mundo teórico de la probabilidad (el 93,3% lo hizo así en al menos uno de los problemas), frente a los ingenieros y arquitectos que resolvían mayoritariamente los problemas en el propio contexto en que estaban formulados (el 64,7% no ubicó ninguna resolución en el mundo de la probabilidad).

En nuestro segundo objetivo de investigación nos proponemos identificar en los cálculos intermedios y finales el origen de las elevadas dificultades de estos problemas. Para ello, hemos analizado de qué naturaleza son las relaciones entre cantidades usadas por los resolutores en la fase de cálculo. Hemos identificado siete tipos o géneros de relaciones aditivas, y un tipo de relación multiplicativa. La Tabla 5 recoge un representante de cada tipo de relación.

Tabla 5: Géneros de relaciones usadas por los estudiantes al resolver los problemas

	Género	Representante
Relaciones aditivas	g1	$P(A) + P(\overline{A})=1$
	g2	$P(A\|B) + P(\overline{A}\|B)=1$
	g3	$P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) = P(B)$
	g4	$P(A\cup B) =P(A) + P(\overline{A}\cap B)$
	g5	$P(A\cup B) + P(\overline{A}\cap \overline{B}) = 1$
	g6	$P(A\cup B) =P(A) + P(B) - P(A\cap B)$
	g7	$P(A\cap B) + P(\overline{A}\cap B) + P(A\cap \overline{B}) + P(\overline{A}\cap \overline{B}) = 1$
Relaciones multiplicativas (RM)		$P(A\|B) \times P(B) = P(A\cap B)$

La tabla 6, por su parte, muestra la frecuencia de uso y de error de los diferentes tipos de relaciones empleadas para cada problema.

Tabla 6: Distribución de las frecuencias de uso (F) y de error (e) de los distintos géneros de relaciones usadas en los problemas del cuestionario.

	g_1		g_2		g_3		g_4		g_5		g_6		g_7		RM	
Problema	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e	F	e
1	18	0	5	2	19	4	2	0	10	1	3	0	0	0	30	18
2	37	3	38	1	23	11	0	0	0	0	0	0	0	0	64	17
3	17	0	44	2	31	12	0	0	0	0	0	0	0	0	42	12
4	12	0	4	0	29	2	7	1	13	2	1	0	1	0	40	18
5	18	2	19	0	21	5	1	0	0	0	1	0	0	0	60	12
6	9	1	22	5	16	3	1	1	2	1	0	0	1	1	25	3
7	14	1	18	2	14	5	0	0	2	2	1	1	0	0	52	13
Total:	125	7	150	12	153	42	11	2	27	6	6	1	2	1	313	93

Podemos observar que, de una parte, el 89,9% de las relaciones aditivas usadas corresponde a los tipos de relaciones g_1, g_2 y g_3, suficientes para resolver cualquiera de los problemas; pero, de otra, un no despreciable 10,1% se corresponden con relaciones aditivas que, o bien no son ternarias, o bien involucran a la unión de sucesos, como es el caso de las relaciones g_4, $g_5$$g_4$, g_5 y $g_6$$g_6$. En la Tabla 6 se aprecia que la presencia de éstas ocurre, principalmente, para los Problemas 1, a continuación, y 4 (ver introducción):

Problema 1: *El 20% de los ciudadanos se vacunan para prevenir el contagio de la gripe común. Por otra parte, el 15% de los ciudadanos contrae la gripe común y un 70% ni se vacuna ni contrae la gripe común. Si un ciudadano se vacuna, ¿qué probabilidad tiene de contraer la gripe común?*

Estos problemas son, precisamente, los únicos del cuestionario en los que una cantidad conocida es interpretable como la probabilidad conjunta $\overline{A}\cap \overline{B}$. $A \cap B$Esta forma de presentar la cantidad en los enunciados lleva a algunos resolutores a considerar el suceso contrario, $A\cup B$$A \cup B$, y calcular su probabilidad mediante la relación g_5, $P(A\cup B) + P(\overline{A}\cap \overline{B}) = 1$$P(A \cup B) + P(A \cap B) = 1$, como ilustran los siguientes fragmentos de resoluciones (Figura 1), para, a continuación, hallar otras cantidades intermedias mediante el uso de relaciones que implican a esta unión de sucesos. Vemos así como variables de tipo semántico pueden ejercer su influencia en los resolutores sobre la elección de la relación pertinente entre cantidades.

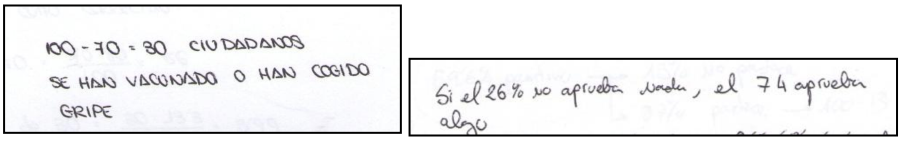


Figura 1: Fragmentos de resoluciones por parte de estudiantes diferentes de los problemas 1 y 4.

Por otra parte (Tabla 6), el mayor porcentaje de error en el uso de las relaciones ocurre con las relaciones multiplicativas (29,7%) y las aditivas de género g_3, (27,5%). La siguiente resolución del problema 4 (Figura 2) es representativa de un error frecuente entre los estudiantes de nuestra muestra). La cantidad que es ofrecida como respuesta al problema, 56%, corresponde a la intersección de sucesos “aprobar matemáticas” y “aprobar filosofía”, pero no a la probabilidad condicionada de “haber aprobado matemáticas si el estudiante ha aprobado filosofía” (Figura 2). Esta interpretación equivocada de una probabilidad condicionada por una probabilidad conjunta o de la intersección resulta ser una fuente habitual de error para los estudiantes de nuestra muestra, observación que coincide con otras investigaciones (ver por ejemplo, Borovcnik, 2012 y Estrada, Díaz y De la Fuente, 2006) a pesar de realizarse en contexto diferentes. Recíprocamente, también se dan casos de interpretación de una probabilidad conjunta por una condicionada (Arnau, 2012), dando lugar a usos inadecuados de la relación aditiva en la que esta está implicada (g_3).

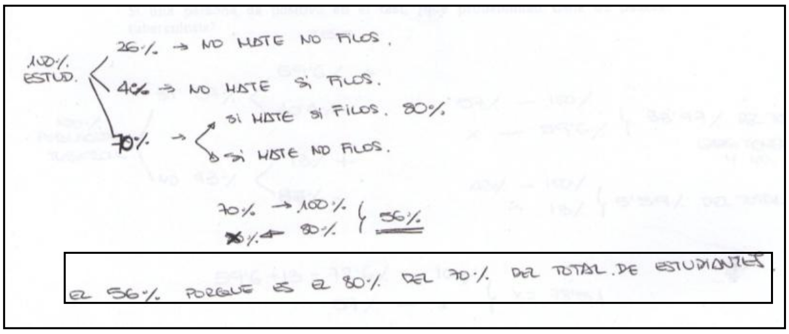


Figura 2: Resolución del problema 4 en la que existe error en el uso de una relación multiplicativa.

CONCLUSIONES

En este trabajo hemos mostrado cómo la inclusión de la palabra “probabilidad” ha supuesto, en líneas generales, un incremento en las dificultades de los problemas. También ha influido, aunque moderadamente, en el enfoque que los resolutores dan a sus resoluciones. Así, aumenta el número de resoluciones ubicadas en el mundo de la probabilidad, aunque siguen siendo mayoría los resolutores que no lo hacen así.

Al explorar con algún detalle la tipología de relaciones entre cantidades usadas en las resoluciones, encontramos que algunos estudiantes utilizan relaciones que no son las teóricamente previstas y que involucran a la unión de sucesos. El uso de éstas puede estar relacionado con otros aspectos de tipo semántico del texto del problema, lo que nos lleva a sugerir para el futuro el estudio con detalle de la influencia que este tipo de variables pueden tener en el proceso de resolución. Por otro lado, la elevada frecuencia de uso incorrecto de relaciones multiplicativas, y de un tipo concreto de relaciones aditivas en las que está presente la probabilidad conjunta, ha revelado que los resolutores tienen dificultades a la hora de identificar y distinguir correctamente las probabilidades condicionales de las conjuntas, lo que ha sido fuente de errores. Otra vez, aquí, el lenguaje puede ser una fuente no despreciable de dificultades para los resolutores.

Tratándose de futuros profesores de matemáticas, estos resultados son preocupantes. Una buena formación en matemáticas, por sí sola, no es garantía de éxito ni de ausencia de dificultades en la resolución de problemas como los que hemos usado en esta investigación. Los resultados que hemos mostrado aquí invitan, pues, cuanto menos a la reflexión, poniendo de manifiesto, una vez más, la necesidad de una adecuada formación en resolución de problemas de probabilidad condicional en todos los niveles.

REFERENCIAS

Amorós, R. (2012). *Un ejemplo de análisis de datos mediante la inferencia bayesiana en resolución de problemas de probabilidad condicionada*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València.

Arnau, J. (2012). *Un estudio exploratorio de la resolución de problemas de probabilidad condicional centrado en la fase de cálculo*. Memoria de investigación. Máster de Investigación en Didácticas Específicas. Universitat de València

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 5-27.

Carles, M., Cerdán, F., Huerta, M. P., Lonjedo, Mª A. y Edo, P. (2009). Influencia de la estructura y el contexto en las dificultades de los problemas de probabilidad condicional de nivel N_0. Un estudio exploratorio con estudiantes sin enseñanza previa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII*, (pp. 173-185). Santander: SEIEM.

Cerdán, F. y Huerta, M. P. (2007). Problemas ternarios de probabilidad condicional y grafos trinomiales. *Educación Matemática*, 19 (1), 27-62.

Contreras, J.M., Estrada, A., Díaz, C. y Batanero, C. (2010). Dificultades de futuros profesores en la lectura y cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 271-280). Lleida: SEIEM.

Diaz, C. y De la Fuente, I. (2007). Assessing students' difficulties with conditional probability and Bayesian Reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2, 3, pp. 128-143.

Estrada, A., Díaz, C. y De la Fuente, I. (2006). Un estudio inicial de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en alumnos universitarios. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*, (pp. 277-284). Huesca: SEIEM.

Huerta, M. P. (2009). On Conditional Probability Problem Solving Research —Structures and Context. En M. Borovcnik y R. Kapadia (2009), Special issue on "Research and Developments in Probability Education". *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 4 (3), 163-194.

Huerta, M. P. y Cerdán, F. (2010). El cálculo de probabilidades en la formación del profesorado de matemáticas de secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 353-364). Lleida: SEIEM.

Huerta, M. P., Cerdán, F., Lonjedo, Mª. A. y Edo, P. (2011). Assessing difficulties of conditional probability problems. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, 807-817. University of Rzeszów, Poland.

Huerta, M. P., Edo, P., Amorós, R. y Arnau, J. (2013). Un esquema de codificación para el análisis de resoluciones de los problemas de probabilidad condicional. (En ejecución)

Kulm, G. (1979). The classification of Problem-Solving Research Variables. In G. A. Golding & C. E. McClintock (Eds.), *Task Variables in Mathematical Problem Solving*, 1-22. ERIC.

Lesh, R. y Zawojewski, J. S. (2007). Problem solving and modeling. In F. K. Lester, Jr. (Ed.). *The Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 763-804). National Council of Teachers of Mathematics. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lonjedo, Mª A., Huerta, M. P. y Carles, M. (2012). Conditional probability problems in textbooks: An example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15, 3, 319-338.

ANEXO.

Problema 2: El 70% de las piezas manufacturadas en una fábrica son correctas. De las piezas que son correctas, un dispositivo detecta como correctas el 80% y de las defectuosas, el dispositivo detecta como correctas el 13.3%. Si el dispositivo detecta una pieza como defectuosa, ¿qué probabilidad hay de que dicha pieza sea correcta?

Problema 3: De las chicas del instituto, el 37.5% usa gafas. De los chicos, el 28.6% usa gafas. De los que no usan gafas, el 50% son chicos. Si se escoge a un estudiante al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea chica?

Problema 5: Una población de riesgo de sufrir tuberculosis se somete al test de la tuberculina. Diferentes estudios muestran que el 57% de dicha población padece de tuberculosis y que de los que padecen la tuberculosis el 59.6% dan positivo en el test. Además se sabe que un 13% no padece tuberculosis pero da positivo en el test. Si una persona da positivo en el test, ¿qué probabilidad tiene de padecer tuberculosis?

Problema 6: Una encuesta entre los ciudadanos que son lectores diarios u ocasionales de periódicos da como resultado que un 14% leen diariamente los periódicos pero no leen el periódico El País. De los que leen diariamente el 80% leen El País y de los que leen ocasionalmente el 86% no leen el País. ¿Qué probabilidad hay de que un ciudadano, lector diario u ocasional de periódicos, lea el periódico El País?

Problema 7: Una población sufre una infección en los ojos. De ellos, el 42% son tratados con un antibiótico nuevo experimental. Los resultados muestran que de los tratados con el antibiótico el 83.3% se han curado y que de las personas que no se han curado el 14.9% se han tratado con el antibiótico. Si una persona se ha curado, ¿qué probabilidad hay de que no se haya tratado con el antibiótico nuevo?

PARTICIÓN NUMÉRICA EN PERSONAS CON SÍNDROME DE DOWN

Numerical partition in people with Down syndrome

Alicia Bruno y Aurelia Noda

Universidad de La Laguna

Resumen

Este trabajo presenta cómo alumnado con síndrome de Down realiza tareas de partición numérica. Se ha seguido una metodología cualitativa, a través de entrevistas individuales a seis personas con síndrome de Down (tres adolescentes y tres adultos) sobre tareas de partición numérica que respondían a cinco niveles de dificultad. Los resultados indican que para cinco de las seis personas entrevistadas, los conocimientos numéricos procedimentales que poseen no se corresponden con una correcta ejecución de las tareas de partición. Lo que implica una débil comprensión de las reglas del sistema de numeración decimal.

Palabras clave: *partición, sistema de numeración decimal, síndrome de Down.*

Abstract

This paper presents how pupils with Down syndrome performed tasks of numerical partition. It has followed a qualitative methodology, through individual interviews with six people with Down syndrome (three teenagers and three adults) about numerical partition tasks that respond to five levels of difficulty. The results show that for five of the six people interviewed, numerical procedural knowledge does not correspond to the proper execution of the tasks of partition. This implies a weak understanding of the rules of the decimal numeral system

Keywords: *partitioning, decimal numeral system, down syndrome.*

Bruno, A., y Noda, A. (2013). Partición numérica en personas con síndrome de Down. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 175-183). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje de las matemáticas es una tarea compleja para las personas con síndrome de Down (SD a partir de ahora). Su discapacidad intelectual se manifiesta con dificultades para abstraer y generalizar lo que hace que la propia materia se convierta en un reto para el aprendizaje. Las deficiencias que manifiestan con la memoria (a corto y largo plazo) y en el procesamiento del lenguaje, implica que tengan que realizar esfuerzos superiores a la población sin discapacidad para adquirir el vocabulario matemático y para comprender conceptos. Además, pueden manifestar frustración debido a sus bajos éxitos en la materia (Pueschel, 2002).

Sin embargo, en los últimos años se ha conseguido que logren aprender conceptos matemáticos de diferentes niveles de educación infantil y primaria, con una atención escolar temprana, adaptaciones curriculares, metodologías personalizadas e integración en las escuelas, aunque con una gran variabilidad entre ellos. Estas metodologías implican secuencias individualizadas, con numerosa práctica, apoyos con materiales concretos y/o visuales, uso del ordenador o actividades relacionadas con contextos cotidianos (De Graaf y De Graaf, 2006; Faragher y Brown, 2005; Gaunt, Moni y Jobling, 2012; Ortega, 2004).

Las principales investigaciones sobre el aprendizaje matemático de personas con SD se sitúan en el campo numérico, en especial en la adquisición del concepto de número. Los estudios iniciales mostraron que los niños con esta discapacidad carecían de comprensión de los principios del conteo y que solo repetían lo que habían aprendido de memoria (Gelman y Cohen, 1988). Investigaciones posteriores han señalado que estos niños pueden aprender a contar, aunque estas habilidades están muy relacionadas con sus capacidades lingüísticas (Caycho, Gunn y Siegal, 1991; Porter, 1999). Diferentes investigadores comparten la idea de que las deficiencias en numeración de las personas con SD refleja una inadecuada enseñanza, más que una falta de capacidades para aprender (Porter, 1999; Buckley, 2007).

En trabajos previos sobre el conocimiento de las operaciones de suma y resta de números con dos dígitos en alumnado con SD encontramos que detrás de los errores que cometían los alumnos se reflejaba una escasa comprensión del valor posicional (Noda y Bruno, 2009). Por ello, continuamos realizando una investigación amplia para profundizar en la comprensión del sistema de numeración decimal por parte de esta población. En esta comunicación, nos centramos en la habilidad para realizar particiones de números, aspecto básico para entender el valor posicional de los números.

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

El sistema de numeración decimal se desarrolla lentamente a lo largo de la escolaridad y exige una instrucción cuidadosamente diseñada que tenga en cuenta los diferentes principios que rigen su funcionamiento. Steffe, Cobb y Von Glasersfeld (1988) resaltaron que para comprender el valor posicional es necesario adquirir estructuras conceptuales que lleven a considerar 10 (decena) como una unidad, al tiempo que mantiene su numerosidad, es decir, entenderla como una *unidad compuesta numérica*. Posteriormente, se adquiere la idea de *unidad compuesta abstracta* que permite coordinar decenas y unidades, abstrayendo la numerosidad de la unidad.

Jones y otros (1996) proponen un marco para desarrollar y evaluar la adquisición del conocimiento numérico de números de varios dígitos, que consta de cinco niveles de pensamiento en los que es necesario desarrollar actividades de cuatro constructos: *contar*, *agrupar*, *particionar* y *ordenar*.

Nivel 1. Pre-valor posicional. Piensan en términos de unidades individuales. Carecen de estructuras de agrupamiento. Poseen una concepción limitada de la partición.

Nivel 2. Valor posicional inicial (< 100). Se inicia la comprensión del valor posicional de las cifras, lo que lleva a moverse hacia el uso de las decenas como una unidad (unidad compuesta numérica).

Nivel 3. Desarrollo del valor posicional (<100). Muestran estructuras de *unidad compuesta abstracta*. Capacidad para formar dos representaciones numéricas basadas en decenas y unidades y para operar o comparar las dos representaciones al mismo tiempo.

Nivel 4. Extensión del valor posicional (<1000). Desarrollan la unidad numérica compuesta como la *unidad compuesta abstracta* para estructuras de 100. Se generan soluciones mentales, que a menudo incorporan estrategias que integren contar, repartir, agrupar y ordenar.

Nivel 5. Valor posicional esencial (hasta 1000 o superior). Comprensión coordinada de los cuatro constructos y preferencia por la representación mental antes que por las representaciones de papel y lápiz o las físicas.

La investigación que estamos realizando toma como sustento teórico este marco para evaluar el conocimiento del sistema de numeración decimal y para diseñar secuencias de aprendizaje a largo plazo. En esta comunicación exponemos la evaluación de tareas de *partición* en alumnado con SD, en cada nivel de los anteriores.

La partición numérica es la descomposición de un número como suma de otros menores que él. Saber particionar números de diferentes formas es un indicador de flexibilidad en las representaciones mentales de los números y de comprensión del valor posicional. Resnick (1983) distingue entre partición única y múltiple de los números de varios dígitos. La partición única se produce en la etapa inicial del aprendizaje y se refiere a la descomposición en decenas y unidades de los números, es decir, entender 56 como 5 decenas y 6 unidades o bien, 50 más 6. La partición múltiple ocurre cuando se usan particiones no *estándares*, como entender 56 como compuesto de 3 decenas y 26 unidades, o 2 decenas y 36 unidades. Adquirir la partición requiere una reflexión sobre la estructura de los números de varios dígitos, además requiere aplicar nociones de adición y entender las relaciones parte-parte-todo.

OBJETIVOS Y METODOLOGÍA

El objetivo del trabajo que se presenta es evaluar los logros y las dificultades de personas con SD para realizar actividades de partición de números, en los diferentes niveles del marco de Jones y otros.

Se presentan los resultados de entrevistas individuales realizadas a seis personas con SD (tres adolescentes y tres adultos), elegidos por tener conocimiento de los números de dos dígitos. Los adolescentes están integrados en Institutos de Enseñanza Secundaria (IES) y los adultos trabajan en un Taller de Encuadernación promovido por la Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21 (Tenerife).

Los seis entrevistados reciben diariamente, en esta Asociación, apoyo escolar de distintas materias, entre ellas matemáticas. En este contexto educativo se realizaron las entrevistas. La tabla 1 muestra la edad y situación de las seis personas entrevistadas.

Tabla 1. Características de los seis alumnos con SD entrevistados

	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Edad	16	16	17	25	26	36

Sexo	M	V	M	M	M	M
Actividad	Integrado IES	Integrado IES	Integrado IES	Taller Apoyo escolar	Taller Apoyo escolar	Taller Apoyo escolar

Las entrevistas fueron semiestructuradas y videograbadas en sesiones de 45 a 60 minutos. El tiempo se adaptó a la actitud del estudiante (se observó si mostraban desmotivación o cansancio en el desarrollo de cada sesión). El protocolo de las entrevistas tuvo dos partes:

Parte 1

Ejercicios numéricos que tenían como objeto evaluar procedimientos numéricos (escribir y leer números, algoritmos de suma y resta).

Parte 2

Actividades numéricas presentadas, principalmente, con materiales o en contextos, correspondientes a los cinco niveles y los cuatro constructos mostrados en el apartado anterior. En la tabla 2 se muestran las tareas propuestas para la partición en los cinco niveles, con los indicadores usados.

Tabla 2. Indicadores de partición y tareas en los 5 niveles

Nivel 1. *Prevalor posicional*

P1. Descomponer de diferentes formas números menores que 10.

Tareas
T1.1 Darle un número con el material Heviniere-Lebert (HL) y pedirle diferentes formas de construirlo.

T1.2 Con monedas de céntimos de euros (de 1, 2 y 5 céntimos), separar una cantidad concreta de céntimos (menor que 10).
T1.3. Mostrarle diferentes bolsas de caramelos que contienen 1, 2, 3, 4 caramelos) y pedirle que separe 5, 6, 8 caramelos.

Nivel 2. *Valor posicional inicial*

P2. Formar números de varios dígitos de diferente forma, descomponiendo en decenas y unidades.

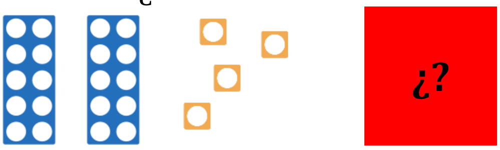
Tareas
T2.1 Mostrarle diferentes bolsas de caramelos que contienen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, y 10 caramelos) y pedirle que coja 35 caramelos o 65 caramelos.
T2.2 Se presentan tarjetas de números del 1 al 10. Se pone otro montón boca abajo de tarjetas con números de dos dígitos. Se destapa una tarjeta del montón boca abajo. Elegir cartas del 1 al 10, cuya suma sea el número de dos dígitos.
T2.3 Ana compra golosinas y tiene que pagar 68 céntimos de euro. Darle monedas de 10, 5, 2

y 1 céntimo.

Nivel 3. ***Desarrollo del valor posicional***

P3.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma (<100).
P3.2 Encontrar la parte desconocida de un número (<100).

Tareas
T3.1 Descomponer el número 37.
T3.2 Debe haber 34 ¿Cuántos están escondidos?

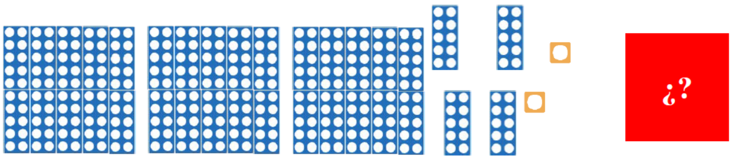


T3.3 Estamos preparando una fiesta de cumpleaños. Tenemos 40 globos, pero necesitamos 65 ¿Cuántos globos más necesitamos?

Nivel 4. ***Extensión del valor posicional***

P4.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma (<1000).
P4.2. Encontrar la parte desconocida de un número (<1000).

Tareas
T4.1 Descompones el número 468.
T4.2 Debe haber 462 ¿Cuántos están escondidos?

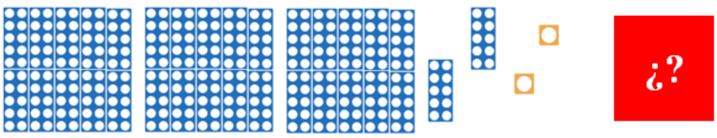


T4.3 Sonia había contado 134 sobres. Tiene que contar 277 ¿Cuántos sobres le faltan por contar?

Nivel 5. ***Valor posicional esencial***.

P5.1. Formar números de varios dígitos de diferente forma (incluso > 1000).
P5.2. Preferencia por la representación mental antes que por representaciones de papel y lápiz o físicas.

Tareas
T5.1 Descompón 1565 de diferente manera.
T5.2 Debería haber 424 ¿Cuántos están escondidos? (mentalmente)



T5.3 En la fiesta de Navidad se encargan 824 dulces. En la dulcería venden cajas de 10 dulces, de 100 dulces o sueltos. Di diferentes formas en las que nos pueden dar los dulces.

RESULTADOS

Conocimiento numérico procedimental

La tabla 3 recoge los resultados de la parte 1 de las entrevistas sobre la realización de procedimientos numéricos. Se planteó leer, escribir y encontrar el anterior y posterior de un número dado. Se comenzó con números de un dígito y si la respuesta era correcta se aumentaba el tamaño de los números. En las sumas y restas se siguió el mismo procedimiento hasta llegar a sumas de 4 dígitos. Se indica en la tabla el tamaño de los números hasta los que respondieron con corrección. El objetivo de estas cuestiones era tener un referente para saber hasta qué nivel de tareas se esperaba a priori que podían responder y contrastar los resultados en las tareas de partición.

Sus habilidades numéricas no tienen relación con la edad. Todos los alumnos tienen conocimiento, al menos, hasta 100 en lectura y escritura de números, y algunos conocen hasta el millón. Los conocimientos de suma y resta son variables entre los alumnos. Por ejemplo, A2 es capaz de hacer sumas con llevadas hasta números de cuatro dígitos y sin embargo, realiza las restas (sin llevadas) utilizando una recta numérica.

Tabla 3. Conocimiento de procedimientos numéricos de los seis alumnos

Procedimientos	**A1**	**A2**	**A3**	**A4**	**A5**	**A6**
Escribir números	<1000	<100	<100	<1000000	<1000000	<1000
Leer números	<10000	<1000	<100	<1000000	<1000000	<1000
Conocer nº anterior y posterior	<10000	<10 <100 solo el posterior	<20	<100	<1000	<100
Sumar y restar sin llevadas	Números con 4 dígitos	Suma números de 4 dígitos. Resta con recta numérica	Números con 2 dígitos	Números con 4 dígitos	Números con 4 dígitos	Números con 4 dígitos
Sumar y restar con llevadas	Números de 4 dígitos	Suma con dificultades. No resta	No	Suma números con 4 dígitos. No resta	Suma números con 4 dígitos	Suma números con 4 dígitos

Nivel de pensamiento ante tareas de partición

Nivel 1. Las alumnas A3, A4 y A6 no realizaron las tareas de descomponer números menores de 10 (indicador P1, tabla 2) y no demuestran estrategias para particionar. Así, para descomponer el 8 con el material HL, eligen las piezas del 10 y 3, o del 8 y 6… y las colocan encima del 8, sin advertir que son mayores; o al preguntarles por el número formado por las piezas del 7 y 1, la alumna A6 no reconoció la partición, sin embargo, A3 y A4 reconocen la partición mostrada, pero recurren a contar de uno en uno para saber la cantidad de fichas. Estas tres alumnas realizan algoritmos de la suma y la resta con números de varios dígitos (parte 1 de la entrevista), sin embargo, no han transfieren hacia contextos no algorítmicos, la idea de que se pueden formar números como la suma de otros dos (con el material, con caramelos o con dinero). Dada su forma de responder en el Nivel 1, no se les propuso actividades de nivel superior.

Los alumnos A1, A2 y A5, realizan las particiones de todas las tareas de nivel 1 sin dificultad y con rapidez. Usan la estrategia de buscar siempre números menores que el que deben descomponer y dan diferentes formas de descomposición para el mismo número. A2 usa la estrategia de "contar todo" para comprobar la partición que ha realizado, mientras que A1 y A5 emplean hechos numéricos.

Nivel 2. El alumno A2 tuvo dificultades en las tareas de este nivel, las cuales implicaban la descomposición de números menores de 100, y no reconoció la partición en decenas y unidades (indicador P2, tabla 2). Aunque es capaz de contar de 10 en 10 hasta 60, al realizar los problemas con las bolsas de caramelos y las monedas, contó erróneamente. En algunas ocasiones, al contar, o formar números, nombraba las decenas como si fueran unidades. Por ejemplo, contaba las bolsas de 10 caramelos, indistintamente como un caramelo o como 10 caramelos. Esto muestra inconsistencias en su aprendizaje, ya que la misma representación la consideraba como unidades o como decenas. En este alumno se esperaba resultados más débiles en partición debido a que su conocimiento de la resta está iniciándose con números de dos dígitos. Por esta razón no se le pidió responder a las actividades del siguiente nivel.

Las alumnas A1 y A5 descomponen sin dificultad números menores de 100. La alumna A1, no reconoce la partición inicial en decenas y unidades, sino que usa una estrategia más básica, sumando unidades. El número 34 (T2.2), lo formó sumando 10+3+7+1+1+2+2+1+1+6 y en el problema T2.3 para pagar 68 céntimos recurrió al algoritmo por pasos (10+10=20; 20+10=30; 30+10=40; 40+10=50; 50+10=60; 60+5=65; y añadió 3 monedas de 1.

La alumna A5 particiona con mucha seguridad números menores de 100, emplea hechos numéricos básicos y utiliza siempre las decenas como unidades de conteo (54 =10+10+10+10+10+5; 35= 10+10+10+5; 35=10+10+5+5+5). Con las tarjetas de números, al ver el 58 comentó: "5 de 10 y una de 8".

Nivel 3. La alumna A1 manifestó dificultades en la partición de números menores de 100 (P3.1, tabla 2) y para encontrar la parte desconocida de un número menor que 100 (P3.2, tabla 2). En la tarea T3.2, al presentarle con el material HL el número 24 y pedirle la cantidad escondida para tener 34, no sabía cómo averiguarlo, y en el problema T3.3, conseguir 60 globos si ya tenemos 40, no entendía que 40 es parte de 65. Por su forma de razonar en este nivel 3, no realizó actividades de nivel superior.

La alumna A5 piensa con flexibilidad y de forma sistemática cuando descomponen números de dos dígitos, sobre todo con materiales. Ante la actividad de encontrar la parte escondida para obtener 34 si ya tenemos 24 (T3.2) respondió 10 mentalmente y no necesitó escribir ni tocar el material. Sin embargo, en el problema T3.3 no mostró esta flexibilidad mental (entendiendo 40 como parte de 65), sino que utilizó el algoritmo de la resta de manera correcta.

Nivel 4. La alumna A5, manifiesta habilidades para representar y particionar números de tres dígitos de diversas maneras (P4.1, tabla 2) y para buscar la parte escondida de un número (P4.2, tabla 2) con el material, sin embargo no lo hace mentalmente, sino que recurre al algoritmo de la resta para encontrar la solución (277-144) y no utiliza ninguna estrategia para buscar una respuesta aproximada sin escribir. Es decir, no muestra usar las decenas y centenas como unidades de conteo.

Nivel 5. La alumna A5, descompone números mayores de 1000 de diferentes formas y de forma correcta (P5.1, tabla 2), sin embargo, no es capaz de reconocer mentalmente una centena como 10 decenas, y tampoco manifiesta una preferencia por resolver las tareas mentalmente (P5.2, tabla 2). Ante la tarea T5.2, se le muestra con material 322 y cuenta "100, 200, 300, 310, 320, 322, pero para encontrar la parte desconocida necesita escribir el algoritmo (424-322). En el problema de los dulces (T5.3), su única estrategia fue escribir al algoritmo para encontrar la solución, sin pensar mentalmente en términos de decenas y centenas.

CONCLUSIONES

Hemos encontrado una variabilidad en las respuestas de partición en el grupo de alumnos con SD analizados, como consecuencia de sus diferentes niveles iniciales. Las tareas de particionar les resultaron, en general más complejas que las tareas de procedimientos de escribir, leer números o realizar algoritmos de suma y resta, en las que se sintieron más seguros (están más habituados a realizar estas últimas). De hecho, tres de los seis alumnos fueron incapaces de responder las actividades de particionar del nivel 1 con números menores que 10, a pesar de conocer los números hasta el 100. Lo que demuestra la necesidad de realizar un aprendizaje específico de este constructo, si se quiere mejorar su comprensión del sistema de numeración decimal.

Es característico de esta población el preferir realizar procedimientos repetitivos, por lo que las actividades abiertas de partición, algunas de las cuales tienen diferentes soluciones, suponen un reto importante para ellos que se refleja en mayor inseguridad en las respuestas.

Las personas con SD tienen dificultades con la memoria a corto y largo plazo, por lo que son más vulnerables para aprender los hechos numéricos de las sumas y restas de un dígito. Esto hace que las particiones sean más complejas, porque la búsqueda de cada partición les supone un proceso más costoso, como el “contar todo”. La alumna A5, que llegó al nivel 5, demostró tener un domino de los hechos numéricos que le permitía realizar muchas particiones de un mismo número de manera abstracta y con materiales.

Los resultados de estos alumnos muestran un distanciamiento entre la habilidad para realizar procedimientos numéricos y la adquisición de estructuras conceptuales que les lleva a considerar 10 como una unidad, aspecto fundamental para la comprensión del valor posicional. En los alumnos de nivel más bajo, su conocimiento de los números de dos dígitos no va unido a una concepción que les permite ver la unidad y las decenas en la representación que leen y así, encontrar una parte de la totalidad. No han adquirido la noción de 10 como unidad compuesta numérica y mucho menos como unidad compuesta abstracta.

La alumna A5 contesto correctamente las tareas de partición, salvo aquellos que implican manejar mentalmente y con soltura las centenas, decenas y unidades (lo que ayuda a usar con flexibilidad la centena como 10 decenas). Los resultados de esta alumna son alentadores porque muestran que no se debe poner techo al conocimiento sobre el sistema de numeración decimal que puedan adquirir los alumnos con SD. Es necesario realizar con ellos cambios en las metodologías y en los diseños instruccionales, poniendo más peso en aspectos conceptuales que les permitan avanzar en este constructo, objetivo que estamos poniendo en práctica en estos momentos.

Agradecimientos

Este trabajo forma parte del proyecto EDU2011-29324: Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de primaria, de secundaria y de profesorado de primaria en formación. Ministerio de Ciencias e Innovación, Madrid.

Referencias

Buckley, S. (2007). Teaching numeracy. *Down Syndrome Research and Practice*, *12*(1), 11-14.

Caycho, L., Gun, P., y Siegal, M. (1991). Counting by children with Down’ Syndrome. *American Journal on mental Retardation*, *95*(5), 575-583.

De Graaf, E., y De Graaf, M. (2006). Aprendiendo matemáticas elementales: estudio de caso de un niño holandés. *Uno, 43*, 57-67.

Faragher, R., y Brown, R.I. (2005). Numeracy for adults with Down syndrome: It’s a matter of quality of life. *Journal of Intellectual Disabilities Research, 49*(10), 761-765.

Gaunt, L., Moni, K., y Jobling, A. (2012). Developing numeracy in young adults with Down syndrome: a preliminary investigation of specific teaching strategies. *Journal on Developmental Disabilities, 18*(2), 10-25.

Gelman, R., y Cohen, M. (1988). Qualitative differences in the way Down syndrome and normal children solve a novel counting problem, In Nadel, L. (Ed.), *The Psychology of Downs' Syndrome* (pp. 51-99). Cambridge, MA: MIT Press.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, A., Rich, B., y Van Zoest, L.R. (1996). Multidigit Number sense: a Framework for instruction and assessment. *Journal fort Research in Mathematics Education, 27*(3), 310-336.

Noda, A., y Bruno, A. (2009). Conceptos, procedimientos y errores en las operaciones de suma y resta en alumnos con síndrome de Down. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 333 - 344). Santander: SEIEM.

Ortega, J. M. (2004). *Nuevas tecnologías y aprendizaje matemático en niños con síndrome de Down*. Tesis Doctoral publicada en el Boletín Oficial de la Universidad de Jaén.

Porter, J. (1999). Learning to count: A difficult task? *Down Syndrome Research and Practice, 6*(2), 85-94.

Pueschel, S. M. (2002). *Síndrome de Down: Hacia un futuro mejor: Guía para padres*. Masson S.A. Santander: Fundación Síndrome de Down de Cantabria (2ª edición). Barcelona.

Resnick, L. (1983). A developmental theory of number understanding. En Ginsburg, H.P. (Ed.), *The developmental of mathematical thinking* (pp. 110-151). New York: Academic Press.

Steffe, L.P., Cobb, P., y Von Glasersfeld, E. (1988). *Construction of Arithmetical Meanings and Strategies*. New York: Springer-Verlag.

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE CONTENIDO MATEMÁTICO EN ESTUDIANTES PARA MAESTRO DE PRIMARIA

Proportional reasoning: Pre-service primary school teachers' specialized content knowledge for teaching

Àngela Buforn y Ceneida Fernández

Universidad de Alicante

Resumen

Este estudio examina el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestro de Educación Primaria en el ámbito del razonamiento proporcional. Los resultados muestran que los estudiantes para maestro tienen dificultades en identificar situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en usar el significado multiplicativo de la idea de operador. Estos resultados aportan información de las características del conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional de los estudiantes para maestro que pueden influir en el desarrollo de diferentes ámbitos de la competencia docente.

Palabras clave: *Razonamiento proporcional, estudiantes para maestro de primaria, conocimiento especializado de contenido matemático.*

Abstract

This study focuses on examining pre-service primary school teachers' mathematical content knowledge related to proportional reasoning. Results show pre-service teachers' difficulties in identifying non-proportional situations, in the development of the up and down reasoning and in the use of the meaning of operator. These results provide information about characteristics of pre-service teachers' specialized content knowledge related to the proportional reasoning that could influence on the development of different areas of the teaching competence.

Keywords: *Proportional reasoning, pre-service primary school teachers, specialized mathematical content knowledge.*

INTRODUCCIÓN

El desarrollo del razonamiento proporcional entendido como la "habilidad de establecer relaciones multiplicativas entre dos cantidades y de extender dicha relación a otro par de cantidades" (Lamon, 2005) es un objetivo en el currículo de Educación Primaria y Secundaria que conlleva varios procesos cognitivos interrelacionados que van desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992).

Recientemente se ha empezado a reconocer que la enseñanza de la idea de razón y proporción que subyacen en el desarrollo del razonamiento proporcional no es una tarea fácil para los maestros. Las investigaciones han empezado a mostrar algunas características del conocimiento de matemáticas necesarias para la enseñanza de la idea de razón y proporción (Livy y Vale, 2011; Pitta-Pantazi y Christou, 2011) que se consideran clave para la realización de tareas profesionales como la planificación de la enseñanza o la interpretación de cómo los estudiantes de primaria aprenden las matemáticas. En la realización de estas tareas interviene el conocimiento de matemáticas

Buforn, A. y Fernández, C. (2013). Razonamiento proporcional: Conocimiento especializado de contenido matemático en estudiantes para maestro de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 185-192). Bilbao: SEIEM

especializado que está configurando una agenda internacional de investigación apoyada en la noción de “conocimiento matemático para enseñar” (mathematical knowledge for teaching, MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008).

Las investigaciones centradas en el conocimiento de matemáticas para enseñar (MKT) ponen de manifiesto algunas características de cómo los estudiantes para maestro comprenden el conocimiento matemático. Livy y Vale (2011) indican que solo un 5% de los estudiantes para maestro de su estudio fueron capaces de resolver correctamente dos tareas relacionadas con el concepto de razón donde se realizaba una comparación todo-todo en un contexto de escalas. Por otra parte, Valverde y Castro (2009) señalan el predominio de un razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de un grupo de estudiantes para maestro en tareas de proporcionalidad de valor perdido. Los estudiantes para maestro de este estudio aplicaban estrategias y procedimientos correctos pero se percibía cierta falta de reconocimiento de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón. En esta misma dirección, Rivas, Godino y Castro (2012) indican que estudiantes para maestro tienen limitaciones para reconocer los significados de los objetos matemáticos que intervienen en la resolución de un problema de proporcionalidad y como consecuencia, no interpretaban de manera apropiada las respuestas de alumnos de Educación Primaria a problemas de proporcionalidad. Este último estudio muestra cómo el conocimiento especializado de contenido matemático (specialized content knowledge, SCK) como parte del conocimiento de matemáticas para enseñar (mathematics content knowledge, MKT) interviene en la realización de la tarea profesional del maestro de analizar las producciones de sus alumnos. En este contexto, esta investigación se centra en el conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional en estudiantes para maestros como fundamento del desarrollo de otras tareas de enseñanza y competencias.

MARCO TEÓRICO

El razonamiento proporcional y sus componentes

Lamon (2005, 2007) señala que el razonamiento proporcional es multifacético e integra diferentes componentes: los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento “up and down” y “unitizing”). En la interpretación del número racional se consideran cinco subconstructos: razón, operador, parte-todo, medida y cociente.

De acuerdo con Lamon (2005, 2007) las formas de razonar con estos subconstructos generan diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional. El razonamiento “up and down” implica una manera de razonar para resolver problemas cuando la unidad está implícita. El proceso de generar unidades contables (“unitizing”) implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar. El pensamiento relacional describe la capacidad de analizar cambios en términos relativos al relacionar el número de partes en las que se divide un todo y el tamaño de cada parte en relación al total. La idea de covarianza tiene que ver con la manera en la que los estudiantes entienden que dos cantidades están relacionadas de tal manera que, cuando cambia una cantidad, la otra también cambia (covarianza) de una manera particular con respecto a la primera cantidad.

A partir de esta caracterización del razonamiento proporcional propuesta por Lamon (2005, 2007), Pitta-Pantazi y Christou (2011) consideran que las tareas de determinar si los contextos son proporcionales o no y las tareas proporcionales de valor perdido pueden proporcionar información relevante sobre el conocimiento de matemáticas relativo al razonamiento proporcional puesto de manifiesto por los resolutores.

Conocimiento especializado del contenido para la enseñanza del razonamiento proporcional

La idea del conocimiento de matemáticas para enseñar intenta enfatizar la relación entre el conocimiento de contenido matemático y el conocimiento pedagógico de contenido. Ball et al. (2008) consideran tres subcategorías dentro del conocimiento de contenido matemático: conocimiento común del contenido (common content knowledge), conocimiento especializado del contenido (specialised content knowledge) y conocimiento del horizonte matemático (horizon content knowledge). Este modelo considera el conocimiento especializado de contenido matemático (SCK) como el conocimiento de matemáticas que permite a los profesores implicarse en tareas específicas de la enseñanza, que incluyen cómo representar las ideas matemáticas a los estudiantes, proporcionar explicaciones matemáticas para las reglas y procedimientos y examinar y comprender métodos de resolución no usuales a los problemas. Es decir, es el conocimiento de matemáticas implicado, entre otras, en la competencia docente denominada “mirada profesional” (professional noticing) (Sherin, Jacobs y Philipp, 2010).

Puesto que Lamon (2005; 2007) señala que el razonamiento proporcional integra los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados, este es el conocimiento que debe tener un maestro que le permita implicarse en las tareas de enseñanza como comprender métodos de resolución (distintas formas de razonar) o cómo representar las distintas ideas o significados (objetos matemáticos). Por tanto, en nuestro estudio, el conocimiento especializado de contenido matemático sobre el razonamiento proporcional implica considerar los significados de los objetos matemáticos (interpretaciones del número racional) y las formas de razonar con estos significados (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento “up and down”, “unitizing”, resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y discriminación de situaciones no proporcionales). Teniendo en cuenta los estudios previos, el objetivo de esta investigación es identificar características del conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de estudiantes para maestros de Educación Primaria en el dominio del razonamiento proporcional.

MÉTODO

Los participantes fueron 85 estudiantes para maestro (EPM) de Educación Primaria. Los EPM respondieron un cuestionario formado por 13 tareas: 7 tareas evaluaban el conocimiento relativo a los significados vinculados a los subconstructos parte-todo, medida, razón, cociente y operador y al papel de algunos modos de representación (discreto-continuo en la interpretación parte-todo y la recta numérica en el contexto medida) y 6 tareas vinculadas a las formas de razonar en situaciones de proporcionalidad (pensamiento relacional, covarianza, razonamiento “up and down”, “unitizing”, e identificación de situaciones proporcionales y no proporcionales). Para diseñar el cuestionario se tuvo en cuenta las componentes que caracterizaban el conocimiento especializado de contenido matemático del razonamiento proporcional derivado del análisis previo (Lamon, 2005; Pitta-Pantazi y Christou, 2011). La figura 1 muestra tareas propuestas en el cuestionario.

El cuestionario constaba de dos tareas relacionadas con la componente parte-todo que examinan las habilidades de los EPM en identificar la relación parte-todo en contexto discreto y continuo (la tarea 1 es un ejemplo en el contexto discreto). Una tarea relacionada con la componente razón (tarea 2) que exige a los EPM indicar la relación entre dos cantidades (en nuestro caso la relación era parte-parte) considerada como un índice comparativo. Una tarea relacionada con la componente operador (tarea 3) que pedía reducir o ampliar a escala una figura poniendo de manifiesto el carácter multiplicativo del operador. Una tarea relacionada con el subconstructo medida-recta numérica (tarea 4) que examina la capacidad de localizar fracciones en la recta numérica considerando la idea de fracción unitaria como unidad iterativa. Una tarea relacionada con la interpretación cociente (tarea 5) y una tarea relacionada con el subconstructo medida-densidad (tarea 6) donde los EPM deben buscar fracciones comprendidas entre dos fracciones dadas.

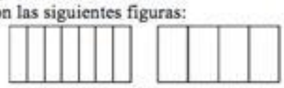
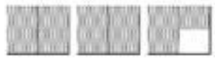
1. Contesta la siguiente cuestión usando la figura: ¿Cuántos puntos son 2/3 del conjunto dado? (Lamon ,1999, p. 73)  Subconstructo: Parte-todo	2. Hay 100 asientos en un teatro, 30 en el balcón y 70 en el patio principal. Se han vendido ochenta entradas para el primer pase incluyendo todos los asientos del patio principal. ¿Cuál es la razón entre los asientos del balcón y los del patio principal? (Lamon, 2005, p. 198) Subconstructo: Razón
3. El profesor le dijo a Nicolás que hiciese unas fotocopias. Nicolás cometió un error y apretó el botón que reduce el tamaño de cada copia a 3/4. ¿Cuánto debe aumentar Nicolás el tamaño de las copias reducidas para conseguir el tamaño original? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Operador	4. Localiza ¾ en la recta numérica:  (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Medida, Recta numérica
5. Cuatro personas van a compartir 3 pizzas idénticas de peperoni. ¿Cuánto le tocará a cada persona si todos comerán la misma proporción de pizza? Haz un dibujo que muestre que proporción le toca a cada persona. (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Subconstructo: Cociente	6. Escribe dos fracciones que estén entre 1/6 y 1/5. Explica como lo has hecho. (Lamon, 2005, p. 122) Componente: Medida, densidad
7. La caja con 16kg de cereales A cuesta 3.36€ y la caja con 12kg de cereales B cuesta 2.64€. ¿Qué caja de cereales es más barata? (modificado de Lamon, 2005, p. 81) Componente: Unitizing	8. Sam y Jason, dos estudiantes de tercero, comentaron las siguientes figuras:  Sam dijo que 7/7 es más grande porque hay más piezas. Jason dijo que 4/4 es más grande porque las piezas son más grandes. ¿Tú qué piensas? (Lamon, 1999, p. 18-19) Componente: Pensamiento relacional
9. Diana corre vueltas todos los días. Si hoy ha recorrido menos vueltas en el mismo tiempo que lo hizo ayer. Justifica tu respuesta: (modificado de Pitta-Pantazi y Christou, 2011) i. Hoy ha corrido más rápido que ayer. ii. Ayer corrió más rápido que hoy. iii. Hoy ha corrido tan rápido como ayer. iv. La información dada no es suficiente para responder a la pregunta. Componente: Covarianza	10. La parte sombreada de esta figura representa 3 $\frac{2}{3}$. ¿Qué parte de la figura representa 4 rectángulos pequeños? (Lamon, 2005, p. 73)  Componente: Razonamiento "up and down"
11. John necesita 15 botes de pintura para pintar 18 sillas. ¿Cuántas sillas pintará con 25 botes de pintura? (Pitta-Pantazi y Christou, 2011) Problema de valor perdido (proporcional)	12. Víctor y Ana corren alrededor de una pista. Corren a la misma velocidad pero Ana ha empezado más tarde. Cuando Ana ha dado 5 vueltas, Víctor ha dado 15 vueltas. Cuando Ana haya dado 30 vueltas, ¿cuántas habrá dado Victor? (Fernández, Llinares y Valls, 2008) Problema de valor perdido (no proporcional)

Figura 1. Tareas para cada una de las componentes del razonamiento proporcional

En la tarea 7, relacionada con la componente unitizing, los EPM deben comprobar cuál de los dos productos dados era más barato, por lo que las razones debían ser consideradas como unidades que se comparaban. La tarea 8, relacionada con la componente pensamiento relacional, examina si los EPM son capaces de identificar la relación inversa entre el número de partes y el tamaño de la parte. La tarea 9, correspondiente a la componente covarianza, requiere identificar la relación entre dos cantidades y realizar comparaciones sin datos numéricos específicos para reconocer cómo los cambios en una cantidad se relacionan con la otra. En cuanto a la tarea 10, relacionada con la componente razonamiento "up & down", evalúa la capacidad de reconstruir la unidad y utilizar ésta para obtener qué parte de la figura representa los rectángulos pedidos. Por último, se propone un problema proporcional de valor perdido (tarea 11) y un problema no proporcional de valor perdido que se modeliza mediante la función $f(x) = x + b$, (tarea 12) para evaluar la capacidad de identificar las situaciones no proporcionales.

Para el análisis de los datos, las respuestas correctas e incorrectas en cada tarea se codificaron como 1 o 0 según el siguiente criterio:

- Si se ha resuelto y justificado correctamente la tarea, se codificaba con un 1, independientemente de si había cometido un error de cálculo.
- Si se ha resuelto de forma incorrecta la tarea o estaba en blanco, se codificaba con un 0. También se codificaron con un 0 las respuestas que siendo correctas la justificación era incorrecta.

Primeramente se obtuvieron los porcentajes de éxito para cada una de las tareas y en segundo lugar realizamos un análisis Cluster usando el programa estadístico SPSS versión 18.0, para identificar diferentes grupos de estudiantes para maestro (perfiles) que nos pudieran proporcionar características del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional.

RESULTADOS

Nivel de éxito en la resolución de las tareas

La tabla 1 muestra el porcentaje de éxito en cada una de las componentes. Más de la mitad de los estudiantes para maestro resolvieron correctamente las tareas relacionadas con las componentes medida-recta numérica, cociente, problema de valor perdido, covarianza, pensamiento relacional y parte-todo (de esta última, se muestra la media de ambas tareas (contexto discreto y continuo) ya que no hubo diferencias significativas entre ambas).

Tabla 1. Porcentaje de EPM que resolvieron correctamente las tareas relacionadas con cada una de las componentes del razonamiento proporcional

Componente	Porcentaje de éxito
Operador	2.35
Razonamiento “up and down”	9.41
Medida-densidad	17.65
Problema de valor perdido (no proporcional)	24.71
Razón	30.59
Proceso “unitizing”	32.94
Problema de valor perdido (proporcional)	72.94
Cociente	72.94
Medida-recta numérica	72.94
Covarianza	78.82
Pensamiento relacional	83.53
Parte-todo	91.77

La tarea más difícil fue la relacionada con la componente operador (tarea 3) (2.35%). Los EPM justificaban que si se había reducido ¾, faltaba ¼ para tener el tamaño original o bien que había que aumentar lo mismo mostrando una aproximación aditiva errónea en vez de multiplicativa. La siguiente tarea en nivel de dificultad fue la relacionada con el razonamiento “up and down” (tarea 10) (9.41%). Los EPM no la resolvieron o aplicaron argumentos sin sentido dado que no reconocieron la unidad. Respecto a la tarea relacionada con la componente medida-densidad (tarea 6) (17.65%) muchos EPM la dejaron en blanco y otros comentaron que no cabían más fracciones entre estas dos en lugar de buscar otras equivalentes con denominador mayor. En la tarea de valor perdido no proporcional (tarea 12) (24.71%) la mayoría de los EPM la resolvieron aplicando de manera errónea estrategias proporcionales como la regla de tres. En la tarea correspondiente a la componente razón (tarea 2) (30.59%) muchos de los EPM escribieron la relación parte-todo en lugar de parte-parte mostrando la dificultad adicional que genera la relación parte-parte. Finalmente, en la tarea relativa al proceso “unitizing” (tarea 7) (32.94%) los EPM no realizaron ninguna operación, razonando de forma cualitativa que una caja era más barata porque contenía más kg en lugar de identificar las razones y compararlas. Estos resultados muestran las dificultades de los EPM en la identificación de las razones como “unidad” y su carácter multiplicativo (operador y “unitizing”) y en el reconocimiento de la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo (razonamiento “up and down”).

Perfiles en el conocimiento de matemáticas especializado

El análisis cluster agrupó al 78% de los EPM en 5 grupos (66 de los 85 participantes). La tabla 2 muestra las componentes del razonamiento proporcional en las que los diferentes grupos actuaron de forma correcta en más del 90% de los casos. Teniendo en cuenta cómo fueron agrupados los EPM, hay cuatro componentes de conocimiento y formas de razonar que no discriminan. En primer lugar, la componente parte-todo ya que forma parte de todos los grupos. En segundo lugar, las componentes operador, razonamiento “up and down” y la identificación de situaciones no proporcionales tampoco discriminan ya que no aparecen en ningún grupo con un nivel de éxito mayor del 90%. Estas tres componentes que no aparecen en ningún grupo se convierten en las referencias a las que debe aspirar el desarrollo del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional según el análisis teórico previo.

Tabla 2 - Identificación de cinco grupos de estudiantes para maestro de primaria

	Grupo 1 N=26	**Grupo 2 N=16**	**Grupo 3 N=14**	**Grupo 4 N=6**	**Grupo 5 N=4**
Parte-todo	X	X	X	X	X
Razón			X		X
Operador					
Medida-Recta numérica		X			X
Cociente			X	X	X
Medida-densidad				X	X
Proceso “unitizing”					X
Pensamiento relacional	X		X		X
Covarianza	X			X	X
Razonamiento “up & down”					
Valor perdido proporcional		X		X	X
Valor perdido no proporcional					

Los resultados muestran cuatro perfiles en el comportamiento de los EPM: aproximación cualitativa caracterizada por las componentes pensamiento relacional y covarianza (Grupo 1), aproximación centrada en el cálculo que se evidencia en la resolución del problema proporcional de valor perdido a partir del algoritmo de la regla de tres en la mayoría de los casos (Grupo2), aproximación centrada en los significados de la idea de fracción (relación entre número de partes y el tamaño de las partes, situar fracciones entre dos fracciones en contexto parte-todo, razón, cociente, medida-densidad) (Grupo 3), y, por último, aproximaciones centradas en la integración paulatina de las componentes del razonamiento proporcional (razón, medida-densidad, razonamiento “unitizing” y covarianza) (Grupos 4 y 5). La idea de considerar el Grupo 4 y 5 en el mismo perfil se apoya en que, en cierta medida, el comportamiento de los EPM en el Grupo 5 complementa el desarrollo inicial de la componente del razonamiento proporcional puesto de manifiesto en los comportamientos del Grupo 4.

DISCUSIÓN

Este estudio se ha centrado en examinar el conocimiento especializado de contenido matemático de un grupo de EPM en el ámbito del razonamiento proporcional integrando las interpretaciones del número racional (significados de los objetos matemáticos) y las formas de razonar con estos significados: pensamiento relacional, covarianza, y en el reconocimiento de la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo (razonamiento “up and down”), el proceso de generar unidades contables que implica la construcción de una unidad de referencia a partir de la relación entre las cantidades y usar esta nueva unidad para contar (“unitizing”), la resolución de situaciones proporcionales de valor perdido y la identificación de situaciones no proporcionales. Los resultados muestran que los EPM tienen un conocimiento especializado sobre el razonamiento proporcional limitado puesto de manifiesto por la dificultad en identificar situaciones no proporcionales, en reconocer la unidad en contextos de medida con el significado parte-todo y en manejar el significado multiplicativo de la idea de operador en contextos multiplicativos (estas tres componentes no aparecen en ninguno de los clusters). Estos resultados indican que estas tres componentes del conocimiento especializado de contenido matemático para la enseñanza del razonamiento proporcional constituyen referentes en su caracterización.

Una comprensión no adecuada de estas componentes del razonamiento proporcional limita el desarrollo de otras tareas de enseñanza y competencias como la competencia docente “mirar con sentido” el aprendizaje matemático de los estudiantes. La relación entre el conocimiento especializado de contenido matemático y la competencia docente “mirar con sentido” se muestra en investigaciones que examinan cómo los estudiantes para maestro identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de primaria sobre el razonamiento proporcional. Fernández, Llinares y Valls (2012) indican que cuando los estudiantes para maestro no eran capaces de discriminar situaciones proporcionales de las no proporcionales tenían dificultades en identificar si las estrategias utilizadas por los estudiantes de primaria eran correctas o no en diferentes situaciones proporcionales y no proporcionales.

Finalmente, la forma en la que se han constituido los diferentes clusters muestra, en cierta medida, las características que definen el desarrollo del conocimiento especializado de contenido matemático en el ámbito del razonamiento proporcional. El Grupo 1 se caracteriza porque los EPM razonaron de forma cualitativa y por tanto, estarían en una etapa inicial del desarrollo del razonamiento proporcional ya que éste se desarrolla desde el pensamiento cualitativo hasta el razonamiento multiplicativo (Behr et al., 1992). El Grupo 2 viene caracterizado por el cálculo. Los EPM de este grupo tienen una comprensión superficial de la idea de medida en el contexto de la recta numérica y se centran en la aplicación mecánica de la regla de tres en situaciones que se asumen de proporcionalidad. Los EPM que están en el Grupo 3 tienen adquirida las interpretaciones de la fracciones (a excepción de la interpretación como operador). Por último, los Grupos 4 y 5 muestran el inicio del desarrollo del razonamiento proporcional. Estos resultados indican que un alto porcentaje de EPM estarían en un nivel de razonamiento pre-proporcional centrado en las relaciones cualitativas (Valverde y Castro, 2009) o únicamente centrado en los significados de los números racionales o en reglas algorítmicas como la regla de tres, sin tener adquiridas las formas de razonar con estos significados.

RECONOCIMIENTOS

Esta investigación ha recibido el apoyo del Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España. Y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

REFERENCIAS

Ball, D.L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Behr, M., Harel, G., Post, T. y Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The Journal of Mathematics Education*, *44*(6), 747-759.

Lamon, S. J. (2005). *Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (2nd ed.). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Lamon, S.J. (2007). Rational Numbers and Proportional Reasoning: Toward a Theoretical Framework. En F.K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 629-668). NCTM-Information Age Publishing, Charlotte, NC.

Livy, S. y Vale, C. (2011). First year pre-service teachers' mathematical content knowledge: Methods of solution for a ratio question. *Mathematics Teacher Education and Development, 1*(2), 22-43.

Pitta-Pantazi,D. y Christou, C. (2011). The structure of prospective kindergarten teachers' proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *14*(2), 149–169.

Rivas, M.A., Godino, J.D. y Castro, W.F. (2012) Desarrollo del conocimiento para la Enseñanza de la Proporcionalidad en Futuros profesores de Primaria. *Bolema, 26*(42B), 559-588.

Sherin, M.G., Jacobs, V.R. y Philipp, A. (2010) (eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes*. New York: Routledge.

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González, J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM. Investigación en Educación Matemática* (pp. 523-532). Santader: SEIEM y Universidad de Cantabri

SIGNIFICATIVIDAD DE LA IMPLEMENTACIÓN CURRICULAR DEL MODELO DE VAN HIELE

Significance of Van Hiele model curricular implementation

Ana Belén Cabello Pardos[ab], Ana B. Sánchez García[b] y Ricardo López Fernández[b]

[a]IES Joaquín Araújo (Fuenlabrada, Madrid), [b]Facultad de Educación (Universidad de Salamanca)

Resumen

Este trabajo analiza la significatividad de la aplicación del modelo de Van Hiele en Geometría de 1º de ESO. Por una parte, se aplicó un cuestionario válido y fiable a 137 alumnos antes y después de estudiar la asignatura, determinando los errores al inicio del curso y los persistentes tras el estudio y constatando la inexistencia de diferencias significativas en el aprendizaje por razón de género. Por otra parte, se realizó un estudio cuasi-experimental del aprendizaje en dos grupos de 18 y 21 alumnos de la muestra anterior. Uno de estos grupos se seleccionó como grupo experimental y utilizó las unidades didácticas elaboradas para la investigación, basadas en el modelo de Van Hiele. El grupo de contraste siguió la metodología tradicional. Se encontraron diferencias significativas favorables al grupo experimental y se analizó en detalle la corrección de los errores.

Palabras clave: *aprendizaje, diseño cuasi-experimental, errores, Geometría, modelo de Van Hiele.*

Abstract

This paper analyzes the significance of applying the Van Hiele model in Geometry of the first course in ESO students. On one hand, a valid and reliable questionnaire was applied to a sample of 137 students before and after studying the subject. The students' errors before and after the geometry course were determined. It was found that there aren't significant differences in gender learning. Furthermore, a quasiexperimental research about learning in two groups of 18 and 21 students from the previous sample was conducted. One of these two groups was selected as experimental group and used the teaching units for research, based on Van Hiele model. The other one was a contrast group and followed the traditional methodology. The results showed significant differences for the experimental group, and the correction of the errors was widely analyzed.

Keywords: *learning, quasiexperimental design, errors, Geometry, Van Hiele model.*

Cabello, A.B., Sánchez, A.B. y López, R. (2013). Significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 193-207). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Esta investigación surge de la práctica docente. Analizando el rendimiento de los alumnos en Geometría, durante tres cursos consecutivos, destacó una comprensión media inferior a la supuesta. Esta situación motivó a tratar el problema de la comprensión en Geometría desde 1º de ESO.

Se analizaron teorías que abordan la comprensión de los conceptos geométricos como el modelo de Van Hiele (Van Hiele, 1957, 1986; Hoffer, 1983; Jaime & Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán, y otros, 1994; Guillén, 2004; Guillén, González, & García, 2009) y las que tratan la formación del concepto geométrico como el modelo cognitivo "imagen del concepto-definición del concepto" de Vinner y Hershkowitz (Hershkowitz, 1987, 1989; Vinner & Hershkowitz, 1980) y la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993). Estas teorías se complementan, como se ejemplifica en la investigación que se ha desarrollado sobre la visualización en los niveles iniciales del modelo de Van Hiele. También se estudiaron las propuestas de utilización de ejemplos y contraejemplos en la formación de conceptos geométricos (Tsamir, Tirosh, & Levenson, 2008) y las aportaciones sobre los distractores de orientación (Azcárate, 1997), incorporando un programa de Geometría dinámica para corregir los errores de comprensión.

Se diseñaron unas unidades didácticas según las fases del modelo de Van Hiele y se utilizó un cuestionario de medición del rendimiento en Geometría (Cabello, Sánchez, & López, 2012).

La primera parte de la investigación consistió en analizar las respuestas de los alumnos al cuestionario antes y después de estudiar Geometría. Se analizaron los conocimientos y los errores de los alumnos previos al estudio de la asignatura y, además, los conocimientos que se mantienen, los errores que se corrigen y los que persisten a pesar de estudiar Geometría. Se midió el rendimiento de los alumnos y se realizó un contraste de hipótesis sobre el aprendizaje en función del género, resultando que no existen diferencias significativas.

La segunda parte está basada en un diseño metodológico cuasi-experimental. Se eligieron dos grupos semejantes en el pre-test en los que impartía docencia la misma profesora. El grupo experimental utilizó las unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje y apoyadas en un software de Geometría dinámica. El grupo de contraste[xix] siguió la metodología tradicional (con la secuenciación del libro, la pizarra y la tiza). Se aplicó el cuestionario a ambos grupos antes y después del estudio de la asignatura y resultaron diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental.

MARCO TEÓRICO

En este apartado se exponen los modelos teóricos que sustentan la investigación. Como teoría principal se consideró el modelo de Van Hiele (1957, 1986), según el cual, el alumno recorre cinco niveles en su comprensión en Geometría y en cada nivel se establecen unas fases que guían su aprendizaje.

Esta investigación se centra en los dos primeros niveles. En el nivel básico, de reconocimiento o visualización, los objetos son los elementos básicos del estudio, es decir, las figuras. El siguiente nivel, es el de análisis, cuyos elementos son las partes y propiedades de las figuras y objetos. Más información puede consultarse en las referencias indicadas (Van Hiele, 1957, 1986; Hoffer, 1983; Jaime & Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993).

Para profundizar en el tema de la visualización, se estudiaron e incorporaron a la investigación dos teorías sobre la formación del concepto geométrico, que se exponen a continuación.

En primer lugar, el modelo cognitivo imagen del concepto-definición del concepto de Vinner y Hershkowitz (1980), analiza los procesos de la mente del alumno al aprender un concepto geométrico nuevo

Denominan "dibujo mental del concepto" al conjunto de todos los dibujos que el alumno ha asociado con el concepto. La imagen del concepto es el dibujo mental junto con las propiedades que el alumno asigna al concepto. La definición del concepto es una definición verbal que posibilita su expresión con precisión.

Afirman que conocer las imágenes de los conceptos de los alumnos es muy importante para el docente ya que puede sugerir mejoras para la enseñanza y evitar la formación de imágenes de conceptos erróneas. Por ejemplo, si la enseñanza se realiza fundamentalmente con ejemplos prototípicos, y no se trabaja con distractores de orientación y contraejemplos, los alumnos difícilmente llegarán a la correcta formación del concepto.

En segundo lugar, en la teoría de los conceptos figurales de Fischbein (1993) se llama a las figuras geométricas conceptos figurales pues poseen características conceptuales y figurales.

En el proceso de razonamiento, las imágenes y los conceptos interactúan constantemente, por tanto, parte del proceso de aprendizaje debe consistir en enseñar al alumno a resolver situaciones conflictivas, enfatizando el predominio de la definición sobre la imagen.

Esta investigación se enmarca en los dos primeros niveles de Van Hiele, analizando la visualización de los alumnos, es decir, se realiza una indagación de las imágenes conceptuales bajo la hipótesis de que al comenzar 1º de ESO, no tienen formado el concepto figural, poseen imágenes no informadas por el concepto, afectadas por atributos irrelevantes como la orientación en el plano. Con la enseñanza, esta situación conflictiva se resuelve, aunque su resolución depende, de manera significativa, de la metodología empleada.

Por este motivo, para detectar los conceptos geométricos que no están formados y los errores de comprensión, se ha centrado la investigación en los dos primeros niveles de Van Hiele, analizando las imágenes conceptuales de los alumnos.

Este objetivo parece relevante pues en la revisión bibliográfica no se han encontrado investigaciones que propongan el diseño curricular de Geometría partiendo del reconocimiento de los conceptos.

METODOLOGÍA

Las propuestas curriculares de aprendizaje de Geometría basadas en el modelo de Van Hiele (Jaime & Gutiérrez, 1990; Jaime, 1993; Corberán, y otros, 1994) y otras investigaciones (Huerta, 1999; Guillén, 2000), se consideraron de gran importancia y aportaron la idea de la detección de errores como parte de la fase de indagación del modelo de Van Hiele, aspecto que permitió adaptar el marco teórico a la realidad de las aulas en las que se desarrolló el estudio.

La investigación se diseñó con dos objetivos específicos:

1. Detectar los errores de comprensión de los alumnos antes y después del estudio de Geometría en 1º de ESO. Determinar si existen diferencias significativas en el aprendizaje por géneros.
2. Determinar la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele.

Metodología del primer objetivo

Se aplicó el cuestionario a 137 alumnos antes y después de estudiar Geometría.

Se calculó el porcentaje de aciertos de cada ítem. La interpretación del índice de facilidad (también llamado, de dificultad) según Yela (1987), sugirió el criterio para identificar el error en el ítem muy difícil, difícil o de dificultad media.

Tabla 1. Interpretación del índice de facilidad de un ítem según Yela (1987)

Denominación	**Índice de facilidad**
Muy difícil	Entre 0,05 y 0,24
Difícil	Entre 0,25 y 0,44
Dificultad media	Entre 0,45 y 0,54
Fácil	Entre 0,55 y 0,74
Muy fácil	Entre 0,75 y 0,95

Para realizar el contraste de hipótesis en el aprendizaje por razón de género, se comprobó la semejanza en el pre-test (prueba t de Student para muestras independientes, α=0,01). Se calculó para cada alumno el aprendizaje o puntuación de cambio (nota del post-test – nota del pre-test) y la prueba t de Student, mostró que no existen diferencias significativas por géneros (α=0,01)[xx].

La siguiente tabla resume el cuestionario diseñado y el contenido se muestra en el Anexo.

Tabla 2. Cuestionario de medición del rendimiento en Geometría

	Contenido	**Ítems**
1	Reconocimiento de la posición relativa de dos rectas en el plano	1a, 1b, 1c, 1d
2	Reconocimiento de los tipos de ángulos	2a, 2b, 2c, 2d
3	Reconocimiento de la posición relativa de dos ángulos	3a, 3b, 3c
4	Determinación de los ángulos de un triángulo (semejanza y suma de ángulos)	4a, 4b, 4c
5	Clasificación de los triángulos según los lados	5a, 5b, 5c
6	Clasificación de los triángulos según los ángulos	6a, 6b, 6c, 6d
7	Identificación de la mediatriz de un segmento	7
8	Identificación de la bisectriz de un ángulo	8
9	Identificación de polígonos irregulares y cuadriláteros no paralelogramos	9a, 9b, 9c, 9d
10	Identificación de paralelogramos y sus áreas	10a1, 10b1, 10c1, 10a2, 10b2, 10c2
11	Identificación de los elementos de un polígono regular	11a, 11b, 11c, 11d
12	Identificación de los elementos de la circunferencia	12a, 12b, 12c, 12d
13	Reconocimiento de figuras circulares	13a, 13b, 13c, 13d
14	Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura	14
15	Identificación de ternas pitagóricas	15

Metodología del segundo objetivo

Se elaboraron unas unidades didácticas basadas en las fases de aprendizaje del modelo de Van Hiele, teniendo en cuenta los errores detectados en el pre-test y utilizando un software geométrico como ayuda para su corrección.

El diseño de la investigación fue cuasi-experimental. Como los grupos estaban constituidos, se eligieron dos de ellos con la misma profesora y se comprobó que eran semejantes, es decir, sin diferencias significativas en el pre-test. El grupo de contraste siguió una metodología tradicional y el experimental utilizó las unidades didácticas.

Concluida la experiencia, ambos grupos respondieron al cuestionario. Se calculó para cada alumno el valor del aprendizaje obteniendo diferencias significativas favorables al grupo experimental.

RESULTADOS

Los resultados de cada uno de los objetivos son los siguientes.

Detección de los errores de comprensión al principio y al final del estudio de Geometría en 1º de ESO. Determinación de que no existen diferencias significativas en el aprendizaje entre chicos y chicas

Tanto en el pre-test, como en el post-test, se obtuvo un alfa de Cronbach de 0,947, que supone una fiabilidad muy alta (Webb, 1983). El índice de facilidad del pre-test fue 0,48 lo que indica una dificultad media (Yela, 1987), y en el post-test, 0,67 lo que significa que el cuestionario resulta fácil en ese momento.

Se cuantificó el porcentaje de aciertos tanto en el pre-test como en el post-test para medir el error. Con este criterio se catalogaron los ítems en tres grupos:

a. Conocimientos en el pre-test que se mantienen en el post-test.
b. Errores en el pre-test que se corrigen en el post-test.
c. Errores en el pre-test que persisten en el post-test.

Además se comprobó que no existían diferencias significativas por géneros en el pre-test (0,913>0,01). La puntuación media de las chicas fue 4,8163 (N=68, s=1,79433) y la de los chicos 4,8521 (N=69, s=2,01648).

Para cada alumno se calculó el aprendizaje y se compararon las puntuaciones. La media del aprendizaje para las chicas fue 1,7707 (N=68, s=1,19464) y para los chicos 1,9323 (N=69, s=1,37545), resultando que no existen diferencias significativas (0,464>0,01).

Significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele

La puntuación del pre-test en el grupo de contraste fue 5,5669 (N=18, s=1,50227) y en el grupo experimental 5,5556 (N=21, s=1,52572). La prueba t mostró que no existen diferencias significativas en el pre-test (0,981>0,01).

Después, cada grupo siguió su metodología y al finalizar el estudio, respondieron nuevamente al cuestionario. Se calculó para cada alumno el aprendizaje.

La media del aprendizaje para el grupo de contraste fue 1,4006 y para el grupo experimental 2,4702. La prueba t reflejó diferencias significativas en el aprendizaje favorables al grupo experimental (0,006<0,01).

Se calculó además el tamaño del efecto con la fórmula de Cohen (1988), para cuantificar, de manera más interpretable, la diferencia en el aprendizaje entre los dos grupos, obteniendo el valor d=0,9357>0,80, lo que significa que la diferencia es grande (Morales, 2012).

ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A continuación se presenta el análisis y las conclusiones de cada uno de los resultados.

Análisis y conclusiones del primer resultado

Se estableció la evolución de la comprensión en Geometría, en tres apartados.

a. Conocimientos que se mantienen:

- Reconocimiento de rectas paralelas
- Reconocimiento de tipos de ángulos: agudo, obtuso, llano, recto
- Clasificación de los triángulos según los lados: equilátero e isósceles
- Identificación de la mediatriz de un segmento y de la bisectriz de un ángulo
- Identificación del cuadrado y del rectángulo
- Identificación del diámetro y del radio de la circunferencia
- Reconocimiento del círculo y la corona circular

b. Errores que se corrigen:

- Reconocimiento de rectas secantes y perpendiculares
- Reconocimiento de ángulos suplementarios, consecutivos y complementarios
- Determinación de un ángulo por semejanza de triángulos
- Clasificación de los triángulos según los lados: escaleno
- Clasificación de los triángulos según sus ángulos
- Identificación del romboide
- Identificación del área del cuadrado y del rectángulo
- Identificación del lado y el centro de un polígono regular
- Identificación del centro de la circunferencia
- Cálculo del área de un triángulo conociendo la base y la altura

c. Errores que persisten:

- Reconocimiento de rectas perpendiculares giradas
- Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos
- Identificación de un pentágono irregular, trapecios y trapezoide
- Identificación del área del romboide
- Identificación de la apotema y el radio de un polígono regular
- Identificación de la cuerda de la circunferencia
- Reconocimiento del sector, segmento y trapecio circular
- Identificación de las ternas pitagóricas

Estos conocimientos y errores no eran los esperados por las profesoras, lo cual revela la importancia de tener datos reales de la situación inicial de los alumnos para realizar una enseñanza eficaz.

Los resultados de este estudio, si bien están localizados en una muestra de alumnos y reflejan sus conocimientos, errores y aprendizaje, son extrapolables a cualquier otro grupo en el sentido de que es necesaria una detección del nivel inicial, para adecuar la enseñanza a dicho punto de partida.

También se concluye que chicas y chicos son semejantes en los conocimientos previos y en el aprendizaje.

Análisis y conclusiones del segundo resultado

El cálculo del tamaño del efecto permitió concluir que la diferencia significativa en el aprendizaje, favorable al grupo experimental, tiene gran relevancia práctica.

Para determinar el sentido de esta gran relevancia práctica del modelo de Van Hiele se analizaron los errores persistentes en el grupo experimental, para concretar qué errores se han corregido con el modelo de Van Hiele y cuáles están pendientes de subsanar.

Aunque el grupo experimental y el de contraste eran semejantes en el pre-test, sin embargo de los 14 errores considerados, el primero los tenía todos mientras que el segundo tenía sólo 12. En el post-test, el experimental ha corregido 9 y el de contraste sólo 4.

Además, como el límite para determinar el error está en un 54% de aciertos, se observa que de los 5 errores que persisten en el grupo experimental, 3 casi están corregidos y 2 no. En el de contraste, de los 8 errores que persisten, sólo 3 están casi corregidos y 5 están pendientes de corregir.

Tabla 3. Errores en el pre-test que persisten en el post-test (E=error)

E		Grupo experimental % aciertos					Grupo de contraste % aciertos			
		pre-test		**post-test**			**pre-test**		**post-test**	
1	1c	47,6	E	71,4			66,7		55,6	
2	4c	14,3	E	52,4	E		27,8	E	27,8	E
3	9a	9,5	E	66,7			16,7	E	66,7	
	9b	33,3	E	71,4			50,0	E	55,6	
	9c	23,8	E	42,9	E		11,1	E	38,9	E
	9d	33,3	E	52,4	E		38,9	E	55,6	
4	10c2	14,3	E	66,7			27,8	E	50,0	E
5	11a	0,0	E	61,9			0,0	E	61,1	
	11c	4,8	E	52,4	E		38,9	E	38,9	E
6	12c	52,4	E	81,0			22,2	E	50,0	E
7	13b	47,6	E	57,1			66,7		61,1	
	13c	42,9	E	66,7			38,9	E	44,4	E
	13e	42,9	E	81,0			33,3	E	50,0	E
8	15	4,8	E	38,1	E		0,0	E	33,3	E

Los errores que no se han corregido con esta metodología experimental son:

- Determinación de un ángulo de un triángulo conociendo los otros dos (4c)
- Identificación del trapecio rectángulo girado (9c)
- Identificación de un trapezoide (9d)
- Identificación del radio de un polígono regular (11c)
- Identificación de las ternas pitagóricas (15)

De estos cinco errores, como se ha comentado, tres están casi corregidos ya que tienen un porcentaje de aciertos de 52,4% (próximo a 54%). En cambio sólo reconocen el trapecio rectángulo girado el 42,9% e identifican correctamente las ternas pitagóricas el 38,1% de los alumnos del grupo experimental. Aunque se han corregido bastante, pues se partía de un 23,8% y 4,8% de aciertos, respectivamente, sin embargo no se puede decir que hayan sido subsanados.

Se concluye que dicho cuestionario permite aplicar el modelo de Van Hiele de manera correcta, es decir, partiendo de los errores y dificultades de comprensión de los alumnos y de sus conocimientos previos. Y se constata la significatividad de la implementación curricular del modelo de Van Hiele en 1º de ESO conforme al actual currículum, con gran relevancia práctica.

Agradecimientos

Esta investigación se ha llevado a cabo gracias a la desinteresada colaboración de las profesoras Mª Carmen Fernández Reina, Sonia Martín Gil, Mª Luisa Rioja Zarco y Trinidad Zaragoza Canales.

Referencias

Azcárate, C. (1997). Si el eje de coordenadas es vertical, ¿qué podemos decir de las alturas de un triángulo? *Suma, 25,* 23-30.

Cabello, A., Sánchez, A., & López, R. (2012). Elaboración de un cuestionario de medición del rendimiento de los alumnos de 1º de ESO en Geometría. En E. Martín, M. Rubio & J. Urquiza (Eds.), *Actas de las III Jornadas de Innovación y TIC Educativas JITICE* (pp. 163-166). Madrid.

Cohen, J. (1988). *Statistical Power Analysis for the Behavioral Sciences.* New York: Accademic Press.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A., & Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la Geometría en Enseñanza Secundaria basada en el Modelo de Razonamiento de van Hiele.* Madrid: M.E.C.

Fischbein, E. (1993). La teoría de los conceptos figurales. *Educational Studies in Mathematics*, *24*(2), 139-162.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de los conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(1), 35-53.

Guillén, G. (2004). El modelo de van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática, 16*(3), 103-125.

Guillén, G., González, E., & García, M. (2009). Criterios específicos para analizar la geometría en libros de texto para la enseñanza primaria y secundaria obligatoria. Análisis desde los cuerpos de revolución. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.), *Actas del XIII Simposio de la SEIEM* (pp. 247-258). Santander.

Hershkowitz, R. (1987). The acquisition of concepts and misconceptions in basic Geometry or when "a little learning is a dangerous thing". *Prodeedings of the Second International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Mathematics III* (pp. 238-251). Ithaca, New York: Cornell University.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11*(1), 61-76.

Hoffer, A. (1983). Van Hiele based research. En R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematical Concepts and Processes* (pp. 205-227). New York: Academic Press.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de Van Hiele y la taxonomía SOLO: un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las Ciencias 17*(2), 291-309.

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Valencia: Universidad de Valencia.

Jaime, A., & Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele. En S. Llinares & M. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

Morales, P. (2012). *El tamaño del efecto (effect size): análisis complementarios al contraste de medias*. Obtenido de http://www.upcomillas.es/personal/peter/investigacion/Tama%F1oDelEfecto.pdf

Tirosh, D., & Stavy, R. (1999). Intuitive rules: a way to explain and predict students´reasoning. *Educational Studies in Mathematics, 38,* 51-66.

Tsamir, P., Tirosh, D., & Levenson, E. (2008). Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educational Studies in Mathematics, 69,* 81-95.

Van Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión en conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la Geometría*. Utrecht: Universidad Real de Utrecht.

Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education.* New York: Academic Press.

Vinner, S., & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. En R. Karplus (Eds.), *Proceedings of the 4th PME International Conference* (pp. 177-184).

Webb, M. (1983). A scale for evaluating standarized reading tests, with results for Nelson-Denny, Iowa and Standford. *Journal of Reading, 26,* 424-429.

Yela, M. (1987). *Introducción a la teoría de los tests.* Madrid: Facultad de Psicología. Universidad Complutense.

[xix] Denominación recomendada por la A.P.A. en caso de asignación no aleatoria.

[xx] En la investigación se utilizó el nivel de significación más estricto (0,01) para garantizar el rigor en los resultados.

Anexo: Cuestionario de Geometría

CUESTIONARIO DE PRIMERO

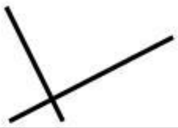
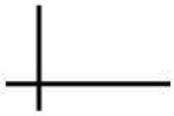
Cod:

1

Centro:	Fecha:
Nombre del alumno:	
Curso: Grupo: Nota Matemáticas 1ª evaluación:	
Indica lo que proceda. Marca con una X. Chica [ ]	Chico [ ]

1. Indica cómo son las siguientes rectas:

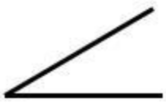
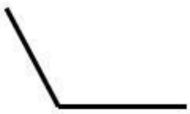
Paralelas **Perpendiculares** **Secantes no perpendiculares**

			
a.	b.	c.	d.

e. Justifica la respuesta c:

2. Indica de qué tipo es cada uno de los siguientes ángulos:

Agudo **Recto** **Obtuso** **Llano**

			
a.	b.	c.	d.

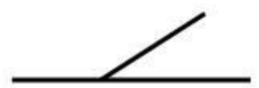
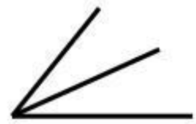
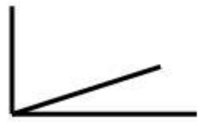
CUESTIONARIO DE PRIMERO

Cod:

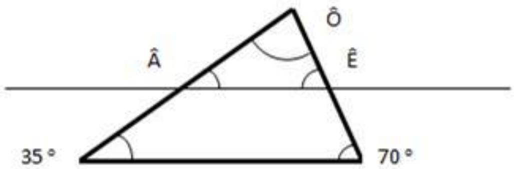
2

3. Indica cómo son estos pares de ángulos.

Consecutivos **Complementarios** **Suplementarios**

		
a.	b.	c.

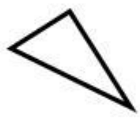
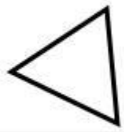
4. En el siguiente triángulo hemos dibujado una recta paralela a uno de los lados. Halla la medida de los ángulos Â, Ê y Ô.



a. El ángulo Â mide:	b. El ángulo Ê mide:	c. El ángulo Ô mide:

d. Justifica la respuesta c:

5. Clasifica los siguientes triángulos según los lados:

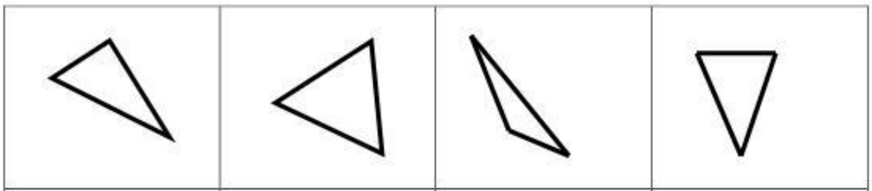
		
a.	b.	c.

CUESTIONARIO DE PRIMERO

Cod:

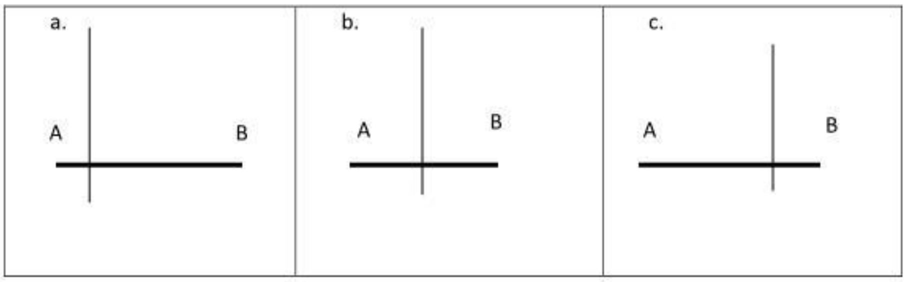
3

6. Clasifica los siguientes triángulos según los ángulos:



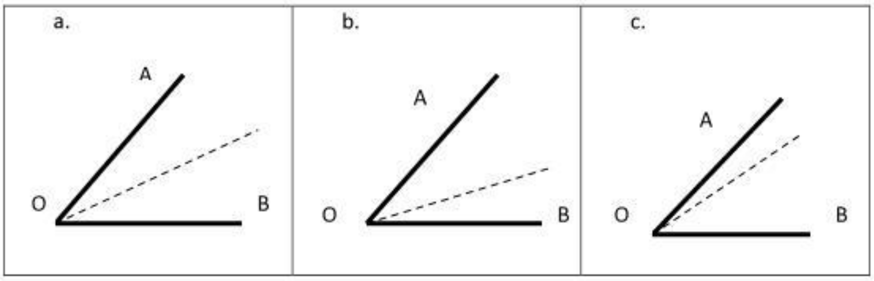
a.	b.	c.	d.

7. ¿Cuál de las siguientes rectas es la mediatriz del segmento AB? Indica si es "a", "b" o "c".



La respuesta correcta es:

8. ¿Cuál de las siguientes rectas es la bisectriz del ángulo AOB? Indica si es "a", "b" o "c".



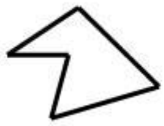
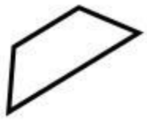
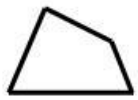
La respuesta correcta es:

CUESTIONARIO DE PRIMERO

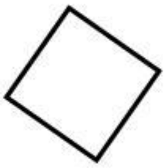
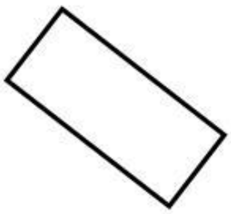
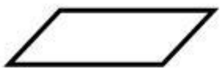
Cod:

4

9. Escribe los nombres de los siguientes polígonos:

			
a.	b.	c.	d.

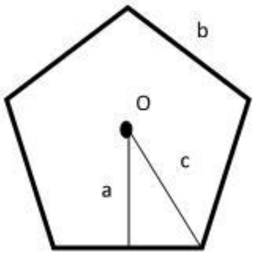
10. Completa la tabla.

Dibujo	Nombre del polígono	Área del polígono
	a1	a2
	b1	b2
	c1	c2

CUESTIONARIO DE PRIMERO Cod:

5

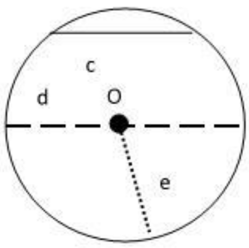
11. Completa.



En un polígono regular:

a. El segmento **a** se llama....................................
b. El segmento **b** se llama....................................
c. El segmento **c** se llama.......................................
d. El punto **O** se llama...

12. Completa los elementos de la circunferencia:



a. El punto **O** se llama ....
b. El segmento **d** se llama ....
c. El segmento **c** se llama ....
d. El segmento **e** se llama ....

13. Completa:

Segmento circular **Sector circular** **Corona circular**
Trapecio circular **Círculo**

				
a.	b.	c.	d.	e.

CUESTIONARIO DE PRIMERO

Cod:

6

14. Calcula el área de un triángulo de 5 cm de base y 8 cm de altura.

15. Indica cuáles de las siguientes ternas determinan las medidas de los lados de un triángulo rectángulo:

a. 3, 4, 5 **b. 6, 8, 10** **c. 5, 6, 7**

JUICIOS DE ASOCIACIÓN EN TABLAS DE CONTINGENCIA CON DATOS ORDINALES

Association judgments in contingency tables with ordinal data

Gustavo R. Cañadas[a], Carmen Batanero[a], Antonio Estepa[b] y Pedro Arteaga[a]

[a]Universidad de Granada, [b]Universidad de Jaén

Resumen

En este trabajo se analizan las estrategias utilizadas por una muestra de 414 estudiantes de psicología al analizar la asociación entre una variable dicotómica y otra ordinal en una tabla de contingencia. Se clasifican las estrategias, extendiendo los niveles propuestos por Pérez Echeverría (1990) para tablas 2x2. Se comparan los resultados con los de Estepa (1993) en un ítem similar y se estudian los conflictos semióticos

Palabras clave: *Tablas de contingencia, datos ordinales, estrategias en juicios de asociación, conflictos semióticos.*

Abstract

In this research we analyze the strategies used by a sample of 414 psychology students to analyze the association between a dichotomous and another ordinal variable in a contingency table. Strategies are classified by expanding the level proposed by Pérez Echeverría (1990). Results are compared with those by Estepa (1993) in a similar item and semiotic conflicts are studied.

Keywords: *Contingency table, ordinal data, association strategies judgments, semiotic conflicts.*

Cañadas, G. R., Batanero, C., Estepa, A. y Arteaga, P. (2013). Juicios de asociación en tablas de contingencia con datos ordinales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 209-217). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

A pesar de la utilidad de las tablas de contingencia para presentar información estadística y de ser la asociación un tema prioritario en los cursos de estadística (Zieffler, 2006), se presta poca atención al tema en la investigación didáctica.

Para llenar esta laguna, en trabajos previos hemos estudiado la competencia de estudiantes de psicología en el análisis de tablas 2x2 de variables cualitativas (Cañadas et al., 2011; Cañadas, et al., en prensa). El objetivo del presente estudio es analizar la citada competencia para el caso de una tabla 2x3 con variables ordinales, puesto que cada nivel de medida (nominal, ordinal o cuantitativo) requiere sus propios métodos de análisis estadístico que, a veces, lo estudiantes confunden (Velleman y Wilkinson, 1993). Las estrategias se clasifican, extendiendo los niveles definidos por Pérez-Echeverría (1990) para variables dicotómicas. Se comparan los resultados con los de Estepa (1993) en una tabla del mismo tipo. Nuestra hipótesis inicial es encontrar resultados similares a los descritos por el citado autor.

INVESTIGACIONES PREVIAS

La investigación sobre la asociación en tablas de contingencia se ha concentrado en las tablas de datos nominales 2x2, mostrándose la escasa competencia de adolescentes (Inhelder y Piaget, 1955) y adultos. Entre otras estrategias incorrectas, se utiliza solo una o dos celdas de la tabla (Smedslund, 1963) o estrategias aditivas (Meiser y Hewstone, 2006). Pérez Echevarría (1990) clasificó las estrategias empleadas en los juicios de asociación en tablas 2x2 de datos nominales en 6 niveles de dificultad: Los niveles de 0 a 3 corresponden a utilizar 0 a 3 celdas para llevar a cabo el juicio de asociación. En los niveles 4 y 5, los estudiantes usan todas las celdas; la diferencia es que la comparación entre las celdas es aditiva en el Nivel 4 y multiplicativa en el Nivel 5.

La interpretación de las tablas de contingencia se complica por la existencia de la "correlación ilusoria" (Chapman, 1967, p. 151) o "*informe de una correlación entre dos clases de acontecimientos que, en realidad, (a) no están correlacionados, (b) se correlacionan en menor medida que lo reportado, o (c) se correlacionan en la dirección opuesta a la que se informa*". Batanero, Godino y Estepa (1998) analizaron las estrategias en los juicios de asociación en una muestra de 213 estudiantes de 17 años encontrando las siguientes concepciones incorrectas: concepción causal o confusión entre asociación y causalidad; concepción unidireccional, cuando no se acepta una asociación inversa, y la concepción local, donde se deduce la asociación de sólo una parte de los datos.

Nuestra investigación complementara el estudio citado de Estepa (resumido en Batanero, Godino, Estepa y Green, 1996), y otros previos (Cañadas, et al., 2011; Cañadas, et al., en prensa) sobre tablas 2x2 de datos nominales. Analizamos también los conflicto semióticos, que Godino, Batanero y Font (2007) definen como: *"cualquier disparidad o discordancia entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones)*" (p. 133), en este caso, el profesor y el estudiante.

MÉTODO

La muestra incluyó a 414 estudiantes de primero de psicología de las universidades de Almería (115), Granada (237) y Huelva (62). La tarea propuesta (Figura 1) es una adaptación de otra de Estepa (1993), cambiando los datos para tener mayor asociación (Tau-c de Kendall T=0,64, frente a T=0,32), sin variar el contexto.

La siguiente tabla nos indica el número de estudiantes que aprobaron o suspendieron un examen teniendo en cuenta el tiempo que cada estudiante dedicó a prepararlo

	Menos de 5 h	Entre 5 y 10 h	Más de 10 h	Total
Suspensos	20	7	2	29
Aprobados	5	15	51	71
Total	25	22	53	100

a. Utilizando estos datos razona si aprobar o suspender el examen tiene relación con el tiempo dedicado a prepararlo.
b. Indica cómo has usado los números de la tabla, para llegar a tu conclusión.
c. Asigna una puntuación entre 0 (mínimo) y 1 (máximo) según la intensidad de esta relación, marcando una cruz en el punto de esta escala que creas adecuado:

0 0.5 1

Figura 1. Tarea propuesta

Los estudiantes no habían estudiado asociación, aunque tenían conocimientos básicos de estadística. Por tanto, sus posibles errores son intuitivos y no achacables a la enseñanza. En la parte (a), los estudiantes proporcionan un juicio asociación y en la (c) dan una estimación del coeficiente de asociación. Un análisis cualitativo del razonamiento en el punto (b) identifica las estrategias utilizadas, que fueron revisadas por dos miembros del equipo, para aumentar la fiabilidad, discutiéndose la clasificación con otros miembros en caso de desacuerdo.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Juicios de asociación y estimación de la asociación

En la Tabla 1 se presenta el porcentaje de estudiantes que da un juicio positivo de asociación y el valor medio estimado del coeficiente de asociación. La mayoría de los estudiantes indican asociación, siendo consistentes con la estimación del coeficiente, que en promedio sobreestima el verdadero valor; lo que puede explicarse por la correlación ilusoria (Chapman, 1967). La sobre estimación es bastante mayor que la obtenida en las tablas de datos nominales en Cañadas et al. (en prensa), salvo en el caso de independencia perfecta. Pensamos ello indica la mayor dificultad de los juicios de asociación con datos ordinales. Batanero et al. (1996) no estudian la estimación del coeficiente de asociación.

Tabla 1. Resultados en juicios de asociación y estimación

	Almeria (n=115)	Granada (n=237)	Huelva (n=62)	Total (n=414)
Número (y porcentaje) de estudiantes que consideran que hay asociación	110 (95,7)	235 (99,2)	57 (91,9)	402 (97,1)
Valor medio estimado para el coeficiente de asociación	0,84	0,81	0,81	0,82

Niveles de estrategias

Las estrategias de los estudiantes fueron clasificadas en correctas, parcialmente correctas (que produce respuestas correctas sólo en tablas específicas) e incorrectas. Esta clasificación se cruzó con los niveles de Pérez Echeverría (1990), extendidos para tablas 2x3, en la forma siguiente:

- *Nivel 0.* No se usan los datos de la tabla. Todas son incorrectas. Dentro de ellas hemos encontrado cuatro alumnos que se basas en las teorías previas, mostrándola correlación ilusoria (Chapman y Chapman, 1967). Otros cuatro no especifican con claridad el procedimiento.

- *Nivel 1.*Se utiliza una sola celda. Son todas incorrectas. Siete de estos alumnos usan la celda de mayor frecuencia: *"100 personas →51 aprobaron con más de 10 horas de estudio"* (E48), mientras otro usa la de menor frecuencia *"Si, ya que según la tabla a más de 10 h de estudio menos probabilidad de suspender; solo2 de 53".* (E60).

- Nivel 2. En este nivel 119 estudiantes utilizaron una sola distribución condicional. La estrategia fue parcialmente correcta en 93 de ellos, que se basan en el crecimiento de la distribución condicional: *"He observado los datos de la tabla y según más horas se les dedique de estudio existe un mayor número de aprobados"* (E14); no es correcta, pues podría haber el mismo crecimiento en la distribución condicional de suspensos, aunque funciona en esta tabla. El resto de estrategias son incorrectas: Ocho estudiantes comparan la primera y última celda de esta distribución: "*Solo 5 personas de 100 aprobaron estudiando menos de 5 horas frente a las 51 personas de 100 que aprobaron estudiando más de 10 horas*" (E1); 14 comparan las celdas de frecuencia máxima y mínima (Batanero et al., 1996): "*He buscado el número mayor y se corresponde a 51 (Más de 10 horas-aprobados) y el más bajo 2 (más de 10 horas-suspensos)"* (E11); y cuatro utilizan otros procedimientos: "*He concluido que si los estudiantes suspensos se pasan de la mitad de su total es que si tiene relación*" (E163).

- *Nivel* 3: Usan una distribución condicional y alguna otra celda, pero no todas. De ellas 48 son parcialmente correctas. Se trata de alumnos que comparan dos distribuciones condicionales por columnas, ignorando la tercera; es decir, intentan transformar su tabla 2x3 en otra 2x2. No es correcta porque la comparación con la distribución restante podría hacer variar el resultado aunque funciona en esta tabla: *"He llegado a esa conclusión porque cuando se le dedica menos tiempo al estudio hay mayor número de suspensos y cuando le dedicas mayor tiempo hay el triple de aprobados."* (E67). Otro estudiante usa una estrategia incorrecta, pues intenta calcular la probabilidad condicionada, pero no es capaz de determinar los casos favorables y posibles: *"A = aprobar/; D => 10h;P(A/D) = 71/53"* (E160). Hacemos notar que en las estrategias de los niveles 1 a 3 los estudiantes usan sólo parte de los datos, mostrando una concepción local (Batanero et al., 1996).

- En el Nivel 4 los estudiantes usan todas las celdas con comparaciones aditivas. De ellos 153 son parcialmente correctas, pues comparan las dos distribuciones condicionales por fila en forma aditiva: "*Si tiene relación, se aprueba cuantas + horas se estudia y viceversa*" (E3). Aparecen dos estrategias incorrectas: dos estudiantes comparan todas las frecuencias absolutas dobles entre sí: "*Tras el estudio a 100 personas (71 aprobados y 29 suspensos en total) se ha demostrado que hay más personas aprobadas por haberle dedicado más horas de estudio, por lo tanto existe una relación directa entre estudiar durante más tiempo y aprobar*" (E233); y tres comparan los totales de las distribuciones condicionadas: *"Si el total de los sujetos son 100, 71 de los mismos han aprobado y en cambio 29 han suspendido"* (E35).

"menos de 5 h
5/25=0,2 20% aprueban
20/25=0,8 80% suspenden
entre 5 y 10 h
15/22=0,68 68% aprueban
7/22=0,31 31% suspenden
Más de 10 h
51/53=0,96 96% aprueban
2/53=0,03 3% suspenden
En la gráfica se observa claramente como a medida que aumenta las horas de estudio aumenta al número de aprobados" (E30).

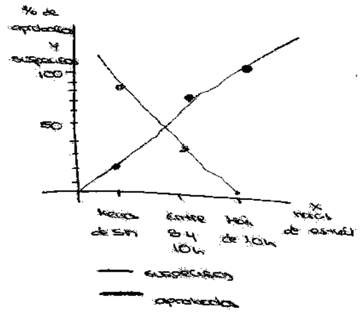


Figura 2. Estrategia de Nivel 5 basada en la representación gráfica

- *Nivel 5*: comparaciones multiplicativas de todas las celdas. Aparecen dos estrategias correctas: 24 estudiantes comparan todas las distribuciones de frecuencias relativas condicionales de una variable: "*Tiene relación ya que 20/29 suspensos dedicaron menos de 5 horas, mientras que 51/71 aprobados le dedicaron más de 10 horas*" (E29); y otros comparan las posibilidades a favor y en contra de *B* en cada valor de *A:* "*Los que han estudiado más de diez horas han aprobado en mayor cantidad. Los que han estudiado entre 5 y 10 horas han aprobado 2/3 y suspendido 1/3. En cambio, los que estudiaran menos de 5 horas han suspendido 3/4 de los aprobados*" (E313). Un estudiante compara gráficamente las distribuciones (Figura 2); consideramos la estrategia parcialmente correcta porque sólo estudia el crecimiento en una de ellas. El resto de estrategias son incorrectas: doce estudiantes comparan las frecuencias dobles relativas entre sí o con el número total de observaciones: "*Calculando los porcentajes de aprobados y suspensos sobre el total*" (E111). Otros tres realizan otros procedimientos incorrectos por ejemplo Figura 3 realiza cálculos con las distribuciones condicionales de suspensos y aprobados, sin llegar a ninguna conclusión.
-

Tabla de frecuencia (aprobados)

X	*F*	p_i	*F*	P_i
-5h	*5*	*0,07*	*5*	*7*
5-10h	*15*	*0,21*	*20*	*21*
+10h	*51*	*0,72*	*71*	*72*
	N=71	*1*		*100%*

Tabla de frecuencia (suspensos)

X	*F*	p_i	*F*	P_i
-5h	*20*	*0,68*	*20*	*68*
5-10h	*7*	*0,24*	*27*	*24*
+10h	*2*	*0,07*	*29*	*7*
	N=29	*1*		*99%*

Figura 3. Ejemplo de estrategia incorrecta de nivel 5 del E87

En la Tabla 2 se presenta la frecuencia de las respuestas en la clasificación anterior. Sólo 27 estudiantes (6,5%) utilizan estrategias correctas, aunque el 72,7% son parcialmente correctas. Los estudiantes tienden a utilizar los niveles 2 ó 4, en los cuales ninguna estrategia es correcta. Además, algo menos del 50% de estudiantes no utilizaron toda la información de las celdas, ya que sus estrategias son de nivel 3 o inferior, mostrando la concepción local (Estepa, 1993).

Tabla 2. Frecuencias (y porcentajes) de estrategias por niveles

	Incorrecta	P. correcta	Correcta	Total
Nivel 0	8 (13)			8 (2)
Nivel 1	8 (13)			8 (2)
Nivel 2	26 (40)	93 (31)		119 (29)
Nivel 3	1 (2)	48 (16)		49 (12)
Nivel 4	6 (10)	153 (49)		159 (38)
Nivel 5	15 (24)	7 (2)	27 (100)	49 (12)
No responde				22 (5)
Total	64	301	27	414

Aproximadamente la mitad de los estudiantes usan todos los datos (nivel 4 y 5), pero 38% utiliza las cuatro celdas con comparaciones aditivas, una estrategia descrita por Inhelder y Piaget (1955), y Batanero et al. (1996). Finalmente, la mayoría de estrategias de nivel 5 son correctas ya sea comparando los odds ratios o las distribuciones condicionales.

La precisión en la estimación del coeficiente de asociación aumenta con la corrección de la estrategia; pues se estudió mediante ANOVA las diferencias de error de estimación en estrategias correctas, parcialmente incorrectas e incorrectas, encontrando un valor estadísticamente significativo (p=0,001); y un valor moderado del coeficiente de asociación C=0,37.

Conflictos semióticos

Como se ha indicado, en nuestro marco teórico el conflicto semiótico es menos exigente que el de concepción, pues no se requiere estabilidad, sino simplemente una interpretación errónea por parte del estudiante. En lo que sigue tratamos de explicar la fuerte presencia de estrategias incorrectas y parcialmente correctas en términos de conflictos semióticos, interpretando como tales, algunas concepciones descritas por Estepa (1993), ya que no hemos probado su estabilidad en los estudiantes.

Propiedades incorrectas atribuidas a la asociación:

- *Confundir causalidad con asociación.* Aparece en estrategias de nivel 0 al igual que en Estepa (1993) quien lo denomina concepción causal de la asociación.
- *Suponer que la asociación se deduce sólo de una parte de los datos.* Implica la existencia de la *concepción local* sobre la asociación (Estepa, 1993).
- *Suponer que la asociación se deduce de comparaciones aditivas.* Descrito también por Piaget e Inhelder (1951) en la comparación de probabilidades, aparece en las estrategias de nivel 4.
- *Esperar un valor elevado en la primera celda de la tabla*; ó suponer que este valor ha de ser mayor a la mitad de la muestra para aceptar la asociación. No hemos encontrado este conflicto en la literatura; aparece en algunas estrategias de nivel 2.

Propiedades incorrectas atribuidas a la independencia:

- *Suponer equiprobabilidad en las celdas de la tabla en caso de independencia.* Aparece en las estrategias de nivel 5 y no lo hemos encontrado descrito. Implica confusión entre independencia y equiprobabilidad.

Confusión de conceptos y propiedades:

- *Confusión de* frecuencia doble y marginal citado por Estepa (1993) y que aparece en algunas estrategias de nivel 4 y 5. Lleva a deducir la asociación a partir de las frecuencias marginales.

- *Confundir razón y frecuencia absoluta*. Relacionado con la confusión entre probabilidad y caso posible, aparece en el nivel 4. Encontrado por Contreras (2011) en el cálculo de probabilidades.
- *Confundir frecuencia con valor de la variable*. Indica incomprensión del concepto de distribución y fue descrita por Carvalho (2001) y Ruiz (2006). En nuestro trabajo lo encontramos en el nivel 4.
- *Calcular la media de las frecuencias*. El estudiante supone que se puede calcular y no comprendiendo el significado de la media, error descrito por Estepa (1993), y Mayén (2009). Aparece en las estrategias de niveles 4 y 5.
- *Confundir variable ordinal y cualitativa.* Implica confusión entre estos tipos de escalas de medida y lo hemos hallado en el nivel 5.
- *Confundir frecuencias dobles y condicionales.* Similar al descrito por Falk (1986) en relación a la probabilidad condicional. Aparece en el nivel 5.
- *Confundir P(B|A) con P(A|B),* es decir, intercambiar los términos de una probabilidad condicional, error descrito por Falk (1996), Díaz (2007) y Contreras (2011); aparece en el nivel 5.
- *Confundir una tabla de contingencia con una tabla de frecuencias.* Los estudiantes la tratan como una sola variable. Por tanto confunden variable doble con variable simple y frecuencia doble con frecuencia marginal. Aparece en el nivel 5.
- *Obtener una probabilidad mayor que 1.*Se llega a este resultado al confundir casos favorables con posibles y además no es consciente de un axioma de la probabilidad. Este error es descrito en Contreras (2011). Aparece en el nivel 3.

Conflictos procedimentales:

- *Basar el juicio de asociación en las teorías previas*. Aparece en el nivel 0. Son los estudiantes que manifiestan la correlación ilusoria descrita por Chapman y Chapman (1967).
- *Comparar muestras de distinto tamaño usando frecuencias absolutas.* Es descrito en Estepa (1993) y se debe a una incomprensión del concepto de distribución. En nuestro estudio se presenta en los niveles 4 y 5.
- *Reducir la tabla 2x3 a una tabla 2x2*. Se aplica incorrectamente una propiedad de las tablas de contingencia rxc, que es la posibilidad de subdividir la tabla de contingencia en subtablas 2x2, basándonos en el teorema de la aditividad. Sin embargo, esta división no se aplica para aplicar procedimientos intuitivos, por ejemplo, basados en la comparación de proporciones (Ato y López, 1996).

DISCUSIÓN Y CONSECUENCIAS DE LA ENSEÑANZA

La mayoría de los estudiantes han sobrevalorado la asociación, debido a la correlación ilusoria ó la falta de familiaridad con datos ordinales.

Las estrategias son mejores que los de Estepa (1993) y Batanero et al. (1996), de cuyos estudiantes sólo el 5,6% llegan a estrategias correctas en este ítem y sólo 31% a estrategias de nivel 4. Deducimos el coeficiente de asociación más fuerte en nuestro ítem influye en la mejor percepción de la asociación.

Asociados a las estrategias incorrectas y parcialmente incorrectas, se ha identificado una amplia lista de conflictos semióticos, algunos descritos anteriormente y otros nuevos. Puesto que un conflicto semiótico no supone en principio una fuerte convicción por parte de los estudiantes, sino más bien una interpretación incorrecta de un concepto, propiedad o procedimiento, es posible corregirlos con una instrucción adecuada. Por ello su identificación es un primer paso para su superación.

Todas estas razones sugieren la necesidad de una mayor investigación sobre la enseñanza de la asociación y sobre la comprensión de los datos ordinales. En este sentido se ha realizado una experiencia de enseñanza de la asociación estadística (Cañadas, 2012), mostrando los resultados de los primeros análisis la mejora de algunos de los conflictos identificados en el estudio; por ejemplo, el paso de los alumnos a estrategias mayoritariamente de nivel 5, la superación de la confusión entre asociación y causalidad y la mejor discriminación entre los diferentes tipos de frecuencia en la tabla de contingencia.

Agradecimientos: Proyecto EDU2010-14947 (MINN_FEDER) y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

Ato, M., y López, J. J. (1996). *Análisis estadístico para datos categóricos*. Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Estepa, A., Godino, J. D., & Green, D. (1996) Intuitive strategies and preconceptions about association in contingency tables. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(2), 151-169.

Batanero, C., Godino, J., y Estepa, A. (1998). La construcción del significado de la asociación mediante actividades de análisis de datos: Reflexiones sobre el papel del ordenador en la enseñanza de la Estadística. En J. R. Pascual (Eds.), *II Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 169-185). Pamplona: Universidad Pública de Navarra.

Cañadas (2012*). Comprensión intuitiva y aprendizaje formal de las tablas de contingencia en alumnos de psicología.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Cañadas, G., Batanero, C., Contreras, J. M., y Arteaga, P. (2011). Estrategias en el estudio de la asociación en tablas de contingencia por estudiantes de psicología. *Educación Matemática, 23*(2), 5-32.

Cañadas, G., Batanero, C., Díaz, y C. Estepa, A. (En prensa). Un estudio de evaluación de la precisión de los estudiantes de psicología en la estimación de la asociación. *Bolema.*

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Chapman, L. J. (1967). Illusory correlation in observational report. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior, 6*(1), 151-155.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Estepa, A. (1993). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics*. (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007) The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Inhelder, B., y Piaget, J. (1955). *De la logique de l´enfant à la logique de l´adolescent.* (From the child's logic to the adolescent's logic). Paris: Presses Universitaires de France.

Mayén, S. (2009). *Comprensión de las medidas de tendencia central por estudiantes mexicanos de Educación Secundaria y Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Meiser, T., & Hewstone, M. (2006). Illusory and spurious correlations: Distinct phenomena or joint outcomes of exemplar-based category learning? *European Journal of Social Psychology, 363*(3), 315-336.

Pérez Echeverría, M. P. (1990). *Psicología del razonamiento probabilístico.* Madrid: Universidad Autónoma.

Piaget, J., e Inhelder, B. (1951). *La génèse de l´idée de hasardchezl´enfant*. Paris: PUF.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Máster. IPN, México.

Smedlund, J. (1963). The concept of correlation in adults. *Scadinavian Journal of Psychology, 4*, 165-174.

Velleman, P. y Wilkinson, L. (1993). Nominal, ordinal, interval and ratio typologies are misleading. *The American Statistician*, *47*(1), 65-72.

Zieffler, A. (2006). *A longitudinal investigation of the development of college students' reasoning about bivariate data during an introductory statistics course.* PhD. University of Minnesota.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE MATEMÁTICAS Y EVALUACIÓN: ASPECTOS AFECTIVOS Y COGNITIVOS[1]

Problem solving of mathematics and assessment: affective and cognitive aspects

Janeth A. Cárdenas L. , Lorenzo J. Blanco N., Rosa Gómez del Amo y Mª del Rocío Álvarez Esteban.

Universidad de Extremadura

Resumen

Asumiendo que la evaluación debe estar integrada en el proceso de enseñanza/ aprendizaje, estamos desarrollando una investigación con profesores de matemáticas de secundaria en Bogotá (Colombia), para analizar sus concepciones y prácticas acerca de la evaluación sobre la resolución de problemas en matemáticas. Partimos de un cuestionario que indaga sobre la importancia que se da a diferentes aspectos cognitivos y afectivos, y al hecho de evaluarlos. Se identifica que en la evaluación de la resolución de problemas se continúa priorizando la evaluación de aspectos del dominio cognitivo, sobre el afectivo. Y en el dominio cognitivo se hace un mayor énfasis sobre los aspectos propios del conocimiento matemático que sobre las estrategias heurísticas.

Palabras clave: *Resolución de problemas, secundaria, evaluación, formación de profesores*

Abstract

Assuming that the evaluation should be integrated into the teaching / learning we are carrying out research with high school mathematics teachers in Bogotá (Colombia), to discuss their conceptions and practices about the assessment of problem solving in mathematics. We start with a questionnaire that asks about the importance given to different cognitive and affective aspects, and if they are evaluated. Is identified in the evaluation of problem solving continues evaluating priority aspects relating to cognitive domain over the affective. And in the cognitive domain is more emphasis on the specific aspects of mathematical knowledge and a lower emphasis on the heuristic strategies.

Key words: *problem solving, secondary, assessment, teacher training*

EVALUACIÓN, CURRÍCULO Y PROFESORADO

Existe una opinión generalizada de que los criterios e instrumentos de evaluación usados en el aula de matemáticas en secundaria son muy tradicionales. Para Goñi (2008), Castro, Martínez y Figueroa (2009), y Cárdenas, Blanco, Gómez y Guerrero (2013), la evaluación está desvinculada del proceso de Enseñanza/Aprendizaje (E/A), en tiempos y espacios. Ello nos sugiere profundizar en las concepciones y prácticas del profesorado de Matemáticas sobre la evaluación, para comprender las causas de este inmovilismo.

Pretendemos profundizar en las relaciones entre el currículo, las concepciones y la práctica docente sobre la evaluación de la resolución de problemas matemáticos (RPM). El currículo, como fuente de organización, da indicaciones precisas de lo que los alumnos deben conseguir en diferentes

[1] Trabajo desarrollado al amparo del Proyecto de Investigación "Resolución de Problemas de Matemáticas en la formación inicial del profesorado de primaria y secundaria: Diseño, aplicación y evaluación de un programa de intervención cognitiva y emocional" (EDU2010-18350), aprobado por el MICINN.

Cárdenas, J. A., Blanco, L. J., Gómez del Amo, R. y Álvarez, M. R. (2013). Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 219-228). Bilbao: SEIEM

momentos escolares (Goñi, 2008). Pero, implícita o explícitamente, el profesor selecciona los elementos del currículo y decide cómo desarrollarlos para favorecer el aprendizaje de sus alumnos.

En la evaluación, el profesor selecciona, consciente o inconscientemente, los criterios e instrumentos que le permiten identificar los resultados del proceso de E/A y el conocimiento de los alumnos. Diferentes trabajos muestran que los elije desde su experiencia siguiendo marcos de referencia generales, asumiendo creencias de las instituciones en las que se ha formado o imitando el ejemplo de otros (Goñi, 2011).

En la evaluación se reflejan las concepciones del profesor sobre el conocimiento matemático escolar, lo que él considera importante, la adecuación que hace a la diversidad de alumnos, su visión de la evaluación o el papel que esta juega en el proceso de E/A (Castro et al., 2009). Analizarla nos ayudará a identificar concepciones, creencias y conocimientos del profesor (Prieto y Contreras, 2008; Brown y Remesal, 2012).

El profesor, con la evaluación, dota de importancia al contenido e indica los elementos relevantes del proceso de E/A (Goñi, 2011). El docente hace un mayor hincapié en el contenido que evalúa, y aunque las fuentes que emplea para la evaluación son diversas, se produce una repetición de los métodos tradicionales que vivieron como alumnos en secundaria y en la universidad.

De manera implícita, la evaluación determina el qué, el cómo y el cuándo los alumnos estudian/aprenden, ya que ellos adaptan su manera de estudiar a la forma en que serán evaluados (Harlen, 2012). "Los alumnos consideran importantes los aspectos de la instrucción que los profesores enfatizan y evalúan regularmente" (Lester y Kroll, 1991, p. 277), lo que hace que desplacen su atención y esfuerzo hacia aquellos aspectos que son objeto de evaluación.

¿Qué evaluar de la Resolución de Problema de Matemáticas?

En el XII Simposio de la SEIEM, se resalto la importancia de la resolución de problemas (RP) en las propuestas curriculares. Para Puig (2008) la presencia en primer plano de la RP se acompañó de una tensión mal resuelta entre la doble consideración de la RP como contenido y como metodología, que resultó en detrimento de su tratamiento como contenido y diluyó su presencia en la práctica. Se reconoció que los intentos realizados para enseñar a los alumnos estrategias generales de RP no han tenido éxito. En parte podría explicarse por la ausencia de atención al aprendizaje de estrategias heurísticas para la RPM en los libros de texto (Schoenfeld, 2007).

Hemos analizado el currículo colombiano de matemáticas para comprender el significado que le dan a la RP como contenido y señalar las indicaciones relativas a favorecer el aprender a resolver problemas. Para ello, dividimos el texto en unidades de análisis (UA), que son palabras o frases que tienen significado en relación a los objetivos que se pretenden. Luego, agrupamos aquellas con un significado semejante, para establecer categorías de análisis (CA) y definir sus ideas principales como referencias en la investigación.

Así, hemos encontrado UA en las que se indican que los alumnos planteen y formulen problemas: "Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas…" (MEN, 2006, p. 84). La expresión "Resuelvo y formulo problemas" se repite frecuentemente.

El currículo indica los pasos que el alumno debe practicar y asimilar para lograr la capacidad de resolver problemas de Matemáticas, cita expresamente el modelo de G. Polya, y lo recuerda de manera global:

> Este proceso involucra diferentes tipos de decisiones…, la comprensión de la relación entre el contexto del problema y el cálculo necesario…, una conciencia de que existen varias estrategias… y una inclinación a escoger una estrategia eficiente… un instinto para revisar reflexivamente la respuesta y confrontarla, tanto

> para verificar que el cálculo esté correcto, como para ver su relevancia en el contexto del problema. (MEN, 1999, p.36).

También encontramos referencias al dominio afectivo, al uso de las TIC, a la importancia de contextualizar las situaciones planteadas o a la relación con la competencia lingüística.

El NCTM en 1991, ya hablaba de la evaluación en la RPM al recordar:

> La evaluación debe determinar la capacidad que tenga el alumno para realizar todos los aspectos de la resolución de problemas. Para determinar si son capaces de formular problemas es esencial contar con los datos sobre su capacidad de hacer preguntas, utilizar una información sobre el uso que hacen los estudiantes de estrategias y técnicas de resolución de problemas y de la capacidad que tengan para comprobar e interpretar resultados (NCTM, 1991, p.216).

Y más recientemente, Santos (2007) y Gairín, Muñoz y Oller (2012) señalan que es importante diseñar actividades que permitan evaluar los diferentes aspectos en el modelo general de la RP.

El currículo colombiano indica que al evaluar el aprendizaje de la RP se debe considerar el dominio del conocimiento, las estrategias cognoscitivas, las estrategias metacognitivas y el sistema de creencias, al citar a A. Schoenfeld. Además señala que:

> Se debe evaluar… al estudiante… su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, para analizar, crear y resolver problemas… Lo anterior incluye…: Las concepciones de los alumnos sobre los conceptos… El estado de conceptualización alcanzado frente a los saberes formales. Las formas de comunicación de concepciones y conceptos. La capacidad para aplicar los conocimientos. La capacidad para interpretar, plantear y resolver problemas… (MEN, 1999, p.85)

La escasa consideración de estos factores en la evaluación puede estar en el resultado de la investigación de Hidalgo, Maroto, Ortega y Palacios (2013), cuando señalan que “los alumnos, independientemente de la edad, tienden a aprenderse de memoria los problemas de matemáticas hechos en clase como estrategia metacognitiva” (p. 230).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En nuestro trabajo buscamos describir el estado de la evaluación de la RPM en las aulas de secundaria y bachillerato, a partir de las opiniones de los docentes sobre lo que hacen y piensan de la evaluación de la RP. Para ello nos planteamos, entre otros objetivos:

- Conocer qué aspectos de los que el currículo señala acerca de la RPM tienen en cuenta los profesores al evaluar.
- Determinar la importancia que los profesores otorgan a los diferentes aspectos que el currículo señala acerca de la RPM.
- Identificar si existe algún tipo de relación estadística que pueda describir la coherencia entre lo que los profesores manifiestan que piensan y hacen sobre la evaluación de los aspectos de la RP que señala el currículo.

METODOLOGÍA

A partir del análisis del currículo de Colombia, hemos construido y validado un cuestionario que trata sobre la evaluación de la RP y que consta de tres bloques; aquí nos referiremos a dos de ellos:

i. Indaga qué aspectos se evalúan a los alumnos, al evaluar la RPM. El profesor indica si evalúa o no los aspectos que se enuncian en la columna central. Luego indica el nivel de importancia que otorga a ese aspecto en relación a la evaluación de la RP, sin tener en cuenta si lo evalúa o no, bajo una escala tipo Likert (0 es no importa, 1 es importa poco y 4 importa mucho).

¿Evalúo?			Nivel de Importancia				
			Nada	Poco			Mucho
Si	No	El usar estrategias o métodos diferentes a los que se han trabajado en clase para la resolución de problemas.	0	1	2	3	4
Si	No	El implementar recursos apropiados en la resolución de problemas.	0	1	2	3	4
Si	No	El hacer cálculos de rutina para la solución de problemas.	0	1	2	3	4
Si	No	El aplicar métodos matemáticos trabajados en clase en la resolución de problemas.	0	1	2	3	4

Figura 1. Ejemplo de preguntas del bloque 1

ii. Indaga por los aspectos que el profesor emplea en la planificación y en los resultados de la evaluación de la RP. Señala si tiene en cuenta o no los aspectos que se enuncian en la columna de la izquierda, y luego indica su nivel de acuerdo con tener en cuenta estos aspectos independientemente de si lo tiene en cuenta o no.

4. En la evaluación de la resolución de problemas propongo a mis alumnos

	¿propongo?		Nivel de Acuerdo				
			Nada	Poco			Mucho
Inventar o diseñar problemas	Si	No	0	1	2	3	4
Formular problemas a partir de una situación dada	Si	No	0	1	2	3	4
Reformular o plantear el mismo problema en otras palabras	Si	No	0	1	2	3	4
Transformar o cambiar el problema a partir del problema dado	Si	No	0	1	2	3	4

Figura 2. Ejemplo de preguntas del bloque 2

Con las preguntas ¿evalúa? ¿tiene en cuenta? se recoge información sobre lo que los profesores manifiestan que "hacen", y con el nivel de importancia/acuerdo se recoge información sobre lo que los profesores manifiestan que "piensan" de la evaluación de la RP.

En la Figura 3 se presentan los ítems agrupados en CA empleados para el análisis de los resultados, agrupados por CA. Las CA son: aspectos del dominio cognitivo/conceptual; aspectos del dominio cognitivo/heurísticos; aspectos del dominio afectivo; y características de las actividades en la evaluación.

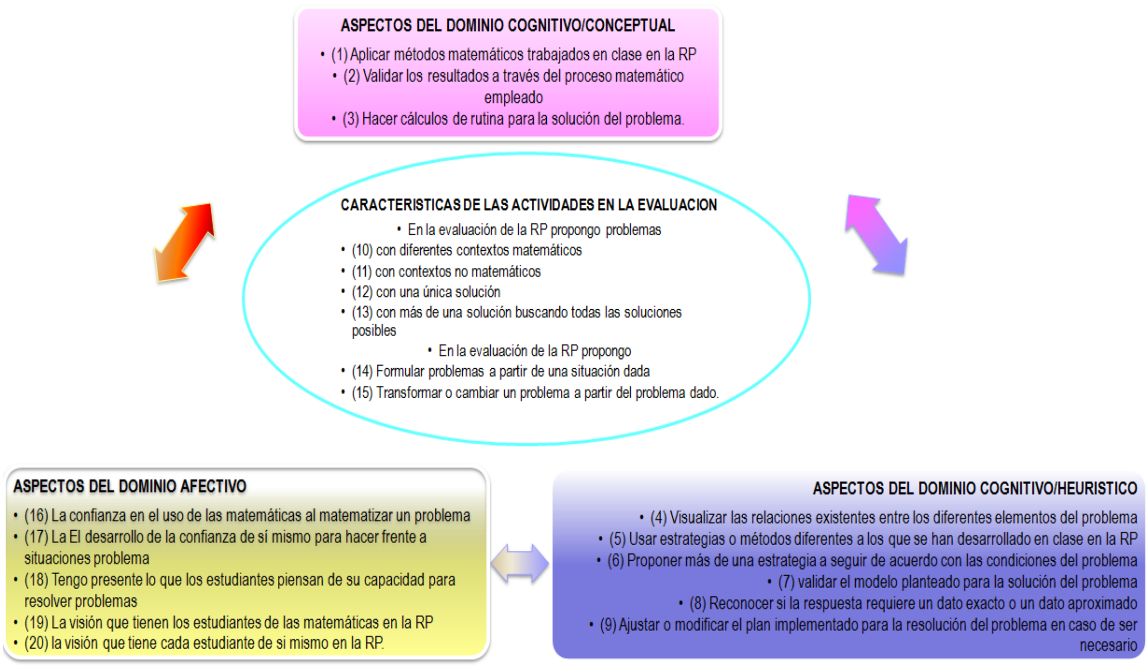


Figura 3. Ítems analizados por categoría de análisis

La población es de 211 profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato de los colegios públicos de Bogotá, seleccionados de manera aleatoria.

Analizamos la relación de dependencia entre las manifestaciones de los docentes sobre lo que "hacen" y lo que "piensan", a partir de su distribución conjunta en tablas de contingencia. En estas tablas, ubicamos en las columnas la variable "hacen" y en las filas la variable "piensan". Esta variable incluye los valores de 1, 2 (nivel bajo) y 3, 4 (nivel alto).

A partir de las tablas de contingencia, hacemos un análisis descriptivo de datos. Luego, determinamos la existencia de asociación estadística significativa entre las variables "hacen" y "piensan" a través del contraste de las pruebas Chi-cuadrado, Chi-cuadrado con la corrección de Yates y del estadístico exacto de Fisher sobre las tablas de contingencia. Las hipótesis son:

- H_0: El nivel de importancia que se da es independiente de si se evalúa o no;
- H_1: El nivel de importancia que se da depende de si se evalúa o no.

Se acepta H_1 si el p-valor < 0,05. En dicho caso determinamos la intensidad de la asociación a partir del estadístico Phi.

RESULTADOS

a. Análisis descriptivo.

Hay una fuerte tendencia a manifestar que sí se evalúan y tienen en cuenta los diferentes aspectos que el currículo propone sobre la RP. También a otorgar un alto nivel de importancia, o de estar muy de acuerdo con tener en cuenta los aspectos que plantea el currículo sobre la RP en su evaluación.

Como se puede ver en las Figuras 4 y 5, más del 50% de los docentes manifiesta que sí evalúan (o tienen en cuenta y otorgan alto nivel de importancia) los aspectos referidos en cada ítem. Además, se visualiza una mayor tendencia a evaluar y tener en cuenta aspectos que están directamente ligados a conceptos y procesos matemáticos, sobre los aspectos propios de la RP y los que tienen que ver con el dominio afectivo.

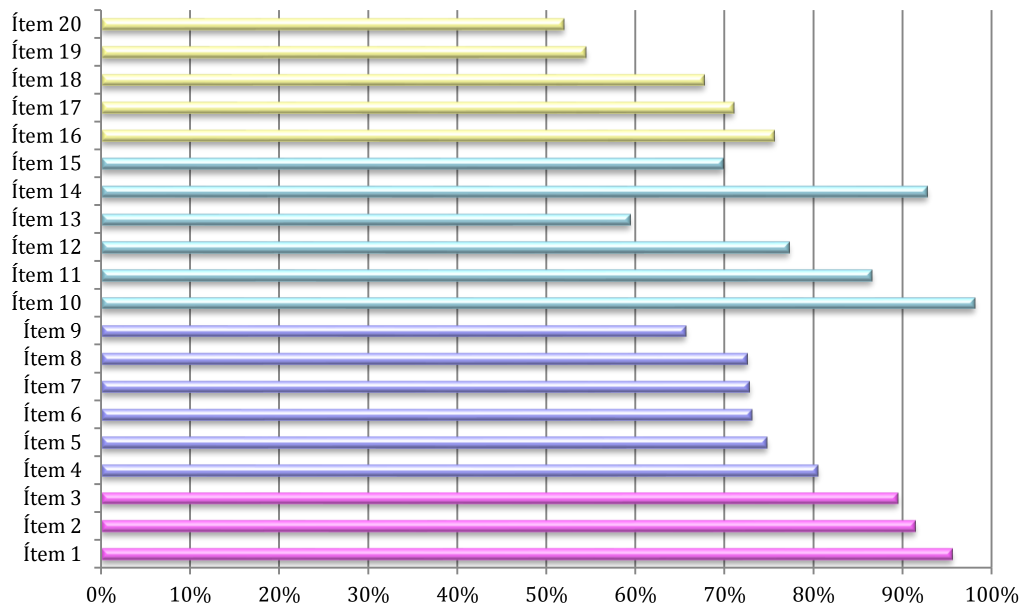


Figura 4. Docentes que afirman que si "hacen" por ítem

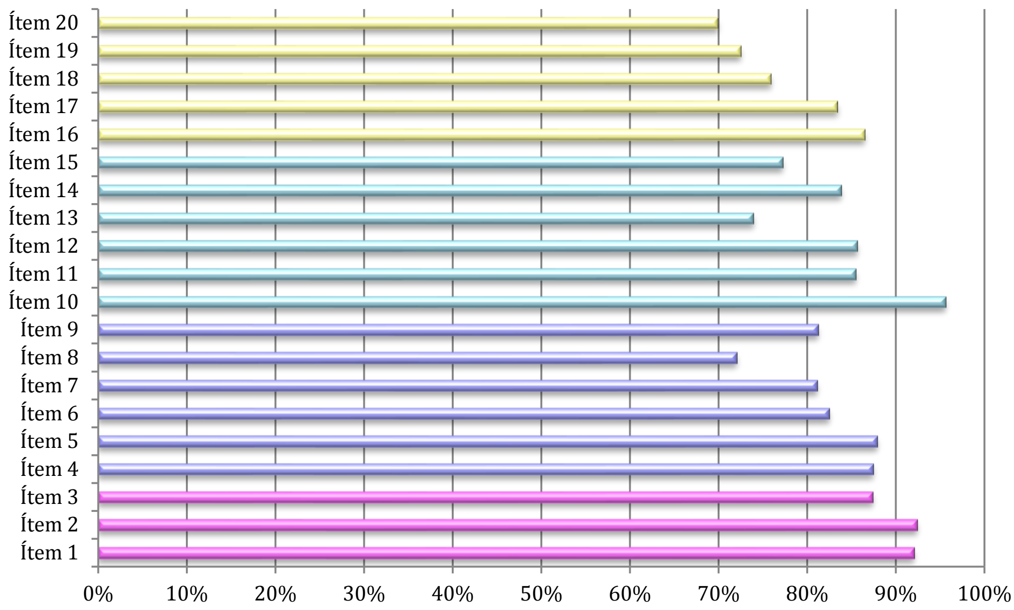


Figura 5. Docentes que otorgan un alto nivel de importancia (o de acuerdo) con evaluar (o tener en cuenta) cada ítem

Los ítems del 1 al 3 refieren a aspectos ligados a contenidos matemáticos (cognitivo/conceptual) y son de los aspectos que un mayor porcentaje de docentes manifiesta evaluar, entre un 89% y un 95%. Los ítems del 4 al 9 refieren a aspectos propios de la RP sin vinculación directa con algún contenido matemático (cognitivo/heurísticos); el porcentaje de docentes que manifiesta evaluarlos es de un 65% a un 80%. Los ítems del 16 al 20 abordan aspectos del dominio afectivo, y solo afirman evaluarlo del 51% al 70% de los docentes.

Los ítems del 10 al 15 permiten tener una idea del tipo de actividad que se plantea al evaluar la RP. Los porcentajes más altos se presentan al plantear problemas con contextos matemáticos (98.1%) y con una única solución (92.7%). En menor medida, plantean otro tipo de actividades como el formular (77.2%) o el transformar problemas (59.4%).

b. Análisis descriptivo e inferencial de la distribución conjunta.

Se encuentran diferentes relaciones entre las manifestaciones que hacen los docentes sobre lo que “hacen” y “piensan” de la evaluación de la RPM. Evaluar y dar un alto nivel de importancia es lo más frecuente. La Figura 6 muestra los porcentajes de las declaraciones hechas por los docentes para cada uno de los ítems.

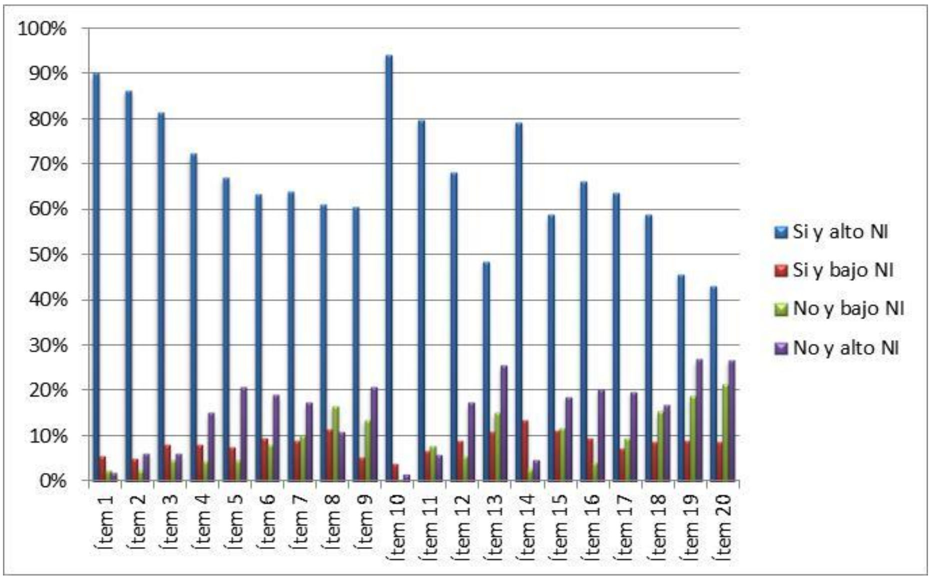


Figura 6. Afirmaciones hechas al indicar si evalúa o tiene en cuenta (si, no) y nivel de importancia o acuerdo (NI).

No todas las manifestaciones que hacen los docentes sobre lo que “hacen” y “piensan” de la evaluación de la RP presentan asociación estadística significativa. Este resultado se obtiene a través de los estadísticos chi-cuadrado, como se puede ver en la Tabla 1.

En los ítems del 1 al 4, del 10 al 12 y el 14, solo tenemos en cuenta el p-valor del estadístico exacto de Fisher, dado que más de un 20% de las casillas de las tablas de contingencia presentan una frecuencia esperada menor a 5. En el resto de ítems usamos el contraste de las tres pruebas.

En la Tabla 1 se observa que los ítems 5 y 16 presentan un p-valor > 0,05 en las tres pruebas. Y en los ítems 4, 12 y 14, a partir del estadístico exacto de Fisher se ve que su p-valor > 0,05. Así, estos ítems no presentan asociación estadística significativa entre las manifestaciones de lo que “hacen” y lo que “piensan” los profesores sobre la evaluación de la RP. Y se acepta que el nivel de importancia que otorgan los docentes a evaluar dichos aspectos es independiente de si lo evalúa o no.

En los otros ítems podemos visualizar que el p-valor < 0,05 en las correspondientes pruebas aplicadas. Por ello, se afirma que existe asociación estadística significativa entre las manifestaciones que hacen los docentes sobre lo que “hacen” y “piensan” de la evaluación de la RP, aunque la intensidad de esta asociación es baja en los ítems 6, 13 y 15, y moderadamente baja en el resto de ítems. La asociación la describimos como: el nivel de importancia que manifiestan los docentes depende de si ha manifestado que evalúa o no dicho aspecto.

Tabla 1. Pruebas de asociación estadística entre las variables "hacen" y "piensan". Y medidas de intensidad de asociación.

	χ^2		χ^2_c		χ^2 de Fisher	ϕ^2		Residuo Tipificado Corregido
Ítem	Valor	p[c]	Valor	P[d]	p[e]	Valor	p	
1	29.306[a]	.000*	22.869	.000*	.000*	.381	.000	5.41
2	12.567[a]	.000*	9.404	.002*	.005*	.253	.000	3.54
3	19.461[a]	.000*	16.516	.000*	.000*	.314	.000	4.41
4	4.882[a]	.027*	3.764	.052*	**.055**			2.21
5	2.170	**.141**	1.495	**.221**	**.208**			1.47
6	7.538	.006*	6.431	.011*	.011*	.194	.006	2.75
7	14.619	.000*	13.073	.000*	.000*	.277	.000	3.82
8	38.058	.000*	35.874	.000*	.000*	.444	.000	6.17
9	28.134	.000*	26.107	.000*	.000*	.383	.000	5.30
10	4.128[a]	.042*	0.639	.424*	**.166**			2.03
11	45.18[a]	.000*	41.245	.000*	.000*	.484	.000	6.72
12	4.271[a]	.039*	2.854	.091*	**.054**			2.07
13	11.659	.001*	10.404	.001*	.001*	.248	.001	3.41
14	4.424[a]	.035*	3.475	.062*	**.053**			2.10
15	8.461	.004*	7.515	.006*	.004*	.210	.004	2.91
16	0.644	**.422**	0.310	**.578**	**.464**			0.80
17	13.814	.000*	12.275	.000*	.000*	.268	.000	3.72
18	28.136	.000*	26.269	.000*	.000*	.380	.000	5.30
19	13.939	.000*	12.722	.000*	.000*	.277	.000	3.73
20	16.406	.000*	15.125	.000*	.000*	.299	.000	4.05

Nota: [a] 1 o más casillas (25%) tienen una frecuencia esperada inferior a 5. [b] Calculado sólo para una tabla de 2x2. [c, d] Significación asintótica bilateral. [e] Significación exacta bilateral. * $p < .05$

Con los residuos tipificados corregidos de estos ítems observamos que se ubican a más de 1,40 Desvíos Estándar respecto del valor crítico ±1,96 esperado por azar con un intervalo de confianza de 0,95. Estadísticamente se considera que no son atribuibles al azar, sino que cabe esperar que, para producirse esta diferencia, es probable que haya operado una decisión al indicar el nivel de importancia, dependiendo de si lo evalúa o no. Consideramos que esto puede ser causa de la reflexión personal sobre sus prácticas de evaluación, o que sus respuestas las diera siguiendo el principio de deseabilidad social.

No obstante, al mirar los datos que se encuentran en las tablas de contingencia de estos ítems, encontramos algunos aspectos que consideramos importante destacar.

- Cuando se hace la comparación entre el porcentaje total de docentes que manifiesta evaluar algún aspecto, con el que manifiesta no hacerlo, hemos encontrado que la concentración de datos se presenta de dos maneras diferentes:

En los ítems del 15 al 17, la concentración de datos se da en: si se evalúa y tiene un alto nivel de importancia, y en no se evalúa ni tiene importancia.

En los ítems 2, 9, 13 y 20, aunque existe la misma relación de asociación estadística, la concentración de los datos se da en no evaluar y dar un alto nivel de importancia. El mayor porcentaje de estos casos se observa en aspectos del dominio afectivo, luego en los aspectos cognitivos/heurísticos, después en el tipo de actividades que se proponen y por último, en los aspectos relacionados con conceptos y contenidos matemáticos. El 59% de los docentes que dicen no evaluar (26,9% de la población total) en el ítem 20 le dan un alto nivel de importancia.

- Cuando comparamos el porcentaje total de docentes que manifiesta otorgar un alto nivel de importancia de evaluar algún aspecto, con los que manifiestan darle un bajo nivel de importancia, encontramos que:

En los ítems 1, 3, 6, 7, 8, 11, 13, 15, 17 y 18 la concentración de los datos se da en bajo nivel de importancia y no se evalúa, y en alto nivel de importancia y se evalúa.

En los otros ítems la concentración de datos se da en bajo nivel de importancia y sí se evalúa, como se ve en el ítem 2, en la Figura 6.

Resaltamos que, entre los ítems en los que no se encuentra una asociación estadística significativa, se hallan otras situaciones llamativas. Por ejemplo, en el ítem 14 entre las manifestaciones de no evaluar un 82% de los docentes otorgan un alto nivel de importancia, que se corresponde con un 20,7%.

CONCLUSIONES

A través del análisis hecho, hemos identificado algunos puntos de interés en nuestro estudio sobre el pensamiento de los docentes de matemáticas en la evaluación de la RP.

1. Se prioriza la evaluación de aspectos que se encuentran ligados de manera directa a contenidos matemáticos, sobre los heurísticos y sobre aspectos del dominio afectivo del estudiante.
2. Cuando los profesores se refieren a la evaluación de los heurísticos y aspectos del dominio afectivo del estudiante, le otorgan un alto nivel de importancia a tenerlos presente en la evaluación; sin embargo la cantidad de docentes que manifiesta tener estos aspectos en cuenta al evaluar es menor.
3. No todas las manifestaciones hechas por los docentes de matemáticas se pueden explicar desde la asociación estadística significativa: "otorgar un alto nivel de importancia (o de acuerdo) a aquellos aspectos que afirman evaluar (o tener en cuenta), y un bajo nivel de importancia (o de acuerdo) a aquello que manifiesta no hacer"

Estos hechos pueden estar asociados a las creencias y concepciones de los profesores sobre la evaluación o sobre la RP, así como las diferentes circunstancias sociales y pedagógicas que lo rodean y lo limitan a realizar cambios en sus prácticas evaluativas. Por lo tanto, consideramos necesario continuar profundizando sobre las prácticas y el pensamiento de los docentes de matemáticas de secundaria, en torno a la evaluación de la RP, con el fin de encontrar indicios y pistas que nos ayuden a generar sugerencias para los programas de formación del profesorado.

Referencias

Brown, G.T.L., & Remesal, A. (2012). Prospective teachers' conceptions of assessment: a cross-cultural comparison. The Spanish Journal of Psychology, 15, 75-89

Cárdenas, J.A., Blanco, L.J., Gómez, R., & Guerrero, E. (2013). Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero & J.A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp. 67-88). Badajoz, España: DEPROFE

Castro, H., Martínez, E., & Figueroa, Y. (2009). Fundamentaciones y orientaciones para la implementación del decreto 1290 del 16 de abril del 2009. Evaluación del aprendizaje y promoción de los estudiantes en los niveles de educación básica y media. Colombia: MEN.

Gairín, J.M., Muñoz, J.M. y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp.261-274). Baeza, España: SEIEM.

Goñi, J.M. (2011). Las finalidades del currículo de matemáticas en secundaria y bachillerato. En J.M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp.9-25). Barcelona: Grao

Goñi, J.M. (2008). La evaluación de las competencias determinará el currículo de matemáticas. Goñi 32-2 ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática. España: GRAO, pp.167-185

Harlen, W. (2012). The role of assessment in developing motivation for learning. En J. Gardner (Ed.), *Assessment and Learning* (pp. 171-183). California: Sage.

Hidalgo, S., Maroto, A., Ortega, T., & Palacios, A. (2013). Influencia del dominio afectivo en el aprendizaje de las matemáticas. En V. Mellado, L.J. Blanco, A.B. Borrachero & J.A. Cárdenas (Eds.), *Las Emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas* (pp.217-242). Badajoz, España: DEPROFE

Lester, K.L., & Kroll, D.L. (1991). Evaluation: a new vision. *Mathematics teacher, 84*(4), 276-284

MEN, (1998). Lineamientos curriculares para matemáticas. Serie lineamientos curriculares. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, Colombia.

MEN, (2006). Estándares curriculares en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional, Bogotá, Colombia.

NCTM (1991). Curriculum Standards for School Mathematics. Reston, VA: NCTM.

Polya, G. (1986). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas. Traducción de Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.

Prieto, M., & Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: Un problema a develar. Estudios Pedagógicos, XXXIV(2), 245-262.

Puig, L. (2008). Resolución de problemas: 30 años después. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, & L.J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 93-111). Badajoz, España: SEIEM.

Santos, M. (2007). La Resolución de Problemas. Fundamentos cognitivos. México: Trillas.

Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970–2008: research and theory, practice and politics. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 39*(5-6), 537-551

CONOCIMIENTO DE GEOMETRÍA ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Specialized Geometry Knowledge for teaching in primary education

Francisco Clemente y Salvador Llinares

Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen

El objetivo de este estudio fue identificar características del conocimiento de geometría especializado en estudiantes para maestro en relación con el razonamiento configural. Los resultados indican la existencia de dos factores claves en el proceso de razonamiento configural en los estudiantes para maestro: la identificación de una sub-configuración relevante, y la manera en la que se organizan las proposiciones geométricas a partir de las aprehensiones discursivas. En particular, y en relación con este segundo factor, se han identificado dos momentos en el uso de las aprehensiones discursivas cuando se asocian hechos geométricos a la configuración inicial y cuando se infiere nueva información al relacionar conocimientos geométricos conocidos con hechos asociados a la configuración geométrica.

Palabras clave: *Conocimiento de geometría para enseñar, conocimiento de geometría especializado, conocimiento del profesor, razonamiento configural*

Abstract

The goal of this study is to identify characteristics of student primary teachers' specialized geometry knowledge for teaching concerning to configural reasoning. Findings indicate that exist two key factors in the student primary teachers' configural reasoning process: the identification of a relevant sub-configuration and the way in which geometrical facts is organized from discursive apprehensions. Specifically, in relation the former factor we have identified two moments in of discursive apprehensions when the geometrical facts are links to the figure and when student primary teachers relate several geometrical facts to infer new information

Keywords: *Geometry knowledge for teaching, specialized geometry knowledge, teacher knowledge, configural reasoning*

CONOCIMIENTO DE GEOMETRIA ESPECIALIZADO PARA LA ENSEÑANZA

La investigación presentada aquí adopta la perspectiva de Duval (1995, 1999) en relación con el aprendizaje de la geometría en el contexto del conocimiento de geometría especializado para la enseñanza-MKT (Ball et al., 2008). En particular, el papel que desempeñan los procesos de visualización en el reconocimiento de propiedades, definiciones y relaciones en las figuras geométricas y en los procesos de justificación. Duval (1995) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras en el aprendizaje y el desarrollo de los procesos de visualizar, justificar y construir en los contextos geométricos. En relación con el papel heurístico de las figuras en la resolución de problemas de geometría, Duval (1995) subraya diferentes tipos de aprehensiones para comprender cómo funciona la visualización en el aprendizaje. En particular, Duval caracteriza la aprehensión operativa como la modificación de una figura para considerar sub-configuraciones.

Clemente, F. y Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación matemática XVII* (pp. 229-236) Bilbao: SEIEM

Esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. Por otra parte, denomina aprehensión discursiva a reconocer en las configuraciones geométricas propiedades y definiciones, o asociar configuraciones o sub-configuraciones con afirmaciones matemáticas. Para Duval, estos dos procesos cognitivos (las aprehensiones operativas y discursivas), pueden ayudarnos a comprender la manera en que la cognición funciona en relación al aprendizaje de la geometría a través de la visualización (Fischbein, 1993).

En particular, el foco de atención sobre la coordinación de las diferentes aprehensiones (operativa y discursiva) en situaciones de resolución de problemas (razonamiento configural) (Torregrosa & Quesada, 2007) ha permitido identificar características de los procesos de justificar en problemas de geometría. En este contexto, conocer las definiciones y las propiedades geométricas no es suficiente para que el estudiante realice la coordinación entre la aprehensión operativa y discursiva, desarrollando el razonamiento configural. Por otra parte, la identificación en la configuración inicial de una sub-configuración puede ser condición necesaria pero no suficiente para desencadenar el razonamiento configural, por lo que el razonamiento configural puede desembocar en una solución mediante un proceso de "truncamiento" que permite generar un proceso deductivo formal, o puede quedar inmerso en un proceso que no proporciona la resolución del problema ("bucle") (Torregrosa, Quesada & Penalva, 2010).

El objetivo de la investigación presentada aquí es identificar características del razonamiento configural en estudiantes para maestro como un aspecto del conocimiento de contenido (geometría) especializado (SCK; Ball et al., 2008) para la enseñanza (MKT). En particular, de qué manera las características de las figuras geométricas estimulan determinadas direcciones en los procesos de pensamiento durante la resolución de problemas de geométrica y cómo se relacionan estas características con las condiciones conceptuales y lógicas de dichos procesos (Fischbein, 1993).

MÉTODO

Participantes y Procedimiento

En esta investigación participaron 45 estudiantes para maestro que cursaban una asignatura de Geometría organizada considerando los procesos de visualización, construcción y prueba (Duval, 1999). El objetivo de la asignatura era que los estudiantes para maestro aprendieran conocimiento de geometría especializado (Ball, Thames & Phelps, 2008) para la enseñanza de la geometría en educación primaria, desarrollando procesos cognitivos de aprehensión discursiva y operativa (Duval, 2007) y el razonamiento configural (Torregrosa et al., 2007, 2010). Algunos de los contenidos de esta asignatura eran las características, propiedades y clasificación de las figuras geométricas (polígonos, cuadriláteros, triángulos).

Instrumentos

Al finalizar el curso, los estudiantes para maestro contestaron a un cuestionario que incluía dos problemas para evaluar el razonamiento configural, y la manera en la que reconocían y asociaban en las figuras propiedades y definiciones de elementos geométricos (figura 1). La resolución implicaba reconocer en las configuraciones geométricas propiedades y definiciones mediante aprehensiones discursivas y generar diferentes organizaciones posibles de las proposiciones (resultados geométricos) para generar nueva información sobre la configuración inicial.

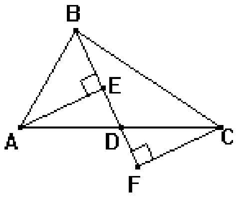
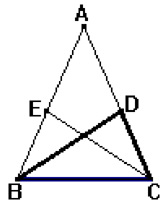
P2	▪ BD es la mediana del triángulo ABC ▪ AE es perpendicular a BF ▪ CF perpendicular a BF Probar que AE es congruente a CF	
P3	Demostrar que en un triángulo isósceles las bisectrices de los ángulos de la base son congruentes	

Figura 1. Problemas de justificar como contexto para el razonamiento configural

En cada una de las figuras iniciales en los dos problemas se pueden identificar varias sub-configuraciones que pueden favorecer la generación de ideas clave para una solución (Mesquita, 1998). Los problemas en este estudio fueron diseñados considerando la existencia de al menos una sub-configuración relevante (figura 2). La característica que diferencia la identificación de las sub-configuraciones en los dos problemas es que la sub-configuración a_{P2} en el problema P2 y la sub-configuración c_{P3} en el problema P3 podía ser considerada parte de la configuración inicial, mientras que las sub-configuraciones a_{P3} y b_{P3} en el problema P3 son dos sub-configuraciones que se solapan en la configuración inicial, y debe realizarse una acción cognitiva (aprehensión operativa) para visualizarlas por separado. Además, en la configuración inicial del problema P3 se introdujo una “pista” perceptiva, resaltando uno de los triángulos que se formaban con una de las bisectrices del triángulo isósceles. De esta manera, el problema P3 permitía poder estudiar la influencia de dicha pista en la identificación de una sub-configuración y en la generación del proceso de razonamiento configural.

Los conocimientos geométricos que podían ser considerados en los procesos de coordinación desencadenados en la resolución de cada problema se recogen en la tabla 1. El conocimiento de geometría en este estudio se refiere a las figuras y descripciones de los conceptos geométricos y propiedades relacionadas con las configuraciones. Consideramos los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

Análisis

Los datos usados en esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes a estos dos problemas. El análisis (Clement, 2000) se desarrolló en tres fases:

Fase 1: Estudio descriptivo de las respuestas (se descompone el discurso textual generado por los estudiantes en unidades de análisis)

Fase 2: Identificación y organización de los hechos y propiedades geométricas usadas en la resolución (el discurso textual de los estudiantes se agrupa en dos momentos del proceso de razonamiento configural)

Fase 3: Identificación de características del razonamiento configural

En la primera fase, el discurso textual generado por los estudiantes fue descompuesto en unidades de análisis para identificar las aprehensiones operativas y discursivas puestas de manifiesto (Torregrosa, et al., 2010). Consideramos como una unidad de análisis las partes del discurso generado (dibujo, asignación de etiquetas o marcas a partes de la configuración y del texto escrito) que podían reflejar la identificación o el uso por parte de los estudiantes para maestro de un hecho (definición) o proposición geométrica.

En la segunda fase, el texto discursivo de los estudiantes fue agrupado en dos momentos del proceso de razonamiento configural generado:

- Visualización: en la que los estudiantes para maestro asocian afirmaciones matemáticas procedentes de los datos del problema a la configuración o a una sub-configuración identificada previamente. Estas aprehensiones discursivas implican reconocer y asociar a la configuración información dada de manera textual en el problema o a reconocer desde la configuración alguna sub-configuración.

- Organización de las proposiciones (afirmaciones matemáticas, entendidas como definiciones, teoremas, corolarios, propiedades geométricas,…) que permitían a los estudiantes determinar en qué medida las afirmaciones matemáticas que habían identificado correspondían a las hipótesis de algún teorema o proposición que era susceptible de ser usada. Es decir, cuando los estudiantes reconocían en las configuraciones geométricas alguna propiedad o resultado previamente conocido que les permitía generar información adicional sobre la configuración geométrica.

En la tercera fase, la identificación de la sub-configuración y las organizaciones de las proposiciones derivadas permitía explicar de qué manera los contenidos geométricos elementales son relacionados y vinculados a configuraciones mediante procesos de visualización y generar procesos deductivos.

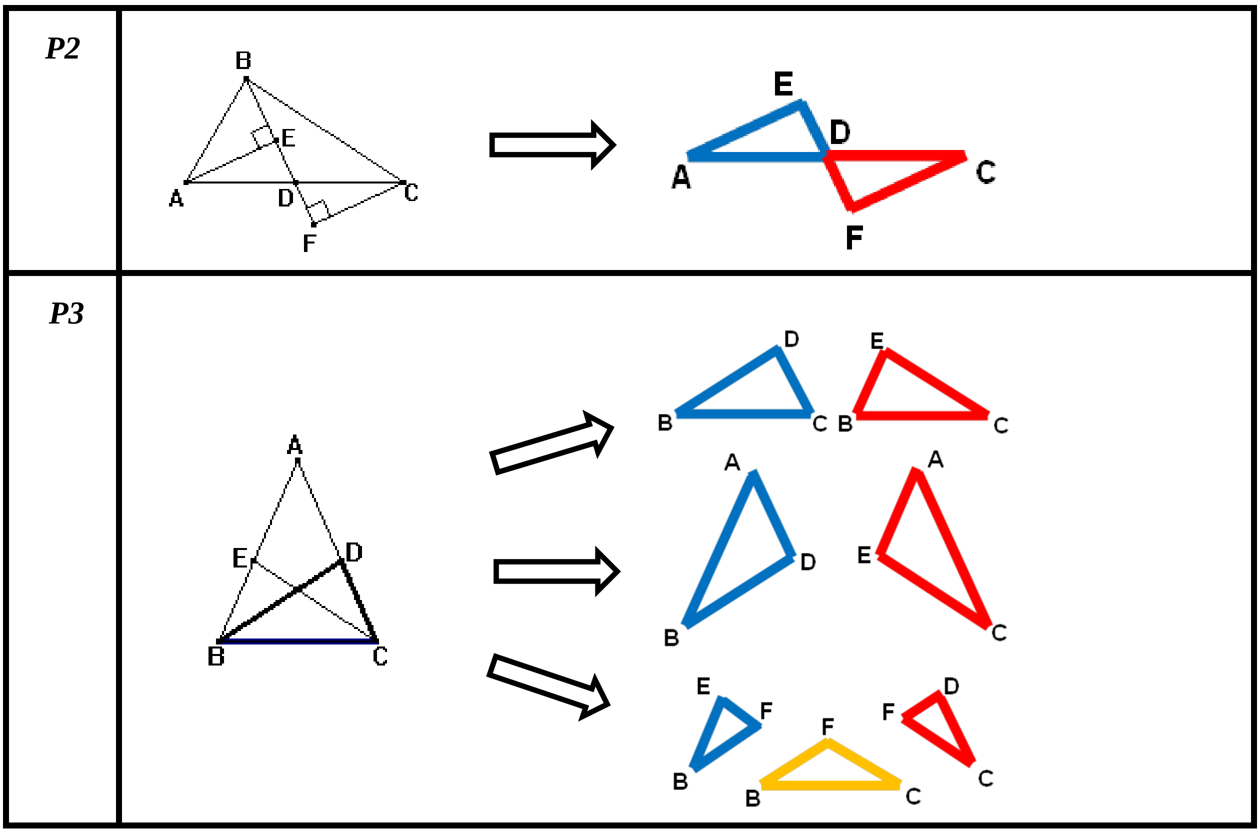


Figura 2. Sub-configuraciones relevantes inicialmente consideradas en el diseño de los problemas del cuestionario

Tabla 1. Definiciones y propiedades susceptibles de ser usadas en la resolución de los problemas

P2	P3
• Definición de mediana de un triángulo • Ángulos opuestos por el vértice son iguales • Si una secante corta a dos rectas paralelas, forma con ellas ángulos alternos-internos iguales (alternos-externos iguales) • Si una recta secante a un haz de dos rectas forma ángulos alternos-externos / alternos-internos iguales, entonces el haz de rectas está formada por rectas paralelas • Si dos rectas forman ángulos rectos con otra tercera son paralelas • La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero) • Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L.	• Definición de bisectriz de un ángulo • Definición de triángulo isósceles • La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º. (Conocidos dos ángulos de un triángulo, conocemos el tercero) • Criterios de congruencia de triángulos: A-L-A, L-A-L, L-L-L.

RESULTADOS

La tabla 2 muestra los resultados relativos al desarrollo de razonamiento configural que llevaba o no a la resolución del problema, considerando si se había identificado alguna sub-configuración relevante. Los dos problemas tuvieron niveles de éxito diferentes. El problema 2 tuvo un nivel de éxito del 55,6 % (25 de un total de 45 estudiantes), mientras que el problema 3 fue del 33,3 % (15 de 45), aunque el porcentaje de identificación de una sub-configuración relevante en los dos problemas es similar (86,7 % para el problema 2 y 84,4 % en el problema 3). Cuando los estudiantes no identificaban alguna sub-configuración no fueron capaces de resolver el problema. Por otra parte, trece estudiantes resolvieron los dos problemas generando razonamientos deductivos desde el truncamiento del razonamiento configural. Es decir, 13 de los 25 estudiantes que resolvieron correctamente el problema 2 también resolvieron el problema 3. Mientras que 13 de los 15 estudiantes que resolvieron el problema 3, también resolvieron el problema 2. Estos datos indican que cuando el estudiante resolvía el problema 3 había una probabilidad alta de que también resolviera el problema 2.

Por otra parte, entre los estudiantes que identificaron la sub-configuración relevante en el problema P2 (39), el 64,1 % (25 de 39) fueron capaces de crear procesos deductivos a partir del razonamiento configural inicialmente generado, mientras que en el problema P3, solo el 39,5 % (15 de 38) de los que habían identificado alguna sub-configuración relevante fueron capaces de generar un proceso deductivo a partir del razonamiento configural.

Tabla 2. Desarrollo del razonamiento configural en relación a la identificación de una sub-configuración relevante

	P2			P3		
	Truncamiento	Bucle	Total	Truncamiento	Bucle	Total
SI identifican sub-configuración relevante	25	14	39 (86,7%)	15	23	38 (84,4%)
NO identifican sub-configuración relevante	0	6	6 (13,3%)	0	7	7 (15,6%)
total	**25 (55,6%)**	**20 (44,4%)**	**45 (100%)**	**15 (33,3%)**	**30 (66,7%)**	**45 (100%)**

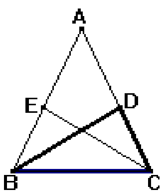
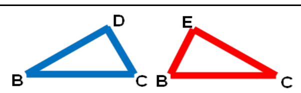
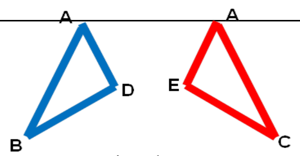
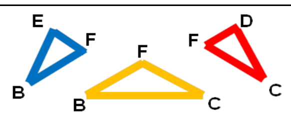
El comportamiento de los estudiantes que generaron un bucle, es decir que identificaron la sub-configuración relevante pero no pudieron generar un proceso deductivo con éxito, fue diferente en los dos problemas (Tabla 3). En el problema 2, de los 39 estudiantes que han identificado la sub-configuración relevante 14 (35,9%) no pudieron generar un proceso deductivo. De estos 14 estudiantes solo 3 de ellos fueron capaces de identificar hechos geométricos en la sub-configuración que podían ser considerados hipótesis de hechos geométricos previamente conocidos pero no pudieron relacionar estos hechos para iniciar un proceso deductivo. Los otros 11 estudiantes no consiguieron identificar hechos en la sub-configuración para aplicar algún resultado previo. En el problema 3, de los 38 estudiantes que han identificado alguna sub-configuración relevante 23 (60,5%) no pudieron generar un proceso deductivo. De estos 23 estudiantes, solo 3 fueron capaces de identificar en la sub-configuración hechos geométricos que podían generar un proceso deductivo, pero no pudieron relacionarlos de manera que les permitiera generar un proceso deductivo (mediante truncamiento del razonamiento configural). Los otros 20 estudiantes no identificaron hechos que podían ser considerados hipótesis de resultados previos (conocimiento previo).

El hecho de que el problema 3 pudiera tener 3 sub-configuraciones relevantes, plantea la cuestión de la relación con el nivel de éxito (generar un proceso deductivo correcto) vinculado a cada una de ellas: 38 estudiantes identificaron alguna de las sub-configuraciones en el problema P3 (tabla 4), pero las tres sub-configuraciones consideradas fueron identificadas de manera diferente. Los datos indican que la sub-configuración a_{P3}, que tenía una pista perceptual en forma de triángulo resaltado, fue identificada con mayor frecuencia (31 de 38) que las otras dos (b_{P3}, y c_{P3}). Sin embargo, la facilidad de reconocimiento de esta sub-configuración no implicaba necesariamente una mayor posibilidad de generar procesos deductivos. En este caso, de los 31 estudiantes que identificaron la sub-configuración a_{P3} solo 9 consiguieron generar procesos deductivos (29%); mientras que los 3 que identificaron la sub-configuración b_{P3}, todos consiguieron generar procesos deductivos (100%); y de los 4 que identificaron la sub-configuración c_{P3}, 3 consiguieron generar procesos deductivos (75%).

Tabla 3. Estudiantes que identificaron una sub-configuración relevante pero generaron un proceso de razonamiento configural en "bucle"

	Identifican hechos geométricos que podían ser considerado hipótesis de resultados previos	No identifican hechos geométricos que podían ser considerados hipótesis de resultados previos	Total
P2	3	11	14 (35,9%)
P3	3	20	23 (60,5%)

Tabla 4. Identificación de las sub-configuraciones relevantes en P3 con truncamiento y bucle

Configuración inicial	Sub-configuraciones relevantes	Identifican la sub-configuración	Truncamiento (generan proceso deductivo)	Bucle
	 Tipo aP3	31 (81,6%)	9	22
	 Tipo bP3	3 (7,9%)	3	0
	 Tipo cP3	4 (10,5%)	3	1
Total		38 (100%)	15	23

DISCUSIÓN Y CONCLUSIÓN

El objetivo de este trabajo era caracterizar los procesos de razonamiento configural en estudiantes para maestros como un dominio del conocimiento de geometría necesario para enseñar. En particular, identificar características de la relación entre el desarrollo de aprehensiones discursivas y las relaciones lógicas entre las afirmaciones geométricas previamente conocidas. Los resultados sugieren dos ideas en relación con la manera en que los estudiantes para maestro generan procesos de razonamiento configural y que ponen de manifiesto la relación entre la visualización y el uso del conocimiento geométrico para inferir información adicional sobre las figuras.

En primer lugar, las *características de la configuración inicial* del problema y el conocimiento geométrico previo que son el punto inicial de los procesos de visualización vinculados a las aprehensiones discursivas y que favorecen la identificación de sub-configuraciones relevantes y el reconocimiento de elementos geométricos (Mesquita, 1998). Los resultados obtenidos apoyan la idea de que la identificación de una sub-configuración relevante no es suficiente para generar un proceso de prueba con éxito, ya que aunque ayuda a desencadenar el razonamiento configural y actúa como etapa previa al razonamiento deductivo no asegura que los estudiantes puedan llegar a organizar los hechos y propiedades geométricas de manera lógica para inferir nueva información (realizar un truncamiento en el razonamiento configural). Por otra parte, el hecho de que la *"pista" perceptual* ayuda a identificar una sub-configuración relevante y a realizar aprehensiones discursivas, no necesariamente conlleva usar conocimiento geométrico previamente conocido para desencadenar nuevas aprehensiones discursivas para inferir información adicional. Este resultado señala la diferencia entre estas dos tipos de aprehensiones discursivas (las que genera los datos del problema y las que se generan a partir de conocimiento de geometría previo que debe ser usado de alguna manera). En este sentido, la identificación de una sub-configuración relevante está vinculada a la posibilidad de reconocer los hechos geométricos y de asociarlos a la sub-configuración, pero sin embargo, nuestros datos indican que había estudiantes que habiendo identificado hechos geométricos en la sub-configuración no eran capaces de relacionarlos con resultados previos para inferir nueva información (generar procesos deductivos). Este resultado está relacionado con la segunda idea a destacar.

Los resultados de esta investigación han mostrado que el desarrollo de un razonamiento deductivo con éxito (el truncamiento en un razonamiento configural), depende de *la manera en la que los estudiantes relacionan (relación lógica) la información generada en las aprehensiones discursivas desencadenadas por el uso de alguna proposición geométrica conocida.* Es decir, las aprehensiones discursivas que permite obtener información adicional mediante un proceso de inferencia a partir de la aplicación de resultados conocidos previamente. En este sentido, nuestros resultados indican que el truncamiento del razonamiento configural para generar procesos deductivos une dos niveles de organización discursiva (Duval, 2007) y que en cierta medida existen condiciones conceptuales y lógicas que controlan el truncamiento del razonamiento configural (Fischbein, 1993). Condiciones conceptual en el sentido de que dependen de los significados de las afirmaciones geométricas (conocimiento) y condiciones lógicas por la naturaleza de las relaciones lógicas que se deben establecer entre estas afirmaciones para generar nueva información sobre la figura (la naturaleza del proceso de deducción). El papel que desempeñan estas dos tipos de condiciones en el truncamiento del razonamiento configural para generar un proceso deductivo necesita ser estudiado.

Tener en cuenta estas dos ideas en el contexto del aprendizaje del conocimiento de geometría especializado para la enseñanza sugiere que lo importante no es la realización de una prueba matemática, sino en la posibilidad de desarrollar hábitos cognitivos vinculados a relacionar hechos asociados a las configuraciones geométricas para generar nueva información. Por ejemplo, los estudiantes para maestro deberían ser capaces de trasladar descripciones a figuras geométricas (aprehensiones discursivas), pero también ser capaces de inferir información sobre la figura a partir de lo que se conoce y este hecho va más allá de los procesos de visualización y de las aprehensiones discursivas iniciales.

Así, el desarrollo de procesos de visualización mediante aprehensiones discursivas y operativas parece ser claves para que los estudiantes para maestro puedan reconocer las propiedades geométricas en las configuraciones, como un aspecto del conocimiento de geometría especializado. Sin embargo, la posibilidad de generar información adicional sobre una configuración geométrica se apoya en relacionar conocimiento geométrico previo con hechos geométricos identificados en la configuración inicial. Pero, la relación que el estudiante pueda establecer entre lo que se conoce y lo que se identifica en la configuración inicial resulta más difícil de generar. Diseñar entornos de aprendizaje para que los estudiantes para maestro puedan desarrollar este tipo de aprehensiones discursivas, como una manera de aprender conocimiento de geometría especializado para la enseñanza, se plantea como una cuestión abierta en estos momentos.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

Ball, D.L.; Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it Special?. *Journal of Teacher Education, 59(*5), 389-407.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical Interviews: Foundations and Model Viability. En a. E. Kelly y R.A. Lesh (Eds.). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education* (pp. 547- 589). Lawrence Erlbaum Pubs: London.

Duval, R. (1995). Geometrical Pictures: Kinds of representation and specific processes. En Sutherland, R. y Mason, J. (eds.). *Exploiting mental imagery with computers in mathematical education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.

Fischbein, E. (1993). The Theory of Figural Concepts. *Educational Studies in Mathematics, 24,* 139-162.

Mesquita, A.L. (1998). On conceptual Obstacles Linked with External Representation in Geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Torregrosa, G.; Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 275-300

Torregrosa, G.; Quesada, H. & Penalva, MC. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 327-340.

DEFINICIONES DE LA PROBABILIDAD Y PROBABILIDAD CONDICIONAL POR FUTUROS PROFESORES

Prospective teachers' definitions of probability and conditional probability

J. Miguel Contreras[1], Carmen Díaz[2], Carmen Batanero[1] y Gustavo R. Cañadas[1]

[1]Universidad de Granada, [2]Universidad de Huelva

Resumen

En este estudio se analizan las definiciones de probabilidad simple y condicional proporcionadas por una muestra de 196 futuros profesores, clasificándolas en función de su corrección y precisión. Se comparan los resultados en dos grupos de profesores, de acuerdo a su formación inicial y con los obtenidos en estudiantes de psicología.

Palabra claves: *futuros profesores, probabilidad simple y condicional, definición.*

Abstract

In this study we analyze the definitions given by a sample of 196 prospective teachers and classify them taking into account its correctness and accuracy. We compare results in two groups of teachers with different background as well as with definitions provided by a sample of psychology students.

Keywords: *prospective teachers, conditional and simple probability, definition.*

INTRODUCCIÓN

Aunque la probabilidad es parte importante del currículo, no es frecuente que los futuros profesores de matemáticas tengan una preparación específica suficiente para llevar a cabo su enseñanza. Aunque muchos futuros profesores de Educación Secundaria tienen una licenciatura en matemáticas, otros provienen de otras licenciaturas o ingenierías y no han hecho un curso de cálculo de probabilidades. Además, ninguno recibe formación específica sobre didáctica de la probabilidad. Ello lleva a algunos profesores, una vez incorporados a la docencia, a reducir o incluso omitir la enseñanza de la probabilidad (Serradó, Azcárate y Cardeñoso, 2006). Es urgente ofrecer una mejor educación previa a estos profesores, si queremos mejorar la enseñanza de la probabilidad, pero ello requiere una evaluación previa de sus necesidades formativas.

La importancia de las definiciones ha sido analizada por Zazkis y Leikin (2008) quienes señalan que la capacidad de dar una definición muestra la comprensión de un concepto y en futuros profesores indica sus preferencias pedagógicas. Las definiciones, determinan también el enfoque de la enseñanza, el conjunto de propiedades y la forma en que se presentará a los estudiantes; por tanto modelan la relación entre esta definición y la imagen del concepto que crean los estudiantes (Vinner, 1991). Leikin y Winicki-Landman (2001) indican que definiciones dan nombre a los conceptos y establecen sus condiciones necesarias y suficientes; deben incluir un número mínimo de tales condiciones y suelen incluir otros conceptos previamente definidos. Desde el punto de vista matemático, definir supone nombrar un objeto que previamente existía; por ello la definición da vida a algo que no existía para el estudiante (Mariotti y Fischbein, 1997).

Contreras, J. M., Díaz, C., Batanero, C. y Cañadas, G. R. (2013). Definiciones de la probabilidad y probabilidad condicional por futuros profesores. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 237-244). Bilbao: SEIEM

Todo ello indica la importancia de que los futuros profesores sean capaces de dar definiciones precisas de conceptos obligatorios en el currículo, como la probabilidad simple y condicional, incluida tanto en la Educación Secundaria Obligatoria (MEC, 2007a), como en el Bachillerato (MEC, 2007b). En este trabajo analizamos esta competencia en una muestra de futuros profesores españoles de Educación Secundaria, comparando con las definiciones proporcionadas por estudiantes de psicología en la investigación de Díaz (2007). En lo que sigue presentamos el marco teórico, antecedentes, método y resultado del estudio.

MARCO TEÓRICO Y ANTECEDENTES

Una extensa investigación describe los componentes del conocimiento de los profesores. Nosostros nos basamos en el modelo de conocimiento matemático para la enseñanza de Hill, Ball, y Schilling (2008), o: “ conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (p. 374).

Dentro del conocimiento del contenido matemático, los autores diferencian: (a) el *conocimiento común del contenido,* puesto en juego para resolver problemas matemáticos por cualquier persona: (b) el *conocimiento especializado del contenido*. Que incluye aspectos que no necesariamente tiene una persona ordinaria, por ejemplo, identificar las ideas matemáticas trabajadas en un problema; y (c) el *conocimiento en el horizonte matemático* que incluye, por ejemplo, conocimiento de la relación con otras materias. Para el conocimiento pedagógico del contenido proponen tres componentes: (a) El *conocimiento del contenido y los estudiantes* o “conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular” (p. 375); (b) el conocimiento del *contenido y la enseñanza,* que resulta de la integración del contenido matemático con el conocimiento de la enseñanza de dicho contenido; y (c) el conocimiento del *contenido y el currículo*.

Este modelo sugiere que los conocimientos matemáticos no son suficientes para enseñar probabilidad de una manera efectiva. En concreto, el conocimiento de las definiciones correctas de los conceptos probabilísticos, que evaluamos en este trabajo forma parte tanto del conocimiento especializado del contenido, como del conocimiento del contenido y la enseñanza.

Antecedentes

Las investigaciones relacionadas con la comprensión de la probabilidad por parte de futuros profesores son escasas y la mayoría se centra en profesores de educación primaria (por ejemplo, Azcárate, 1995, Batanero, Cañizares y Godino, 2005, Estrada y Díaz, 2007). Todos estos estudios coinciden en la necesidad de aumentar la formación de estos profesores.

Respecto a los futuros profesores de educación secundaria, Fernándes y Barros (2005) sugieren las dificultades de 37 docentes para formular sucesos y comprender los sucesos compuestos y Contreras, Díaz, Arteaga, y Cañadas (2012) la extensión de la falacia de la conjunción en 106 futuros profesores. Carter (2008) analizó las respuestas de 210 futuros profesores a un cuestionario, indicando errores en la comprensión de secuencias aleatorias, e indiferencia al efecto del tamaño de la muestra sobre la variabilidad del muestreo. Chernoff (2009) analiza las justificaciones de 19 futuros profesores, que aparentemente tenían una percepción incorrecta de aleatoriedad. Concluye que sus razonamientos podrían ser consistentes con visiones no estándar del espacio muestral del experimento y no serían debidas a falta de razonamiento probabilístico.

El objetivo del presente trabajo es ampliar esta investigación centrándonos en las definiciones, punto que no ha sido estudiado en trabajos previos.

MUESTRA Y TAREA PROPUESTA

En España los futuros profesores de matemáticas de secundaria han de cursar el Máster titulado Formación del Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, en la especialidad de matemáticas (en lo sucesivo Máster de Secundaria). Alrededor del 50% de los que acceden a dicho Máster son Licenciados de Matemáticas, y el resto provienen de otras especialidades. Por otro lado, el 90% de los egresados de la Licenciatura de Matemáticas, realizan el concurso para profesor de matemáticas.

En consecuencia en España los profesores de matemática, son licenciados en Matemáticas o bien egresados del Máster de Secundaria o las dos cosas. Para conseguir una muestra representativa de futuros profesores de secundaria españoles se decidió tomar estos dos tipos de alumnos, de varias universidades. La muestra estuvo formada por196 estudiantes: 95 estudiantes del último curso de la licenciatura de matemáticas (de las Universidades de Granada, La Laguna y Salamanca) y 101 alumnos del Máster de Secundaria (Universidades de Alicante, Barcelona, Cádiz, Extremadura, Granada, Salamanca, Santiago de Compostela, Pública de Navarra y Valladolid).

Los datos se tomaron como parte de una actividad de formación en didáctica de la probabilidad. La tarea, cuya finalidad de la tarea es valorar la comprensión de la probabilidad simple y condicional y la capacidad para definirla se presenta a continuación.

Tarea. Explica con tus propias palabras la diferencia entre una probabilidad simple y una probabilidad condicional.

Consideramos correctas las respuestas donde, o bien la definición es correcta, se pone un ejemplo adecuado, o se indican correctamente las diferencias entre los conceptos o ejemplos. Es decir, se cumplen las mínimas condiciones necesarias y suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001); en los dos últimos supuestos los futuros profesores estarían mostrando su imagen del concepto (Vinner, 1991).

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Los resultados se clasifican ampliando la clasificación de Díaz (2007), quien sólo distingue definiciones correctas, incorrectas e imprecisas:

C0: *Definiciones incorrectas:* La definición no describe adecuadamente el concepto, pues falta alguna condición necesaria (Leikin, Winicki-Landman, 2001) o se confunden conceptos implicados. Hemos encontrado tres tipos:

C0.1. Errores formales. El sujeto incluye el término que desea definir en la definición o da una definición que corresponde a otro concepto. Por ejemplo: *"Como su nombre indica la probabilidad condicionada viene condicionada por otra sentencia. Al variar algo varia otro"*(S123).

C0.2. Errores producidos por confundir conceptos que intervienen en la definición. En el siguiente ejemplo se confunde probabilidad simple y conjunta, confusión observada por Pollatsek, Well, Konold y Hardiman (1987): *"Probabilidad simple trata dos sucesos que no guardan relación directa, por ejemplo la probabilidad que llueva en Santiago y luzca el sol en Buenos Aires. Probabilidad condicional se refiere a que los sucesos están relacionados entre sí"* (S33).

C0.3. Definiciones apoyadas en fórmulas que contienen errores. En el siguiente ejemplo, hay un error en la fórmula de la probabilidad condicional, donde, además de invertir numerador y denominador, se sustituye la intersección por la unión de sucesos, confusión frecuente según Einhorn y Hogarth (1986): "*Probabilidad simple: es cuando intervienen los elementos sin estar* *condicionados a algo. Probabilidad condicional: cuando los elementos esta condicionados a otros, cuando depende de otros:* $P(A/B)=P(A)/P(A\cup B)$" (S162).

C1. Definición imprecisa de la probabilidad condicional. La definición incluye todas sus condiciones necesaria o suficientes (Leikin y Winicki-Landman, 2001) pero es confusa o añade condiciones no necesarias. Hay dos tipos:

C1.1. Asume que el suceso condicionante precede al condicionado. por tanto añade una condición innecesaria, donde subyace, por tanto la falacia del eje de tiempos (Tversky y Kahneman, 1982): *"Probabilidad condicional: ocurrido un suceso la probabilidad de ocurrir los venideros"* (S134).

*C1.2. Suponer un suceso dependiente del otro.*De nuevo se añade una condición no necesaria y podría subyacer la confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986): *"Una probabilidad condicional es una probabilidad de un suceso que depende de otro suceso. Por ejemplo la probabilidad de la segunda extracción de una bola depende de la primera extracción"* (S54).

C2. Define correctamente sólo la probabilidad condicional. Encontramos tres grupos:

C2.1. Olvida definir la probabilidad simple, y define verbalmente la condicional: *"Cuando tratamos de calcular la probabilidad de ocurrencia de un suceso, conociendo una información adicional, hablamos de probabilidad condicionada"* (Sujeto 1).

C2.2. Olvida definir la probabilidad simple, y define la probabilidad condicional con fórmulas. Una respuesta de este tipo sería utilizar la descomposición de la probabilidad condicional como cociente de la probabilidad conjunta y de la condición, dando una definición correcta, pero olvidando dar la definición de probabilidad simple:*"No conozco el termino de probabilidad simple. La probabilidad condicionada de un suceso A condicionado a otro B siendo A y B dos sucesos de un mismo experimento aleatorio se formula:* $P(A/B)=P(A\cap B)/P(B)$" (S6).

C2.3. Error al definir la probabilidad simple. En el siguiente ejemplo se añade la condición de independencia para definir la probabilidad simple: *"Sean A y B dos sucesos posibles donde A y B son independientes si* $P(A\cap B)=P(A)P(B)$*, entonces la probabilidad respecto A y B es simple"* (Sujeto 116).

C3. Define imprecisamente las dos probabilidades pedidas. Es el caso en que aparezcan imprecisiones en las dos definiciones. Hemos encontrado seis grupos; no comentamos los tres primeros pues son similares a otros ya comentados:

C3.1. Suponer que el suceso condicionante tiene que ocurrir antes que el condicionado, ya comentado. La diferencia ahora es que además la definición de la probabilidad simple es imprecisa.

C3.2. Suponer que el suceso condicionante es dependiente del suceso condicionado, ya comentado. La diferencia ahora es que además la definición de la probabilidad simple es imprecisa.

C3.3. Fórmulas imprecisas para definir las probabilidades.

C3.4. Indican la diferencia entre probabilidad simple y compuesta, pero son imprecisas. En la siguiente respuesta se define la diferencia aludiendo a la dependencia, que como hemos visto no es necesaria: *"La probabilidad condicional se diferencia de la simple en que está afectada por un suceso que no es independiente"* (S12).

C3.5. En lugar de dar una definición, da un ejemplo: *"La probabilidad simple, es por ejemplo, la probabilidad de sacar un oros de una baraja española. Una probabilidad condicionada, es por* *ejemplo la probabilidad de sacar un oro de una baraja española condicionada a que la primera carta fue copas"* (S29).

C4. Define correcta y de manera precisa las dos probabilidades. Hemos encontrado dos grupos:

C4.1. Definir ambas probabilidades verbalmente: *"La probabilidad condicionada mide el valor de la probabilidad de un suceso A a partir de información de otro suceso B. Mientras que la probabilidad simple sólo da el valor de la probabilidad de ocurrencia de un suceso sin tener en cuenta otro suceso"* (S64).

C4.2.Usar fórmulas para definir ambas probabilidades. "Probabilidad simple: Es una función $f:\Omega \rightarrow R$ *que a cada suceso le hace corresponder un nº rea, verificando que* $P(A) \geq 0$, $P(A) \leq 1$, $P(A) = \frac{Casos - Favorables}{Casos - Posibles}$

Probabilidad condicionada: Dado un suceso B, cuando queremos saber la ocurrencia de otro suceso A a partir de información del suceso B; $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ *"* (S 22).

En la Tabla 1 presentamos los resultados que muestran la escasa competencia de los participantes en el estudio para dar las dos definiciones en forma correcta (15,9%). Es una proporción muy pequeña tratándose de futuros profesores. En su lugar observamos la alta frecuencia de participantes que asumen la dependencia de sucesos (25,6% en las categorías C1.2 y C3.2) donde pudiera haber confusión entre condicionamiento y causalidad (Falk, 1986). La falacia temporal (Tversky y Kahneman, 1982; Gras y Totohasina, 1995) es también frecuente (19,9%; C1.1 y C3.1). Sumando las categorías anteriores un 45,5% de los participantes presenta errores en la definición al añadir condiciones innecesarias.

Con menor frecuencia, aparecen errores formales (5,6%, C0.1), definiciones imprecisas (14,3%, C3.3, C3.4 y C3.5), errores en fórmulas (1%, C0.3), confusión de conceptos (5%, C0.2 y C2.3), no definir la probabilidad simple (4%, C2.1 y C2.2) o respuestas en blanco (8,7%).

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas en la definición

		Frecuencia	Porcentaje
Errores en las dos definiciones	C0.1. Errores formales	11	5,6
	C0.2. Confunde conceptos	6	3,1
	C0.3. Confunde fórmulas	2	1,0
Definición imprecisa de la probabilidad condicional	C1.1. Falacia temporal	5	2,6
	C1.2. Asume dependencia	1	0,5
Define correctamente sólo la probabilidad condicional	C2.1. Define verbalmente	4	2,0
	C2.2. Define con fórmulas	4	2,0
	C2.3. Error conceptual al definir la p. simple	4	2,0
Definición imprecisa de las dos probabilidades	C3.1. Falacia temporal	34	17,3
	C3.2. Asume dependencia	49	25,0
	C3.3. Fórmulas imprecisas	9	4,6
	C3.4. Indica diferencias en forma imprecisa	10	5,1
	C3.5. No da definición, sino ejemplo	9	4,6
Define correctamente las dos probabilidades	C4.1. Verbalmente	23	11,7
	C4.2. A través de fórmulas	8	4,1
	En blanco	17	8,7

En la Tabla 2 se resumen estas categorías en los cinco tipos principales, comparando los resultados con los de Díaz (2007). Por un lado, constatamos la menor proporción de definiciones correctas en los futuros profesores respecto a los alumnos de Psicología: aunque también dan en mayor porcentaje definiciones incorrectas.

Tabla 2. Resultados en futuros profesores y estudiantes de psicología

	Futuros pr. (n=196)		Psicología (n=414)	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
C0. Errores en las dos definiciones	36	18,3	119	28,7
C1. Define imprecisamente la probabilidad condicional	6	3,1	28	6,8
C2. No define la probabilidad simple	12	6,0	90	21,7
C3. Definición imprecisa de las dos probabilidades	111	56,7	50	12,1
C4. Def.correcta de las dos probabilidades	31	15,9	127	30,7
Total	196	100	414	100

La diferencia se debe a la gran proporción de futuros profesores que da definiciones imprecisas de las dos probabilidades en comparación con los alumnos de psicología. Como hemos visto (Tabla 1), estas imprecisiones se producen al añadir condiciones innecesarias que corresponden a sesgos de razonamiento (falacia temporal o confusión de condicionamiento y condicionalidad) que aparecen en un 42,3% de los participantes y mucho menos en los alumnos de psicología, debido a que estudian estos sesgos en las asignaturas relacionadas con la psicología del razonamiento.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Nuestros resultados sugieren que dar una definición correcta no fue fácil para los participantes en la muestra; esta competencia se relaciona con conocimiento especializado del contenido, como del conocimiento del contenido y la enseñanza en nuestro marco teórico (Hill, Ball, y Schilling, 2008), que es en consecuencia bajo en el caso de la probabilidad para estos profesores. Las definiciones fueron imprecisas al añadir los estudiantes condiciones no necesarias, que reflejan sesgos de razonamiento, que persisten a pesar de la mayor preparación formal (respecto a estudiantes de psicología).

Estos resultados son motivo de preocupación, pues el conocimiento de las definiciones fijadas por los profesores afecta sus decisiones curriculares, la forma en que enseñan los conceptos y sus concepciones sobre la forma en que los estudiantes pueden aprender dicho concepto (Zazkis y Leikin, 2008)

Estamos de acuerdo con Falk(1986) que el lenguaje cotidiano que utilizamos para indicar un problema de probabilidad condicional carece de precisión y por lo tanto es ambiguo. Sin embargo, un futuro profesor debe dominar el concepto y el lenguaje utilizado en la enseñanza. Ello es especialmente importante en el caso de la definición, pues los estudiantes adquirirán los conceptos a través de su definición y usarán estas definiciones para resolver problemas y en sus argumentaciones (Vinner, 1991).

En consecuencia, se sugiere la necesidad de mejorar la educación sobre probabilidad que estos futuros maestros reciben durante su formación y la necesidad de discutir con ellos sus definiciones y sus sesgos de razonamiento, para prepararlos adecuadamente para su futura labor docente. Será también necesario familiarizarlos con las diferentes aproximaciones clásica, frecuencial y subjetiva, así como con el enfoque de modelización en la enseñanza de la probabilidad, sugerido por Coutinho (2007).

Referencias

Azcárate, P. (1995).*El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. 1995. Tesis Doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Cañizares, M. J. y Godino, J. D. (2005). Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. *Proceedings of the First African regional conference of ICMI.* Ciudad del Cabo: ICMI. CD-ROM.

Carter, T. A. (2008).Preservice teacher knowledge and understanding of probability and statistics. En G. Kulm (Ed.), *Teacher knowledge and practice in middle grades mathematics* (pp. 19-43). Rotterdam: Sense Publishers.

Chernoff, E. (2009). *Subjective probabilities derived from the perceived randomness of sequences of outcomes*. Tesis Doctoral. Simon Fraser University.

Contreras, J. M., Díaz, C., Arteaga, P. y Cañadas, G. (2012). La falacia del eje temporal: un estudio con futuros profesores de educación secundaria. En A, Estepa y otros (Eds.), *Actas del XV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 197-208). Baeza: SEIEM.

Coutinho, C. (2007). Conceitos probabilísticos: quais contextos a história nos aponta? *Revemat*. *2*(3), 50-67.

Díaz, C. (2007). *Viabilidad de la enseñanza de la inferencia bayesiana en el análisis de datos en psicología.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Einhorn, H. J. y Hogart, R. M. (1986). Judging probable cause. *Psychological Bulletin*. *99*, 3-19.

Estrada, A. y Díaz, A. (2007).Errores en el cálculo de probabilidades en tablas de doble entrada en profesores en formación. *UNO.44*, 48-58.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. En R. Davidson y J. Swif (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292 – 297).Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Fernandes, J. A. yBarros, P. M. (2005). Dificuldades de futuros professores do 1º e 2º ciclos emestocástica *Actas do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (CIBEM), Porto: Faculdade de Ciências [CD].

Gras, R. y Totohasina, A. (1995).Chronologie et causalité, conceptions sources d'obstacles épistémologiques à la notion de probabilité conditionnelle. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 49-95.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Leikin, R. y Winicky-Landman, G. (2001). Defining as a vehicle for professional development of secondary school mathematics teachers. *Mathematics Teacher Education and Development*, *3*, 62–73.

Mariotti, M. A. y Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities.*Educationa lStudies in Mathematics*, *34*, 219-248.

MEC. (2007a). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.* Madrid: Autor.

MEC (2007b). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establecen la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Pollatsek, A., Well, A. D., Konold, C. y Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities.*Organitation, Behavior and Human Decision Processes,* 40, 255–269.

Serradó, A., Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. (2006). Analyzing teacher resistance to teaching probability in compulsory education. En: A. Rossman y B.Chance, (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Bahia, Brazil: International Association for Statistical Education. Online: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.

Tversky, A. y Kahneman, D. (1982). Causal schemas in judgment under uncertainty. En: Kahneman, D.; Slovic, P.; Tversky, A. (Eds.*), Judgement under uncertainty: Heuristics and biases*(pp. 117-128). Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Vinner, S. (1991).The role of definitions in the teaching and learning of mathematics.En: Tall, D. O. (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht: Kluwer. p. 65–81.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square.*Educational Studies in Mathematics*, *69*, 131–148.

EL MECANISMO *COLLECTING* PARA LA COMPRENSIÓN DEL CONCEPTO DE SERIE NUMÉRICA

Collecting as a mechanism for numerical series concept understanding

M. Laura Delgado Martín[a], María Teresa González Astudillo[a], Consuelo Monterrubio Pérez[a] y Myriam Codes Valcarce[b]

[a]Universidad de Salamanca, [b]Universidad Pontificia de Salamanca

Resumen

En esta comunicación se utiliza el modelo de Pirie y Kieren para analizar el trabajo de una pareja de alumnos universitarios mientras resuelven una tarea en la que han de estudiar el carácter de dos series numéricas. Durante el proceso de solución, los alumnos recurren al mecanismo "collecting" como una forma de folding back para incorporar un conocimiento previo necesario. Este mecanismo se manifiesta en dos momentos a lo largo de la resolución de la tarea.

Palabras clave: *modelo de Pirie y Kieren, comprensión, collecting, series numéricas.*

Abstract

In this paper, the Pirie-Kieren model is used to analyze the work of two university students, while they are solving a task in which they have to determine the convergence of two numerical series. During the process, the students use the mechanism called "collecting", a type of folding back, to invoke their previous knowledge. This mechanism appears twice along the task resolution.

Keywords: Piere and Kieren model, understanding, collecting, *numerical series.*

INTRODUCCIÓN

En los últimos años ha aumentado el número de investigaciones que centran su foco de atención en distintos aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las series numéricas. Su interés radica tanto en su complejidad como en la de algunos conceptos vinculados a ellas, como sucesión o infinito. El centro de atención de muchos de estos trabajos, tanto a nivel nacional como internacional, gira en torno a la dualidad proceso/objeto de estos entes matemáticos (Codes, 2010; Dubinsky, Weller, McDonald y Brown, 2005a, 2005b; Kidron, 2002; McDonald, Mathews y Strobel, 2000, Weller, Brown, Dubinsky, McDonald y Stenger, 2004), focalizado en aspectos relacionados con el aprendizaje de los estudiantes.

En los últimos años se ha abierto una nueva línea en la que se estudia las series numéricas desde la perspectiva del currículo, los libros de texto y la práctica del docente en el aula (González-Martín, 2013; González-Martín, Seffah, Nardi y Biza, 2009; González-Martín, Seffah y Nardi, 2009).

En este trabajo, continuando con el enfoque cognitivista centrado en la comprensión del estudiante, se utiliza el modelo de Pirie y Kieren para caracterizar el proceso que lleva a cabo una pareja de estudiantes cuando resuelven en el aula una tarea que involucra el manejo de series armónicas. En estos estudiantes, la acción consciente de buscar un conocimiento y aplicarlo para resolver satisfactoriamente una tarea caracteriza un tipo de folding back denominado *collecting* (Martin, 2008).

MARCO TEÓRICO

El modelo de Pirie y Kieren ofrece una manera de observar y describir el proceso a través del cual se crea y reorganiza el conocimiento matemático. Se centra en cómo los estudiantes reflexionan

Delgado, M. L., González, M.T., Monterrubio, C. y Codes, M. (2013). El mecanismo *collecting* para la comprensión del concepto de serie numérica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 245-252). Bilbao: SEIEM.

acerca de su conocimiento en un entorno de aprendizaje en el que cada uno realiza su interpretación personal a través de una actividad (Pirie & Kieren, 1992).

Este modelo considera la comprensión como un proceso dinámico y activo en el que se combinan construcción y acciones concretas en un movimiento continuo entre diferentes maneras de pensar representadas en el modelo con ocho "capas" o "niveles": Primitive Knowing, Image Making, Image Having, Property Noticing, Formalising, Observing, Structuring e Inventising (Pirie y Kieren, 1994).

Pirie y Kieren (1994) representan los ocho niveles en un diagrama en dos dimensiones (figura 1) en el que los círculos correspondientes a cada nivel están anidados uno dentro de otro. Este anidamiento ilustra el hecho de que el crecimiento en la comprensión no es ni lineal ni unidireccional y que cada nivel contiene todos los anteriores y está incluido en los niveles siguientes. Esto enfatiza y representa de forma gráfica el hecho de que la comprensión de un concepto matemático tiene una naturaleza "embebida", esto es, incluye dentro de sí a otros muchos (Martin, 2008).

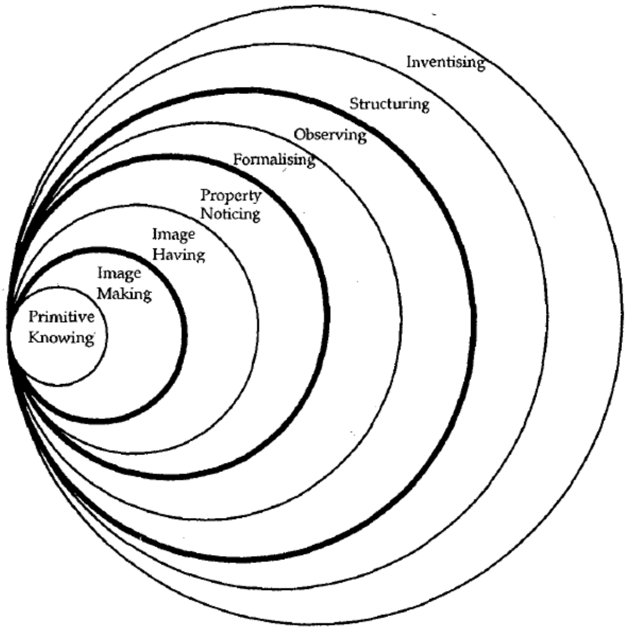


Figura 1. Modelo de Pirie-Kieren (Pirie & Martin, 2000)

Entre estas capas se puede transitar no sólo avanzando, sino también retornando a una capa inferior, para reflexionar, o incorporar comprensiones previas sobre un concepto matemático: "folding back" (Pirie y Kieren, 1992). Una forma de folding back se produce cuando un alumno vuelve a una capa interior para recuperar un conocimiento que ya tiene y que necesita para resolver la tarea. En este caso se habla de "collecting" o "folding back to collect" (Martin, 2008).

METODOLOGÍA

Se ha analizado la resolución de una tarea propuesta en el primer curso de Ingeniería técnica en Informática de una Universidad privada española, sobre el carácter de dos series numéricas. Éstas se estudiaron en el segundo cuatrimestre de la asignatura Fundamentos Matemáticos I, en el tema de sucesiones y series numéricas. Los alumnos trabajaron en pequeño grupo y los datos que se presentan en esta comunicación corresponden a uno de los dos grupos analizados. Se trata de dos estudiantes con buen expediente académico, no sólo en la asignatura de matemáticas, sino en general en todas. Aunque no eran compañeros de clase habituales, aceptaron que se les grabara mientras resolvían un ejercicio llamado “Actividad La Torre”.

Esta actividad se formuló al final del tema de sucesiones y series numéricas, tras haberlas definido y después de haber enunciado criterios de convergencia de series numéricas, como el de comparación, el del cociente, el de las series geométricas, o el de la integral.

El primer contacto que tuvieron los estudiantes con las series numéricas fue a través de la serie geométrica de razón ½. El criterio de convergencia de las series geométricas se demostró en clase y el conocimiento de esta convergencia se utilizó para aplicar el criterio de comparación. También se demostró el criterio de la integral para estudiar la convergencia de las series armónicas ($\frac{1}{n^{\alpha}}$, con α real) e igualmente se utilizaron éstas para aplicar el criterio de comparación. Para el caso de α=1, la profesora explicó cómo Oresme dedujo la divergencia de la suma $\frac{1}{n}$ agrupando términos cuya suma es mayor que ½.

El enunciado de la tarea es el siguiente:

Se quiere construir una torre formada por cilindros de altura igual al radio de la base. El radio de la base es inversamente proporcional a la posición del cilindro en la torre, de modo que el radio del primer cilindro es 1, el del segundo es ½, el del tercero 1/3 y así sucesivamente. Si no hay restricciones en el número de piezas para construir la torre, ¿cuál es la altura y el volumen final de la torre? Deja los resultados indicados.

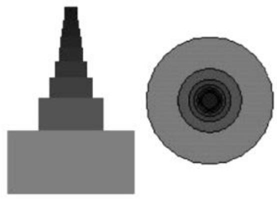


Figura 2: Ilustración del enunciado de la actividad

Para resolverla, los estudiantes han de explorar el carácter de dos series armónicas, una convergente y otra divergente a infinito

ANÁLISIS Y RESULTADOS

En la resolución de esta tarea se han distinguido dos partes, una que corresponde con el proceso seguido hasta que se determinan las series de la altura y al volumen de la torre y la otra cuando se estudia el carácter de cada una de las series.

Determinación de las series

Comienzan a resolver el problema desde el Nivel Image Making fijándose en los elementos geométricos de cada cilindro que conforma la torre y extrayendo sus características.

José M.: La altura de cada cilindro, ¿cuánto es? Siempre la misma, ¿o no? O sea, la altura de cada cilindro, ¿cuánto es?

(…)

Carlos: No sé. Hache. No, no te da un dato.

José M.: Sí, pero tiene que tener una altura.

Carlos: Bueno, siempre va a ser positiva. O sea, no sé si variará.

Ante las dudas que les surgen para poder hacerse una idea de cómo está construida la torre, precisan la ayuda de la profesora que lee con ellos el enunciado del problema haciendo hincapié en la frase "*de altura igual al radio*". Con esta pequeña ayuda, consiguen acceder a un nivel exterior, Image Having, en el que son capaces de actuar sobre representaciones mentales, sin necesidad de pensar en un objeto concreto.

José M. ¿Cuál es la altura y el volumen final? Pues la altura, la altura va a ser… Mejor se… se saca primero el…

(…)

Carlos: La altura es sólo como los radios, ¿sabes?

José M.: La altura… Pero sacamos primero la expresión general de lo que es cada cilindro, y después el sumatorio es la altura, ¿no?

Estos alumnos utilizan el lenguaje simbólico matemático para expresar la altura de un cilindro cualquiera. Ser capaces de expresar una propiedad general de esta índole constituye una evidencia de que han alcanzado el nivel Property Noticing:

Carlos: Sí. A uno partido… Sí es esta, a uno partido de ene.

Finalmente, se desligan por completo de la imagen concreta y consideran el concepto como objeto formal determinando cuál es la serie correspondiente a las alturas (Formalising).

José M.: Es igual a uno partido ene. Sí, pero no. Pero desde… desde ene igual a uno

Una vez establecida la serie correspondiente a la altura se plantean calcular el volumen de la torre para lo que necesitan recordar la fórmula del volumen de un cilindro (Primitive Knowing). No se están replanteando la construcción de la serie correspondiente al volumen, simplemente, necesitan un recurso concreto para seguir avanzado en la resolución de la tarea y poder expresar la serie correspondiente al volumen de la torre.

José M.: Y el volumen, es… Volumen sub ene es… pi al cuadrado por hache. Entonces es pi…

Carlos: El radio al cubo.

Para determinar la serie correspondiente al volumen de la torre, estos alumnos reutilizan la construcción que llevaron a cabo con la serie de la altura y junto con el recuerdo correspondiente a la fórmula del volumen del cilindro (collecting) son capaces de pasar directamente de Primitive Knowing al nivel de Property Noticing.

José M.: … y el radio es uno partido de ene al cubo. Ya está. Ese es el volumen sub ene

A partir de aquí, es inmediata la generalización y determinación de la expresión correspondiente a la serie del volumen (Formalising).

Carlos: O sea, que el volumen total…

José M.: Entonces, el volumen total es el sumatorio desde ene igual a uno de pi…

Carlos: Pi.

José M.: …por pi, eh… uno partido de ene al cubo.

Estudio de la convergencia de las dos series

Para estudiar la convergencia los alumnos comienzan analizando el tipo de series que han construido. Como anteriormente habían resuelto una tarea sobre series geométricas (Codes, 2010) lo primero que se les ocurre es comprobar si se trata de una de éstas series. Por ello se preguntan acerca de la razón; en esta primera tentativa están pensando en calcular la suma de la serie y no sólo en estudiar su convergencia. Al comparar las expresiones algebraicas de las series geométricas que tienen en sus apuntes y las que han obtenido se dan cuenta de que la suma empieza en 1 y en las geométricas en 0. Comienzan a discutir qué pueden hacer para empezar desde 0 y así "arreglar su serie" para que se adapte a las condiciones con las que han trabajado previamente.

José M.: … ¿Ahora cómo se hace el sumatorio? La razón… (*Están buscando en los apuntes*) ¿Tienes tú la fórmula del sumatorio?

Carlos: Esto y… pero hay que saber… n está entre cero y uno, sí, siempre, sí

José M.: Bueno, es que siempre está, siempre empieza en uno, hay que quitar después lo que valga para cero. Pero es que lo que valga para cero no se puede sacar.

(…)

Carlos: Cero. Es verdad, no podemos dar ese valor. Esta va a ser…

José M.: No, ¿sabes lo que podemos hacer?, hacerlo desde cero y que salga la misma. Iba a decir, hacerlo desde cero y cambiar la expresión. Ene menos uno. No al revés es,… ¿Sabes cómo te digo? O sea, en lugar de decir ene igual a uno, dices ese hache igual a sumatorio de (*lo está escribiendo mientras lo dice*) y ene igual a cero, de uno partido de… Vamos a ver, tenemos un problema, que si lo hacemos con ene igual a uno…

Carlos: No podemos restar…

José M.: … no podemos después restar porque el denominador es cero.

Este razonamiento corresponde a un nivel Image Making puesto que están intentando adaptar la serie a otra que ellos conocen para luego poder estudiar la convergencia. Además, no se están dando cuenta de que están confundiendo en una potencia el exponente con la base (Warner, 2008).

Con la ayuda de la profesora se toman conciencia de que no se trata de una serie geométrica y consiguen identificar lo que caracteriza a este tipo de series (Property Noticing). Superan su confusión de base y exponente lo que constituye una reflexión autoconsciente (Martin 2008) al cuestionarse sobre su propia comprensión acerca de dicho concepto y reconocer que no estaban utilizando de forma adecuada los conceptos y debían reajustarlos para resolver la tarea:

José M.: Lo que va a multiplicar, eh elevado a ene, ¿no?

Deben comenzar de nuevo desde el nivel Image Making para estudiar las expresiones que tienen de las series y así poder determinar su carácter. Casi de una forma inmediata se dan cuenta de que la serie de las alturas diverge a infinito. Los alumnos recuerdan (collecting) que en clase se dedujo la divergencia de la serie armónica generalizada utilizando el criterio de la integral, y que para el caso en que el exponente es uno, aplicando el método utilizado por Oresme establecen la divergencia a infinito de la serie de las alturas:

Carlos: Esta es infinito. Esta es infinito, la de arriba.

(…)

José M.: Esta es igual a infinito por Oresme. Hala, ya está. Por lo que vimos ayer de…, por eso.

Alcanzan así el nivel Property Noticing puesto que se dan cuenta de una propiedad que han estudiado anteriormente y que pueden aplicar en este caso. La divergencia de la serie se confirma cuando recurren al test de la integral que se había manejado durante las clases teóricas para establecer el carácter de las series armónicas generalizadas. De esta forma alcanzan el nivel Formalising:

Carlos: Míralo. Espérate, pero era… alfa.

José M.: Espérate, que voy…

Carlos: …igual a uno, no converge.

José M.: No converge, con lo cual tiende a infinito, ¿no?

Carlos: Hala. Sí, porque a menos infinito es imposible. Tiene que ser positivo.

José M.: Claro, por el criterio integral.

A continuación, para establecer la convergencia de la serie correspondiente al volumen, combinan lo que han averiguado de la serie de las alturas con el criterio de la integral de nuevo. Se mantienen en el nivel Formalising puesto que están aplicando algo que ya han averiguado a una nueva situación al igual que hicieron al determinar la serie correspondiente al volumen.

José M.: Pero, ¿y la otra? La otra es igual

Carlos: No, porque tiene pi. Por el criterio integral no.

José M.: Sí bueno, …

Carlos: Míralo. Es uno partido ene elevado a…

José M.: Si alfa es mayor que uno… converge.

Carlos: Mayor que uno, converge. Pero esto es uno. Bueno, converge, sí, a… por pi.

José M.: Aunque sea pi, converge.

Carlos: Pero no sabemos a qué. Y además esto no es pi, es … Y aquí es pi.

Esta última intervención de Carlos les lleva a hacer un folding back porque se encuentran inseguros de que se pueda aplicar este criterio al aparecer en la expresión simbólica de la serie el número π. La dificultad que han encontrado, que puede resultar de la instrucción, no está tan asociada con el establecimiento del carácter de la serie cuanto con la aplicación de la propiedad de la linealidad: si una serie converge al multiplicarla por un número sigue convergiendo.

La inseguridad de Carlos les conduce a revisar otros criterios de convergencia de series de números reales de términos positivos para resolver este problema. Ello implica comenzar a aplicar cada criterio desde el nivel Image Making e ir avanzando hasta llegar a alguna conclusión. Comienzan intentándolo con el criterio de sandwich:

José M.: Venga vamos a ver, un momento. Si, si esa… mira por lo del sándwich. Si es pi, aquella va a estar por encima. Si esa converge, ah, esa no sabemos si converge.

Como no llegan a ninguna conclusión valoran calcular el límite, cuando n tiende a infinito, del término enésimo aunque esa sólo es una condición necesaria pero no suficiente para determinar la convergencia, como podrían haber comprobado con la serie de la altura.

Carlos: El término enésimo no nos dice nada, porque ya lo he mirado yo. (…) Míralo, siempre va a ser más grande, tiende a cero. O sea, que no se sabe nada.

Intentan buscar una serie cuyos sumandos sean mayores y que converja para aplicar el criterio de comparación:

José M.: Criterio de comparación. ¿No tienes tú estos que hicimos... que eran así estándares?

Carlos: ¿Cuál?

José M.: Por comparar. Uno que sea mayor que este, que converja. ¿Sabes? Mayor que éste y que converja. ¿Cuál podría ser? Cualquier exponencial es mayor que este. No, cualquier exponencial es más pequeño, porque está dividiendo. Claro, ¿o no? … una exponencial.

Carlos: Más pequeño.

José M.: (*Susurrando*) uno partido de… Por ejemplo, uno partido de ene al cuadrado es más pequeña, ¿no? Ah no, pi.

Carlos: ¿Uno partido…?

José M.: De ene al cuadrado. Es más pequeña.

Carlos: Al principio, pero luego… Más pequeño al principio, los primeros términos.

Como no consiguen encontrar una serie que les ayude para aplicar ese criterio, lo intentan con el criterio del logaritmo:

José M.: Vamos a ver con el criterio del logaritmo. (…) Ya está, ya lo tengo, converge. ¿Sabes? Lo he hecho con éste, con el criterio del logaritmo. A ver, es… el logaritmo neperiano de uno partido de pi elevado a… partido de ene al cubo, ¿no? ¿A ver cómo sería? (*escribe*). Partido del logaritmo neperiano de ene. Es decir, logaritmo neperiano de ene es ene al cubo partido de pi, ¿no? Y logaritmo neperiano de ene. Logaritmo neperiano de ene tiende a infinito, ¿no? Y esto te… bueno, lo sacas y dices tres por el logaritmo neperiano de ene, que tiende a infinito, menos k, eh no, logaritmo de en… logaritmo neperiano de pi, que es un número K, ¿no? Entonces dices, como este es tres y este tiendo a infinito, logaritmo neperiano de ene igual que aquí, bueno hago este logaritmo, ¿no? Pues tres partido… tres, converge. Lambda es mayor que uno, converge.

Aunque no han reconocido la serie como una armónica generalizada sí han sido capaces de establecer el carácter de la serie mediante el criterio del logaritmo.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

El modelo de Pirie y Kieren nos ha permitido describir y caracterizar el proceso que han seguido los alumnos para resolver la tarea planteada. En este proceso, juega un papel fundamental un tipo de folding back denominado collecting.

Los alumnos primero determinan la serie de la altura y posteriormente hacen lo mismo con la del volumen. En la primera, comienzan desde el nivel Image Making intentando hacerse a la idea de cómo está construida la torre. La intervención de la profesora les ayuda a acceder a un nivel exterior, Image Having, en el que son capaces de trabajar con la representación mental adquirida. Cuando utilizan el lenguaje simbólico y reconocen propiedades, avanzan hacia el nivel Property Noticing, y finalmente consiguen trabajar con el objeto formal, alcanzando el nivel Formalising. Hasta aquí podríamos considerar una evolución a través de los niveles del modelo de forma graduada a medida que su comprensión se va haciendo más estable.

Cuando se plantean determinar la serie del volumen, lo primero que hacen es volver al nivel Primitive Knowing, porque necesitan recordar un conocimiento elemental de geometría como es la fórmula del volumen de un cilindro. Esto les permite volver al nivel Property Noticing y a continuación al de Formalising. Es en este proceso donde se produce el tipo de folding back llamado “collecting”: han sido capaces de recurrir intencionalmente a conocimientos previos aplicándolos adecuadamente. Otro grupo de alumnos para construir la serie del volumen comienzan desde el nivel más interior avanzando gradualmente sin aprovechar la construcción de la serie de la altura (Codes, Delgado. González y Monterrubio, en prensa).

Para determinar la convergencia de la serie de la altura parten del nivel Image Making intentando adaptar las series encontradas a la forma de series geométricas que han trabajando previamente. La intervención de la profesora les facilita superar este obstáculo y avanzar hasta el nivel Property Noticing. En este momento aparece de nuevo el fenómeno de “collecting” ya que necesitan volver al nivel Image Making y recuperar el conocimiento adquirido sobre criterios de convergencia (integral, Oresme) para averiguar el carácter de la serie de la altura.

Este modelo ha permitido describir el proceso de solución de la tarea por este grupo de alumnos; el mecanismo collecting caracteriza la forma en que los alumnos recuperan un conocimiento ya adquirido y lo incorporan a la compresión del concepto serie numérica.

Referencias

Codes. M. (2010). *Análisis de la comprensión de los conceptos de serie numérica y su convergencia en estudiantes de primer curso de universidad utilizando un entorno computacional*. Tesis doctoral. Salamanca: Universidad de Salamanca

Codes, M. Delgado, M.L. González, M.T y Monterrubio, M.C. (en prensa) Comprensión del concepto de serie numérica a través del modelo de Pirie y Kieren. *Enseñanza de las ciencias*.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: part I. *Educational Studies in Mathematics, 58*, 335-359.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A. y Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: an APOS-based analysis: part II. *Educational Studies in Mathematics, 60*, 253-266.

González-Martín, A. (2013). Students' personal relation to series of real numbers as a consequence of teaching practices. *8th CERME*. Antalya: Turquía.

González-Martín, A., Seffah, R. y Nardi, E. (2009). The concept of series in the textbooks: A meaningful introduction? En M. Tzekaki, M. Kalmidrimou, y C. Sakonidis (Eds.), *33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 105-112). Thessaloniki, Grecia: PME.

González-Martín, A., Seffah, R., Nardi, E. y Biza, I. (2009). The understanding of series: The didactic dimension. *61st Meeting of CIEAEM* (pp. 203-207). Montreal, Canada.

Kidron, I. (2002). Concept definition, concept image, and the notion of infinite sum in old and new environments. En A. D. Cockbrun y E. Nardi (Eds.), *26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education, 3* (pp. 209-216). Norwich, England: School of Education and Professional Development, University of East Anglia.

Martin, L. C. (2008). Folding back and the dynamical growth of mathematical understanding: Elaborating the Pirie-Kieren Theory. *The Journal of Mathematical Behavior, 27*, 64-85.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. y Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects, En J. Kaput, A. H. Schoenfeld, y E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education. IV. Conference Board of the Mathematical Sciences (CBMS), Issues in Mathematics Education, 8*, 77-102.

Pirie, S. y Kieren, T. (1992). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in* Mathematics, *23*, 505-528.

Pirie, S. y Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterize it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190

Pirie, S. y Martin, L. (2000). The role of collecting in the growth of mathematical understanding. *Mathematics Education Research Journal*, *2*, 127-146.

Warner, L.B. (2008). How do students' behaviors relate to the growth of their mathematical ideas? *Journal of Mathematical Behavior*, *27*, 206-227.

Weller, K., Brown, A., Dubinsky, E., McDonald, M. y Stenger, C. (2004). Intimations of infinity. *Notices of the American Mathematical Society, 51*(7), 741-750.

VARIACIÓN DE LAS CONCEPCIONES INDIVIDUALES SOBRE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Variation in individual conceptions about the finite limit of a function at a point

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo, Luis Rico y Enrique Castro

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se identifican y examinan cambios en las concepciones específicas acerca del concepto de límite finito de una función en un punto. Partimos de los datos recogidos en una encuesta previa llevada a cabo con un grupo de estudiantes de Bachillerato. Transcurrido un curso, contrastamos esos datos con los obtenidos de una adaptación de esa encuesta, aplicada a los mismos alumnos. Seleccionamos seis cuestiones del primer estudio, con cada una de las cuales implementamos una entrevista semiestructurada grupal. Estas entrevistas están diseñadas para estudiar la evolución de las concepciones de los estudiantes. Los datos obtenidos muestran que los estudiantes parecen superar la atribución general de no rebasabilidad y no alcanzabilidad al límite. También comprobamos que los estudiantes interpretan el carácter exacto o aproximado del límite de modo no equivalente a su carácter definido/ indefinido.

Palabras clave: *límite finito de una función en un punto, concepciones individuales, evolución de concepciones, alcanzabilidad y rebasabilidad del límite, dualidad objeto/proceso.*

Abstract

In this work we identify and examine changes in specific conceptions about the concept of finite limit of a function at a point. The starting point was the data collected in a previous study focused in a group of high school students One year later, we contrasted these data with those obtained from a new application of the questionnaire to the same students. We selected six questions from the first study and with each one of them we implemented one group semistructured interview. These interviews were designed to study the evolution of student conceptions. The data show that students seem to overcome the general attribution of non-exceedability and unreachability to the limit. We also find that students interpret the exact or approximate character of the limit in a not equivalent way from the definite / indefinite aspect.

Keywords: *finite limit of a function at one point, individual conceptions, evolution of conceptions, reachability and exceedabiliy of the limit, process/object duality.*

Fernández-Plaza, J.A., Ruiz-Hidalgo, J.F., Rico, L. y Castro, E. (2013). Variación de las concepciones individuales sobre límite finito de una función en un punto. A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 253-261). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En un estudio previo, llevado a cabo en un máster de investigación, realicé una exploración de los significados y concepciones individuales acerca del concepto de límite finito de una función en un punto. Esta información se obtuvo de un grupo de estudiantes de primer curso de bachillerato, a partir de la aplicación de un cuestionario (Fernández-Plaza, 2011). Las respuestas obtenidas permitieron identificar *aspectos estructurales* con los cuales pude interpretar las concepciones y definiciones proporcionadas por esos estudiantes. Entre dichos aspectos identifiqué la dualidad de la noción de límite como objeto y/o como proceso, el carácter exacto o aproximado de su valor, el carácter infinito potencial o finito del proceso para su obtención, y las relaciones entre la alcanzabilidad y la rebasabilidad, como quedó recogido en Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012).

Para mejor caracterizar estos aspectos estructurales, detectar sus cambios y estudiar su evolución, llevamos a cabo una nueva entrevista sobre los mismos aspectos y con los mismos sujetos en segundo curso de bachillerato, una vez transcurrido un año. Nos propusimos contrastar las respuestas aportadas por los mismos alumnos con las recogidas en el curso anterior. Nos centramos en detectar y caracterizar la variación de las concepciones individuales sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Esperamos encontrar indicadores y argumentos que muestren e interpreten la evolución de las concepciones individuales.

El objetivo de este informe es documentar y describir la variación de las concepciones de los estudiantes sobre aspectos específicos del concepto de límite finito de una función en un punto.

NOCIÓN DE SIGNIFICADO DE UN CONCEPTO MATEMÁTICO

El modelo teórico de significado adoptado para este trabajo se basa en las nociones de signo, sentido y referencia (Rico, 2012). En nuestro marco, el significado de un concepto matemático se establece mediante tres componentes:

- *Estructura conceptual*, dada por los conceptos, relaciones, operaciones, propiedades, y proposiciones derivadas. La estructura conceptual establece el criterio de veracidad o falsedad para las proposiciones que se establecen, desempeña el papel de referencia.
- *Sistemas de representación*, definidos por los signos, gráficos y reglas que hacen presente el concepto y lo relacionan con otros. Los sistemas de representación sistematizan conjuntos de signos apropiados para un concepto y, mediante sus reglas de transformación y de traducción, regulan criterios de inferencia operativos.
- *Fenomenología*, incluye aquellos contextos, situaciones y problemas que están en el origen de un concepto y le dan sentido. Los fenómenos y su análisis establecen la pluralidad de sentidos de un determinado concepto.

Un ejemplo de este modelo se encuentra en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008). La interpretación fundada sobre lo que comunican, expresan o entienden los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función la encuadramos en este modelo de significado de un concepto matemático.

ANTECEDENTES

Organizamos los antecedentes en términos de aquellos descriptores que caracterizan y diferencian las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto.

Estás características proporcionan focos para organizar las entrevistas, a partir de los cuales seleccionamos las cuestiones y los grupos de estudio.

En primer lugar, revisamos las investigaciones que estudian la dualidad objeto/proceso en las concepciones de los estudiantes sobre el concepto de límite (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1987; Sfard, 1991). Estos autores destacan que los escolares conciben implícitamente el límite como un par formado por un proceso iterativo-dinámico infinito y por su resultado, si bien aparecen incoherencias que se reflejan en afirmaciones como "0,999… es estrictamente menor que 1", o bien, que "el límite está indefinido pues sólo conocemos sus aproximaciones". Planteamos dos cuestiones que abordan de estos aspectos: A1 y B2 (Tabla 1).

En segundo lugar, consideramos trabajos sobre fenomenología del límite finito de una función en un punto, en el sentido considerado por Sánchez-Compaña (2012) quien establece diferencias relevantes entre la definición intuitiva *-aproximación doble intuitiva-* y la definición formal *-fenómeno ida-vuelta-*, entre ellas el carácter infinito potencial de la primera y su ausencia en la segunda. Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012) detectan que aquellos estudiantes familiarizados con el primer fenómeno, quitan importancia al carácter infinito potencial del proceso, ya que consideran suficiente un número finito de aproximaciones para conocer el límite. Se introdujo la cuestión A3 (Tabla 1), para obtener argumentos sobre este aspecto.

Por último, algunas investigaciones detectan en las concepciones de los escolares sobre límite las propiedades de no ser rebasable y/o alcanzable; relacionan su presencia con el uso coloquial del término "límite" y de acciones como "limitar", que denotan una idea de acotación o no alcanzabilidad de un valor (Cornu, 1991; Monaghan, 1991). Hemos seleccionado dos cuestiones, A2 y B1 (Tabla 1) que abordan estos aspectos.

MÉTODO

El método empleado es de entrevista, en formato de entrevista semiestructurada. El estudio es confirmatorio con un análisis cualitativo de los datos. La figura 1 muestra el diseño general de un estudio dividido en dos fases, siendo la fase final la que se detalla en esta comunicación.

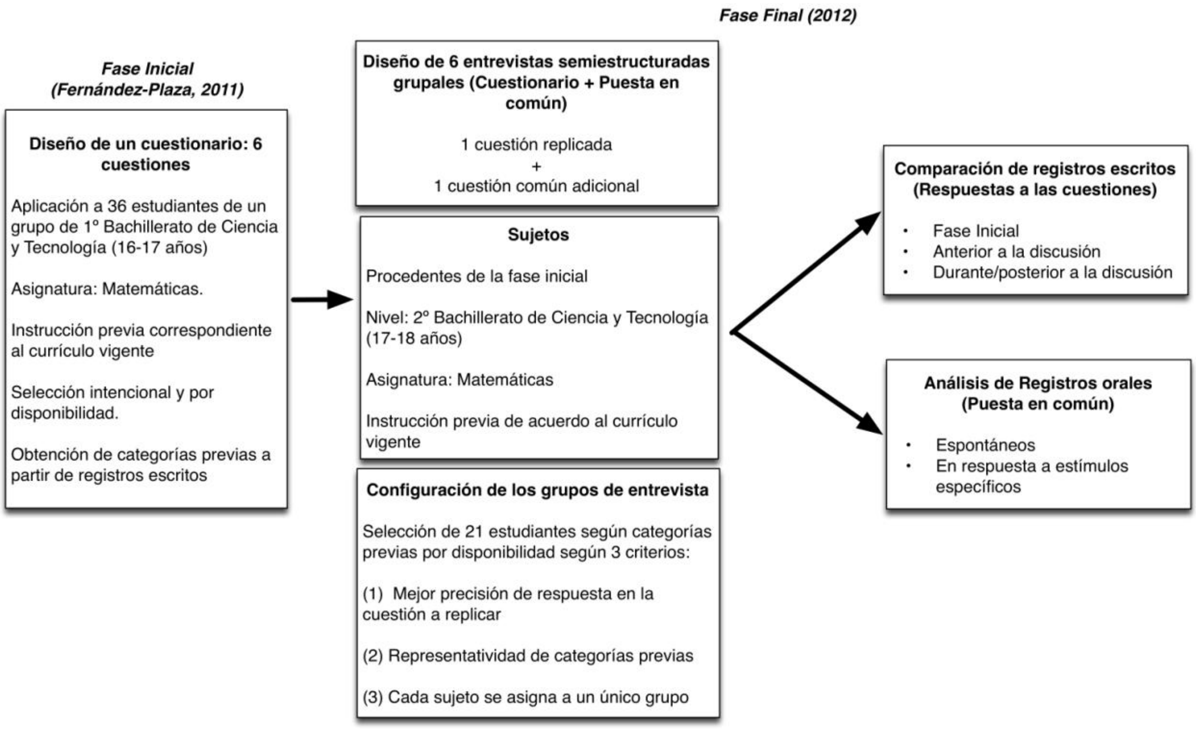


Figura 1. Esquema general del diseño del estudio

Se diseñaron seis plantillas, como material auxiliar para orientar la entrevista; no son meros cuestionarios estándar. En la Figura 2 se muestra un modelo de plantilla para uno de los grupos. Cada plantilla consta de una cuestión implementada en la fase inicial (Fernández-Plaza, 2011) y una cuestión adicional común.

Cada plantilla trabaja con un grupo de alumnos y se identifica mediante un código. Los códigos usan las dos opciones del cuestionario inicial, que se diferencian por las letras A y B. En total se establecieron seis plantillas para seis grupos, tres por cada código. Los sujetos se codifican de manera genérica por la letra E y un subíndice: E1, E2…, E21.

PLANTILLA DE RESPUESTAS (MODELO A1)

Nombre:
Edad:
Curso:
Centro:

Cuestión 1: Lee con atención:

Decide justificadamente si la siguiente afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

a) Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto. V F

Cuestión 2: Lee con atención el enunciado siguiente:

Describe en cada apartado cómo entiendes los siguientes términos "Aproximar ", "tender ", "alcanzar", "rebasar", "converger", en el contexto de límite finito de una función en un punto.

Figura 2. Modelo de plantilla para el grupo A1

Códigos, preguntas específicas y composición de los grupos se recogen en la Tabla 1.

Tabla 1. Cuestiones específicas y composición de los grupos de entrevista

Código Grupos	*Cuestión específica*	*Código Sujetos (Categorías previas)*
A1	"Un límite describe cómo se mueve una función f(x) cuando x se mueve hacia cierto punto"	E1 (Objeto/proceso) E2 (Objeto) E3 (Proceso)
A2	"Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar"	E4, E5 (No Rebasable) E6, E7 (Rebasable)
A3	"Un límite se determina calculando f(x) para valores de x cada vez más cerca de un número dado hasta que el límite se alcanza"	E8 (Finito práctico) E9, E10 (Infinito potencial)
B1	"Un límite es un número o punto al que la función se acerca pero nunca alcanza"	E11, E12 (No alcanzable) E13, E14 (Alcanzable)
B2	"Un límite es una aproximación que puedes hacer tan precisa como quieras"	E15 (Precisión restringida) E16 (Exactitud del límite) E17, E18 (Precisión arbitraria)

B3	"Un límite es un número al cual los valores de una función f(x) pueden acercarse de manera arbitraria mediante restricciones de los valores de x"	E19, E20 (Aproximación arbitraria) E21 (Aproximación no arbitraria)

Las categorías previas de respuesta están descritas detalladamente en Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico (2012). Los 21 alumnos seleccionados ejemplificaron 14 categorías de respuestas en la fase inicial según cuestiones específicas planteadas y componentes estructurales considerados.

La realización de las entrevistas se llevó a cabo en un aula ordinaria habilitada al efecto. Cada uno de los grupos fue convocado separadamente al aula, con permiso del profesor, en turnos de 1 hora y en su horario lectivo. Las entrevistas fueron implementadas en dos jornadas lectivas.

El protocolo seguido en las entrevistas tuvo dos partes:

- En la primera, se entregó a cada sujeto la plantilla de tareas. Duración 15 minutos.
- En la segunda, se grabó en audio la puesta en común de las respuestas a las cuestiones de cada plantilla. Cada sujeto leyó y explicó su respuesta; después, el investigador empleó materiales de apoyo para incentivar la discusión, aclarar dudas, profundizar en aspectos relevantes y, en caso necesario, plantear nuevas cuestiones.

DATOS RECOGIDOS Y DISCUSIÓN

Los datos recogidos derivados del desempeño y de las respuestas de los estudiantes en cada uno de los grupos se analizaron en dos etapas:

Comparación entre los registros escritos (Fase Inicial, Pre-discusión, Post-discusión)

En primer lugar, percibimos a partir de las grabaciones de la puesta en común que algunos estudiantes registraron en su plantilla la revisión y ampliación de su argumento previo; acción no requerida por el protocolo. Reflejamos tres tipos de registros según el momento.

- *Fase Inicial*, para la organización de los sujetos en los grupos de entrevistas.
- *Pre-discusión,* anterior a la puesta en común. En la tabla 2 se denota en "texto normal".
- *Post-discusión,* durante y posterior a la puesta en común. En la tabla 2 se denota en "*texto cursiva*". Los registros post-discusión han sido ampliación de los pre-discusión.

Tabla 2. Registros escritos en fase inicial y final relacionados con la cuestión A1

Sujetos	*Fase Inicial (Fernández-Plaza, 2011)*	*Fase final : Pre-discusión/Post-discusión*
E1	Verdadero, porque el límite cuando x tiende a algún número, significa dónde se dirige la función cuando tiende a ese número **(Categoría: Objeto/Proceso o dual)**	Es verdadera porque cuando se realiza , se obtiene el conocimiento total de la función, es decir, todas sus características, su comportamiento en general, además nos permite saber hacia dónde se mueve con respecto a un punto en la gráfica *y también se puede calcular el límite en el infinito, entonces no nos indica su forma, sino su dirección.*

E2	Falso, el límite no te dice el movimiento de f(x), el movimiento te lo dice la ecuación de f(x) que se te de para resolver, según tenga, x, x^2, raíz cuadrada de x, etc. **(Categoría: Objeto)**	Falso, porque un límite no describe el movimiento de la función sino que nos indica hacia dónde se dirige o dónde se sitúa la función en cualquier punto de x, *f(x) nos dice el movimiento, no nos lo dice el límite.*
E3	Verdadero, sí ya que el límite nos da todos los puntos posibles que puede adquirir la función **(Categoría: Proceso)**	Verdadero, ya que por ejemplo en el caso de límite cuando x tiende a infinito de f(x), nos indica el movimiento que realiza esa función f(x) hacia infinito *o hacia el valor que presente la x.*

Consideramos de manera detallada los resultados derivados de esta fase para la cuestión A1 y resumimos los resultados derivados para el resto de los grupos.

Las tres categorías previas responden a la dualidad objeto/proceso de la noción de límite, es decir, a si conciben como entidades distintas el objeto y el proceso infinito (*Concepción objeto*), los vinculan (*Concepción dual*) o conciben el proceso subordinado al objeto (*Concepción proceso*). La concepción de E2 representa una concepción de objeto, pues incide en que la naturaleza dinámica corresponde a la expresión algebraica de la función, no al límite. E1 asume que el límite es un objeto al que la función se dirige, aunque le atribuye características de proceso, mientras que para E3 el límite asume todos los matices de proceso.

En la Tabla 3 se recogen las variaciones de las concepciones de los sujetos del grupo A1 antes y tras la puesta en común. Únicamente se observa una ligera variación de las concepciones de E1 y E3.

Tabla 3. Variación de las concepciones individuales de los sujetos de A1

Sujetos	*Fase Inicial / pre-discusión*	*Pre-discusión / Discusión*
E1	Concepción dual → Concepción proceso	Concepción Proceso → Concepción dual
E2	Sin variación (Concepción objeto)	Sin variación
E3	Sin variación (Concepción proceso)	Concepción Proceso → Concepción dual

Análisis de la puesta en común: resultados

La Tabla 4 incluye segmentos de la puesta en común que ilustra las variaciones o no de las concepciones de los sujetos del grupo A1. El investigador introduce estímulos para poner a prueba la resistencia al cambio de las concepciones pre-discusión. Se observa que E1 y E3 cambian ligeramente su concepción puramente procesual a una dual. La concepción de E2 no se alteró, aún cuando se les presentaron otras alternativas de respuesta.

Tabla 4. Segmentos destacados de la discusión e interpretaciones.

Segmentos		*Interpretación*
I:	¿Qué pensáis vosotros, los que habéis respondido verdadero, respecto de la respuesta de vuestro compañero [ver respuesta en fase inicial de E2, tabla 2]?	Concepción dinámica procesual de límite (E3)
E3:	Si el límite va tomando diferentes valores, va cambiando la función.	

I:	… ¿El límite qué es, sólo un número o varios?	
E3:	Uno.	
I:	Uno sólo, en este caso sólo podéis considerar que el límite es único, pero ese valor ¿te dice qué forma tiene f(x)? …¿Las funciones f(x)=x y f(x)=x^2 tienen el mismo límite en x=1 o no?	Estímulo y cambio de concepción (E1 y E3)
E1 y E3:	Sí	
I:	¿Qué respuesta podéis dar [planteada al grupo general] a la cuestión A1 [ver tabla 1]?	
E1:	[Lee su respuesta final y añade] no nos indica su forma en sí, pero sí la dirección a la que tiende, cuando la x vale ese punto.	Invariabilidad de la concepción pre-discusión (E2)
I:	¿Tienes algo que añadir E3?	
E3:	No, está perfecto.	
E2:	También he añadido que f(x) nos dice el movimiento, y no nos lo dice el límite, que es lo que había dicho… [se refiere a la respuesta modelo].	

Balance de resultados derivados del resto de los grupos (A2, A3, B1, B2 y B3)

La cuestión B3 no proporcionó datos diferentes a la fase inicial. La cuestión B1, referida exclusivamente a la alcanzabilidad del límite, deriva hacia interpretaciones de límite como recta a la que la función tiende pero no alcanza, posiblemente debido al estudio asintótico de la función al caso en un punto.

La propiedad de no rebasabilidad del límite (Cuestión A2) fue sostenida por la totalidad del grupo en la fase pre-discusión. Durante la discusión la interpretación de gráficas con diferentes criterios de rebasabilidad produjo cambios en su argumentación. Aquellos argumentos resistentes recalcaron que la no rebasabilidad corresponde al límite por definición.

En relación a la cuestión A3, algunos sujetos enfatizan la suficiencia de un número finito de iteraciones para calcular el límite, aunque se necesita un número mínimo de ellas. En relación a la alcanzabilidad del límite existen tres interpretaciones: (1) Posibilidad de que las aproximaciones igualen al límite; (2) El límite es igual a la imagen y (3) El límite es calculable, aunque exista indeterminación.

En relación a la cuestión B2, un sujeto manifiesta tres interpretaciones de precisar (1) Alcanzar el límite "Si sale 1'99…tú no puedes precisarlo"; (2) Aproximar el límite "tú puedes precisarlo para que salga 1'99"; (3) Bondad de una aproximación " el límite es el mismo, pero no es tan preciso". La noción de exactitud del límite tiene tres interpretaciones (1) Natural o entero; (2) Resultado del cálculo; (3) Límite es igual a la imagen, siendo aproximado en caso contrario.

CONCLUSIONES

De acuerdo al objetivo planteado, presentamos las siguientes conclusiones:

Las concepciones del límite como proceso, mostradas por algunos estudiantes, pudieron ser ligeramente modificadas mediante la discusión de dos funciones diferentes con límites idénticos en el mismo punto x=a. Un sujeto mostró resistencia a cambiar la concepción del límite como objeto.

La resistencia de los estudiantes a superar la no rebasabilidad del límite se debe posiblemente más al influjo del uso coloquial del término “límite”, que a la comprensión errónea sobre el concepto en sí. La superación se promovió mediante exploración de diversas gráficas sin que exista una descripción globalmente aceptada de esta propiedad.

La no alcanzabilidad del límite es resistente en las concepciones de algunos estudiantes por la imposibilidad de que las aproximaciones igualen al límite. Algunos estudiantes admiten la alcanzabilidad como la posibilidad de calcular el límite o que la función sea continua. Es relevante que tampoco exista una descripción globalmente aceptada de esta propiedad.

No se producen variaciones relevantes en las concepciones del carácter infinito/finito del proceso. La suficiencia de una “cantidad mínima necesaria” de aproximaciones para percibir la tendencia “infinita” al límite es coherente con los resultados previos obtenidos. La negación de este hecho por un estudiante nos permite refinar su concepción previa incorporando la necesidad patente de “completar” el proceso infinito.

El carácter exacto/aproximado del límite no es considerado por los estudiantes como una propiedad intrínseca del objeto límite (el límite es exacto si está definido, y aproximado en caso contrario) sino extrínseca a él, es decir, los estudiantes entienden *límite exacto* si coincide con la imagen, de lo contrario se dirá *aproximado*. En cualquier caso el valor del límite está definido. También existen evidencias particulares de que *límite exacto* equivale para algunos estudiantes a ser natural o entero; posible influjo del contexto aritmético. No menos importante es la amplitud de interpretaciones del término “precisar”.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER), del proyecto “Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación” (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN) y del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación (Grupo FQM-193, Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico).

Referencias

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fernández-Plaza, J. A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio*. Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., & Rico, L. (2012). The Concept of Finite Limit of a Function at one Point as Explained by Students of Non-Compulsory Secondary Education. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2), (pp. 235-242). Taipei, Taiwan: PME.

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 - 237). Jaén: SEIEM

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics, 11*(3), 20-24.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J.L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: El caso de los números naturales. *Suma*, *58*, 7-23.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM), 1,* 39–63.

Sánchez-Compaña, M.T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies of Mathematics*, *22*, 1-36.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics, 18,* 371-397

Tall, D.O. (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes. In R. Karplus, (Ed.), *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education,* (pp. 170-176). Berkeley: PME.

Tall, D.O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12,* 151- 169.

IDENTIFICACIÓN DE ESTILOS DE ENSEÑANZA COMPARANDO DISCUSIONES EN GRAN GRUPO DE UN PROBLEMA DE SEMEJANZA[2]

Identification of teaching styles comparing whole group discussions of a problem of similarity

Miquel Ferrer, Josep María Fortuny y Laura Morera

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

Esta comunicación se centra en identificar estilos de enseñanza a partir del análisis de las discusiones en gran grupo de un mismo problema de geometría en el plano realizadas por diferentes profesores. Mostramos evidencias que sugieren la importancia de realizar una previsión y planificación eficiente de las actividades matemáticas antes de implementarlas con alumnos. El análisis de datos sugiere la detección de cuatro estilos de enseñanza que serán presentados como uno de los resultados de este estudio.

Palabras clave: *Discusiones en gran grupo, Orquestación, Estilos de enseñanza, Semejanza.*

Abstract

This study focuses on identifying teaching styles analysing whole group discussions of different teachers while manage the same plane geometry problem. We show evidences which suggest the importance of performing an efficient forecasting of the mathematical activities before putting them in practice with students. Data analysis suggests the detection of four teaching styles that will be presented as one of the outcomes of this study.

Keywords: *Whole group discussions, Orchestration, Teaching Styles, Similarity.*

INTRODUCCIÓN

El problema de investigación queda delimitado en identificar los estilos de enseñanza de cuatro profesores realizando discusiones en gran grupo (WGD) –whole group discussion– sobre un mismo problema de semejanza resuelto por estudiantes de 3º de ESO. Resaltamos la importancia de este estudio para analizar los efectos de los estilos de enseñanza en la generación de oportunidades de aprendizaje en los estudiantes.

Se muestra parte del diseño instructivo e ilustramos dos resultados, el primero de los cuales pone de manifiesto la importancia de preparar de forma eficiente la sesión de clase antes de realizar una actividad matemática con los alumnos y el segundo presenta tres estilos de enseñanza detectados a partir del análisis de las WGD del problema estudiado.

MARCO TEÓRICO

En esta comunicación nos centramos en el papel del profesor como guía para ayudar a los alumnos a construir conocimiento matemático y en la determinación de estilos de enseñanza, tal y como se define en Aguilera (2012), en el modo que tiene el profesor de interaccionar con sus alumnos, la

[2] Este trabajo se ha realizado al amparo del Proyecto EDU2011-23240 (MEC) y a las becas FPI BES-2012-053575 y BES-2009-022687 (MEC).

Ferrer, M., Fortuny, J.M. y Morera, L.. (2013). Identificación de estilos de enseñanza comparando discusiones en gran grupo de un problema de semejanza. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 263-274). Bilbao: SEIEM.

toma de decisiones y la forma que adoptan las relaciones didácticas. De acuerdo con Krummheuer (2012), durante la interacción en el aula el alumnado y el profesorado aprenden progresivamente a comunicar y comunicarse. En este sentido los autores asumimos la caracterización teórica del aprendizaje como forma de participación en un discurso.

El modo que tiene un profesor para gestionar los elementos singulares de una discusión y producir resultados compartidos lo relatamos con la noción de orquestación como en Morera (2013), donde se elabora una sistemática de ocho fases para preparar y gestionar WGD realizando una mirada conjunta a las cinco prácticas de Smith y Stein (2011): Anticipación, Monitorización, Selección, Secuenciación y Conexión; y a las tres fases de la orquestación instrumental de Drijvers y sus colegas (2010): Configuración didáctica, Modo de explotación e Implementación didáctica.

Entre otras consideraciones, Smith y Stein (2011) proponen que se deben *anticipar* las posibles respuestas de los alumnos, hecho que incluye pensar cómo pueden interpretar la resolución de los problemas y tener un amplio estudio de todas las posibles formas de resolverlos. La noción de *árbol del problema* (Morera, 2013), se presenta como un elemento relevante de la fase de anticipación y una herramienta adecuada para prever las rutas de resolución que los alumnos pueden seguir en el abordaje de los problemas y sistematizar los aspectos que el profesor desea tratar durante la WGD.

Podemos caracterizar los *episodios* de una WGD orquestada por el profesor a través de dos dimensiones: la instrumental y la discursiva. Respecto a la primera se consideran seis tipos de orquestación: *Explorar el artefacto*, *Explicar a través del artefacto*, *Enlazar artefactos*, *Discutir el artefacto*, *Descubrir a través del artefacto* y *Experimentar el instrumento*. Los tres primeros están centrados en las acciones del profesor y los tres últimos en las de los alumnos. Estos tipos de orquestación instrumental se basan en los identificados por Drijvers y sus colegas (2010), pero generalizados para el caso en que la implementación de la WGD no contenga necesariamente artefactos tecnológicos, hecho que los hace más adecuados para la investigación que proponemos en la presente comunicación.

Respecto a la dimensión discursiva se contemplan un conjunto de patrones emergentes de sus datos de investigación, los cuales ayudan a entender el desarrollo genérico de los episodios y las particularidades compartidas entre ellos. Identifican ocho *Estadios de la discusión* en gran grupo de un problema (ED), los cuales se presentan como una sucesión del proceso de realización de la WGD, es decir, se trata de pautas de actuación potencialmente interesantes de ser analizadas en toda WGD de un problema matemático. Los ED son los siguientes: *Situación del problema*, *Presentación de una solución*, *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar*, *Estudio de casos particulares o extremos*, *Contraste entre diferentes soluciones*, *Conexiones con otras situaciones*, *Generalización y conceptualización*, y *Reflexión sobre el progreso matemático*.

Para profundizar en el contenido de los episodios se consideran caracterizaciones complementarias basadas en las *acciones* significativas que los constituyen, las cuales se clasifican en: *Intervenciones de Pensamiento Matemático* (IPM); *Intervenciones Didácticas* (ID); y *Acciones Instrumentales* (AI). Estos tres tipos de acciones pueden ser desarrolladas tanto por estudiantes como por profesores. En el presente artículo nos centraremos en las ID, las cuales pueden referirse a acciones de *gestión de la clase*, de *gestión de la discusión*, de *gestión de la discusión matemática*, o de *participación de los alumnos como profesor*.

METODOLOGÍA

La recogida de datos se ha realizado en dos centros de secundaria con estudiantes de 3º de ESO. En esta comunicación se presentan datos relativos a las WGD de un mismo problema de semejanza en el plano gestionadas por cuatro profesores de matemáticas: Luis y Luna del centro A, y Marta y Pilar del centro B.

Los datos se obtienen después de registrar en vídeo las WGD y de realizar una transcripción escrita de todas las intervenciones. La actividad matemática que se analiza, el enunciado de la cual se muestra en la Figura 1, es la primera de una secuencia didáctica de cinco actividades introductorias (AIN) y cinco problemas de Semejanza (Gairín y Oller, 2012).

Actividad introductoria 1: ¡Doblar figuras!

Dada la siguiente letra del abecedario, representa otra que sea el doble de grande. A continuación explica brevemente como la has obtenido y compárala con la original.

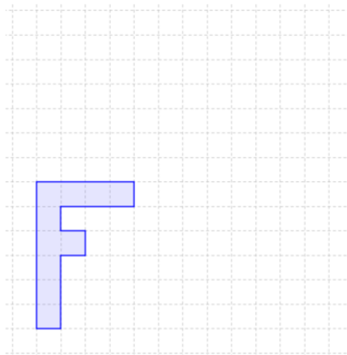


Figura 1: Enunciado de la AIN-1

El esquema de la secuencia didáctica completa se muestra en la Tabla 1 y se destaca que el ciclo de trabajo seguido en toda la secuencia combina el trabajo por parejas (TP), la WGD y la reflexión individual después de la discusión de los problemas. En diversos momentos se incluye el uso del lápiz y papel, un software de geometría dinámica (DGS) y otros artefactos.

Tabla 1. Estructura de la secuencia didáctica

Sesión	Lugar	Tareas	Artefactos
1	Aula ordinaria	**TP - Actividades introductorias** del tema de semejanza, Tales y homotecia	Lápiz y papel, y calculadora
2	Aula ordinaria	**WGD -** Actividades introductorias 1 y 2	Pizarra y DGS
3	Aula ordinaria	**WGD -** Actividades introductorias 3, 4 y 5	Pizarra y DGS
4	Sala de ordenadores	**TP - Problema 1**: La semejanza en las hojas de un árbol	DGS y calculadora
		TP - Problema 2: Transformaciones geométricas	
5	Aula ordinaria	**WGD -** Problemas 1 y 2	Pizarra y DGS
6	Sala de ordenadores	**TP - Problema 3**: Ampliar y reducir fotocopias	DGS y calculadora
		TP - Problema 4: Puntos medios con una propiedad curiosa	DGS
7	Aula ordinaria	**WGD -** Problemas 3 y 4	Pizarra y DGS
8	Aula ordinaria	**TP y WGD - Problema 5**: Investigar con los espejos	Pizarra y DGS

Basándonos en la sistemática propuesta por Morera (2013) se ha diseñado, colaborativamente con las profesoras Marta y Pilar, una guía para el profesorado centrada en la anticipación realizada mediante los *árboles de los problemas*, en cuyo esquema de resolución se incorporan los mensajes orientativos que el profesor puede proporcionar a los alumnos durante el TP y aquellas estrategias que consideramos importantes para ser tratadas durante la WGD. La Figura 2 ilustra el árbol del problema asociado a la AIN-1.

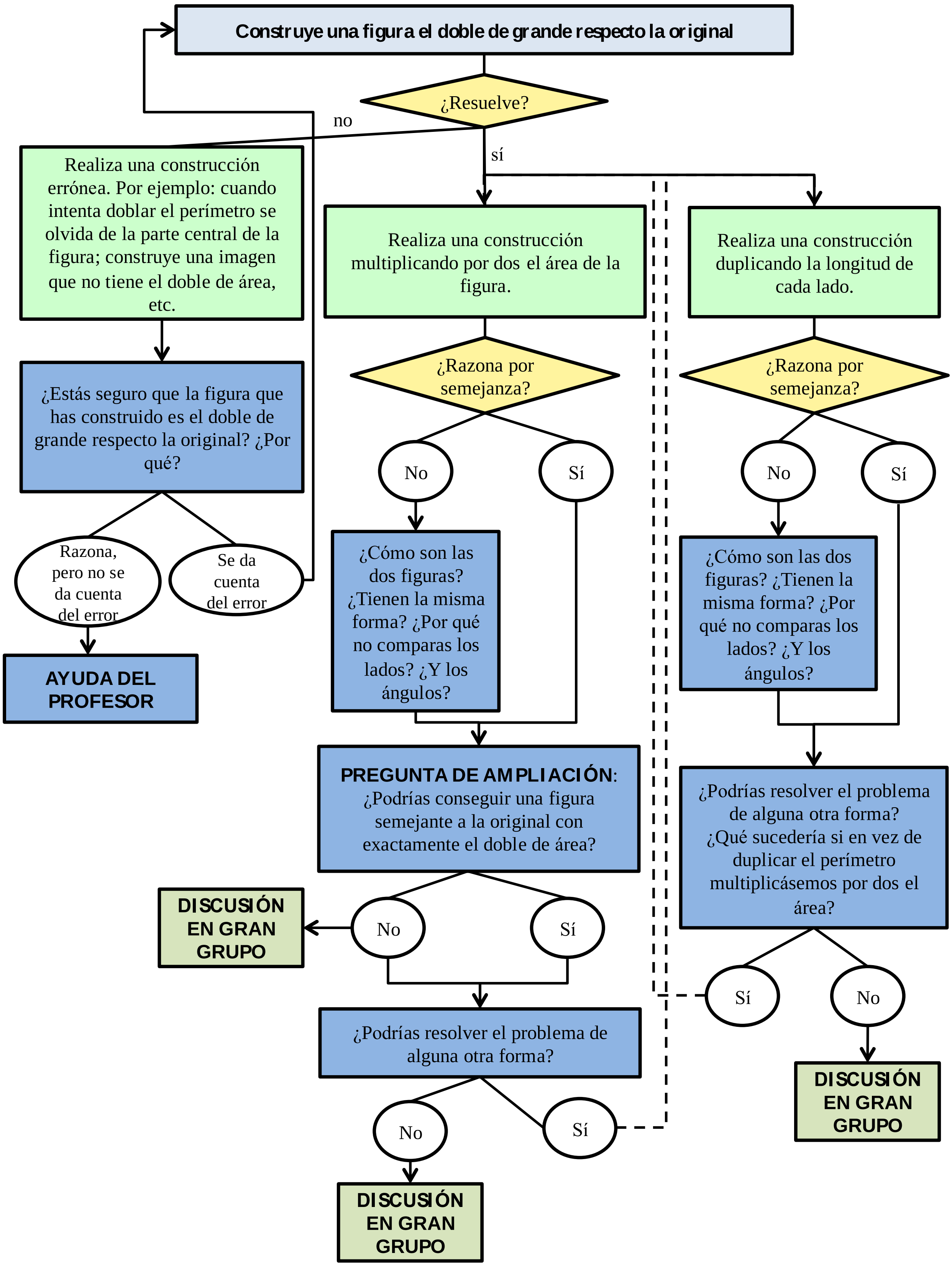


Figura 2. *Árbol del problema* asociado a la AIN-1

El enunciado de la AIN-1, que fue resuelta por los estudiantes utilizando solo lápiz y papel en la sesión de TP, posibilita que algunos alumnos representen una figura que tenga cada lado el doble de grande respecto el original y, por tanto, el perímetro de la nueva imagen quede multiplicado por 2.

Así podrán observar que los ángulos de ambas figuras son iguales, pero los lados son proporcionales con factor 2 y llegarán a la definición de figuras poligonales semejantes. En cambio, otros estudiantes pueden asociar la representación de una figura el doble de grande con una que tenga el doble de área, la cual únicamente será semejante a la original si la razón entre los lados homólogos es raíz de 2.

Finalmente, es necesario mencionar que Luis y Luna, a diferencia de Marta y Pilar, no dispusieron del *árbol del problema* ni de la guía para el profesorado para preparar la sesión de TP y la WGD. Por tanto, los primeros realizaron las clases a partir de los enunciados de los problemas, siguiendo indicaciones estrictamente técnicas e implementaron la WGD de acuerdo con su criterio profesional. Los dos decidieron utilizar solo la pizarra ordinaria como artefacto.

ANÁLISIS DE DATOS

En primer lugar se analiza la WGD de cada profesor de una forma global, es decir, se considera la discusión completa y se divide en *episodios*. Cada uno de ellos queda caracterizado por un *Tipo de orquestación* (TO) y por un *Estadio de la discusión* (ED) (Morera, Planas y Fortuny, 2013).

La Tabla 2 muestra la caracterización de los episodios de las WGD de los profesores Luis (P1), Luna (P2), Pilar (P3) y Marta (P4), la cual ha sido realizada por los investigadores y triangulada por los miembros del Proyecto de Investigación. La notación que utilizamos señala, con un color específico para cada profesor, el número del episodio dentro de la discusión. Así, por ejemplo, el episodio ${}^{P1}e_5$ hace referencia al quinto episodio de la WGD del profesor Luis (P1) y el ${}^{P3}e_5$ corresponde al quinto episodio de la WGD de la profesora Pilar (P3).

La distribución de los episodios en la Tabla 2 y su caracterización según el TO y el ED permite detallar algunas diferencias entre los profesores investigados.

1. *Orquestación centrada en el profesor y tratamiento insuficiente de los estadios de la discusión.* Luis centra la implementación de su WGD en realizar explicaciones orales ayudándose de algunas anotaciones en la pizarra. La mayoría de los TO se concentran en *Explicar a través del artefacto* y, por eso, cuatro de los seis episodios presentan un TO centrado en el profesor y situado en las tres primeras filas de la Tabla 2. La distribución de los ED es bastante ordenada en la WGD y, a diferencia de Luna y Marta, no quedan concentrados de forma remarcable en ningún ED. Es razonable pensar que esto es debido al mayor protagonismo del profesor en la discusión y a la poca participación de sus estudiantes, hecho que dificulta la exposición y discusión conjunta de sus *Estrategias para resolver o argumentar* el problema durante la sesión de clase.

2. *Orquestación centrada en los estudiantes y tratamiento desordenado y completo de los estadios de la discusión.* Luna y Marta focalizan sus WGD en la participación de los alumnos y, de acuerdo con Morera, Planas y Fortuny (2013), este hecho se interpreta con una mayor concentración de episodios en las tres últimas filas de la Tabla 2. Además, muchos estudiantes presentan sus soluciones y/o discuten en gran grupo sus estrategias de resolución. Por eso nueve de los doce episodios de la WGD de Luna presentan un ED situado en las columnas B o C de la Tabla 2 y lo mismo sucede con seis de los ocho episodios de la WGD de Marta.

3. *Orquestación centrada equilibradamente entre el profesor y los alumnos, y tratamiento ordenado y completo de los estadios de la discusión.* El TO de la WGD de Pilar se distribuye casi por igual entre la figura del profesor y la del alumno, y el número de episodios correspondientes a las tres primeras filas de la Tabla 2 es casi el mismo que el de las tres últimas. La distribución de los ED es bastante ordenada y, como también sucede en la WGD de Luis, es muy lineal de izquierda a derecha, es decir, de los estadios correspondientes a los momentos iniciales de la discusión (p.ej.: *Situación del Problema*) a los finales (p.ej.: *Generalización y conceptualización*).

Tabla 2. Caracterización de la WGD de cada profesor

Estadio de la discusión del problema (ED) / Tipo de orquestación (TO)	A. Situación del problema	B. Presentación de una solución (argumentada)	C. Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar	D. Estudio de casos particulares o extremos	E. Contraste entre diferentes soluciones	F. Conexiones con otras situaciones	G. Generalización y conceptualización	H. Reflexión sobre el progreso matemático
1. Explicar el artefacto								
2. Explicar a través del artefacto		${}^{P3}e_4$ ${}^{P4}e_5$	${}^{P1}e_4$ ${}^{P3}e_6$		${}^{P1}e_3$ ${}^{P1}e_5$ ${}^{P3}e_8$		${}^{P1}e_6$	${}^{P1}e_{12}$
3. Conectar artefactos						${}^{P2}e_{10}$	${}^{P3}e_7$ ${}^{P3}e_9$ ${}^{P4}e_8$	
4. Discutir el artefacto			${}^{P2}e_3$ ${}^{P2}e_5$ ${}^{P2}e_{11}$ ${}^{P3}e_3$ ${}^{P4}e_7$		${}^{P3}e_5$			
5. Descubrir a través del artefacto			${}^{P4}e_6$					
6. Experimentar el instrumento	${}^{P3}e_1$ ${}^{P4}e_1$	${}^{P1}e_1$ ${}^{P1}e_2$ ${}^{P2}e_1$ ${}^{P2}e_4$ ${}^{P3}e_2$ ${}^{P4}e_2$ ${}^{P4}e_4$	${}^{P2}e_2$ ${}^{P2}e_6$ ${}^{P2}e_8$ ${}^{P2}e_9$ ${}^{P4}e_3$		${}^{P2}e_7$			

El análisis del contenido matemático de los episodios de las cuatro WGD ha permitido evidenciar algunas diferencias relevantes:

1. Los profesores del centro A, Luis y Luna, que no habían colaborado en el diseño de la guía para el profesorado, no utilizaron la actividad para introducir y definir con detalle el concepto de figuras poligonales semejantes. En cambio, dicho elemento constituía uno de los objetivos de la actividad recogidos en la guía y, por eso, las profesoras Pilar y Marta, que participaron con los investigadores en su diseño, sí lo introdujeron en sus WGD. Los episodios $({}^{P3}e_5)$, $({}^{P3}e_6)$ y $({}^{P3}e_7)$; $({}^{P4}e_6)$ y $({}^{P4}e_7)$ se centran en estudiar la definición mencionada. Asimismo, para este problema Luis decidió utilizar únicamente la pizarra ordinaria como artefacto y Luna empleó además unas hojas de papel de medidas diferentes como material manipulable de soporte en el $({}^{P2}e_{10})$. En cambio, Marta y Pilar decidieron combinar el uso de la pizarra ordinaria con el DGS durante toda su WGD.

2. El último episodio de la WGD de Pilar $({}^{P3}e_9)$ y también de la de Marta $({}^{P4}e_8)$ se focaliza en construir una figura con el doble de área respetando la semejanza con la original. Dicha representación requiere del uso de la raíz de 2 y, por eso, la cuestión es planteada por las docentes de forma algebraica sin entrar en los detalles de construcción y dibujo. No obstante, Luna no trató esta cuestión con sus alumnos y tampoco Luis, aunque en el $({}^{P1}e_5)$ lo menciona y reconoce no haberlo tenido en cuenta.

Para estudiar con detalle cada episodio nos basamos en los tipos de *acciones* presentados por Morera, Planas y Fortuny (2013) e ilustramos las relaciones que se producen entre ellas. Nos fijamos en quien ejecuta la acción (estudiante o profesor) y en su tipo: IPM, ID o AI, de acuerdo con la descripción realizada en el marco teórico del presente artículo. Para este resumen hemos detallado, a modo de ejemplo, el análisis de dos de los episodios.

La Figura 3 recoge el análisis del ($^{P1}e_5$) y la Figura 4 el estudio del ($^{P3}e_5$), episodios que se han seleccionado al ser considerados representativos tanto para ilustrar el procedimiento de análisis como el estilo de enseñanza de los profesores Luis y Pilar. Ambos incluyen un mismo ED, pero el TO es distinto porque cada docente los implementa de forma diferente.

Id.	**Texto de la transcripción**	***Acciones***
E.1:	¿Es la buena?	**IPM**: Petición de aclaración
E.2:	Entonces, ¿qué sería correcto? Porque una tiene 40 y la otra tiene 20.	**IPM**: Petición de aclaración
P1:	A ver, lo relativo a cuestiones lingüísticas… el doble de grande se refiere al doble de superficie. ¿Vale? Por tanto, esta opción es correcta, pero tampoco nos queda muy claro si se tenían que respetar las mismas proporciones.	**ID**: Realización de explicación
	Aquí, por lo que parece… yo tampoco lo he hecho ¿eh?... intentar conseguir el doble de área respetando las proporciones. De todas formas, es que el enunciado tampoco nos decía que debíamos respetar las proporciones. Solo nos decía que fuese el doble de grande: "otra".	**ID**: Invitación a la generalización
	Entendemos otra F el doble de grande respecto a la superficie. Yo lo veo así, vosotros parece que también.	**ID**: Establecimiento de consenso
	¿Vale, y el resto de gente al final lo que ha hecho es…?	**ID**: Invitación a la participación
E.3:	De cada cuadrado hacer un cuadro grande, hacer cuatro…	**IPM**: Exposición sin argumentación
P1:	Es decir, habéis duplicado directamente; habéis mantenido las proporciones respecto los lados.	**ID**: Ampliación o complemento de la explicación

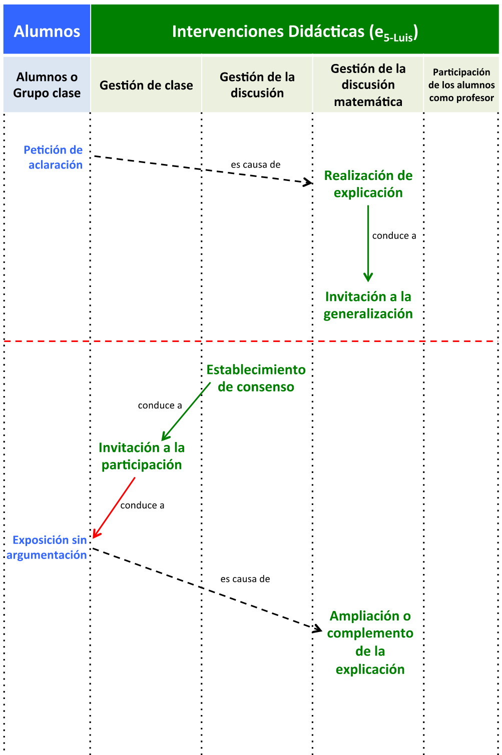


Figura 3. Análisis de las *acciones* del ($^{P1}e_5$)

El profesor Luis realiza cinco de las siete *acciones* de este breve episodio ($^{P1}e_5$) y sus explicaciones se apoyan en representaciones hechas en la pizarra con anterioridad. Así, el TO es *Explicar a través del artefacto* y, como se discute la adecuación de las dos posibles soluciones del problema sin estudiar la estrategia en sí misma, el ED es *Contraste entre diferentes soluciones*. Las explicaciones del profesor son extensas y únicamente en una ocasión realiza una pregunta con el propósito que sus estudiantes la contesten. En este caso el contraste no es entre las soluciones sino entre las diferentes formas de entender el enunciado, hecho que nos podría conducir a diferentes interpretaciones.

La parte derecha de la Figura 3 ilustra la clasificación de las *acciones* del episodio desde un punto de vista temporal. Observamos que en diversas ocasiones el origen y final de los conectores recae sobre el profesor, hecho que ilustra poca interacción entre los estudiantes y el docente, que es quien realiza la mayor parte de las explicaciones del episodio.

Id.	**Texto de la transcripción**	***Acciones***
P3:	¿Óscar, tú qué entendiste, es decir, por qué construiste esta [la profesora señala sobre la pantalla una figura que tiene el doble de perímetro respecto la original] y no esta otra [señala la figura con el doble de área]?	**ID**: Petición de explicación
E.1:	Porque estas dos son semejantes [refiriéndose a la F original y la que tiene el doble de perímetro].	**IPM**: Observación de evidencia empírica
P3:	Vale, por tanto, la definición de semejanza. ¿Qué creéis que son dos figuras semejantes?	**ID**: Petición de explicación
E.1:	Todos los lados multiplicados por un número, en todos los casos el mismo.	**IPM**: Justificación empírica
P3:	Vale, es decir ¿cómo son los lados?	**ID**: Petición de formalización
E.1:	Proporcionales.	**IPM**: Formalización
P3:	Proporcionales, vale.	**ID**: Validación
	¿Y además qué hace falta?	**ID**: Petición de explicación
E.2:	Que todos los ángulos sean iguales.	**IPM**: Observación de evidencia empírica
P3:	Es decir aquí chicos los ángulos no los comprobamos porque se trata de una F y es evidente que todos son de 90º, pero se debería hacer.	**ID**: Complemento de la explicación

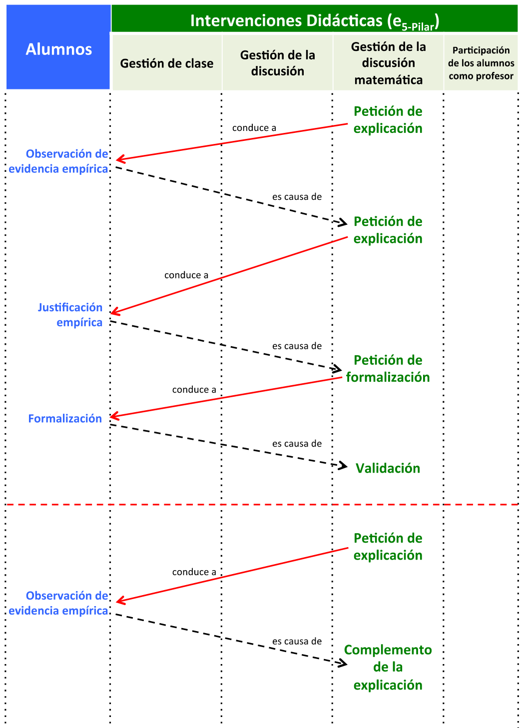


Figura 4. Análisis de las *acciones* del ($^{P3}e_5$)

La Figura 4 muestra el análisis del ($^{P3}e_5$), el cual presenta una duración parecida al ($^{P1}e_5$). En este caso también se consideran las diferencias entre las dos soluciones posibles, pero se encuentran representadas en la pantalla en lugar de la pizarra (ED: *Contraste entre diferentes soluciones*). La profesora Pilar dirige las preguntas al grupo clase para discutir y construir entre todos la definición de figuras poligonales semejantes (TO: *Discutir el artefacto*). Observamos que Pilar realiza seis de las diez intervenciones del episodio, pero mayoritariamente se trata de preguntas con contenido matemático dirigidas a sus alumnos y son los estudiantes quienes dan las respuestas. En comparación con Luis se detecta una mayor participación de los alumnos en el episodio y, solo al final, la profesora realiza una ID para complementar la exposición del Estudiante 2.

La parte derecha de la Figura 4 muestra la sucesión de las *acciones* del episodio y se detectan cadenas de preguntas y respuestas alternando la participación de la profesora y los alumnos.

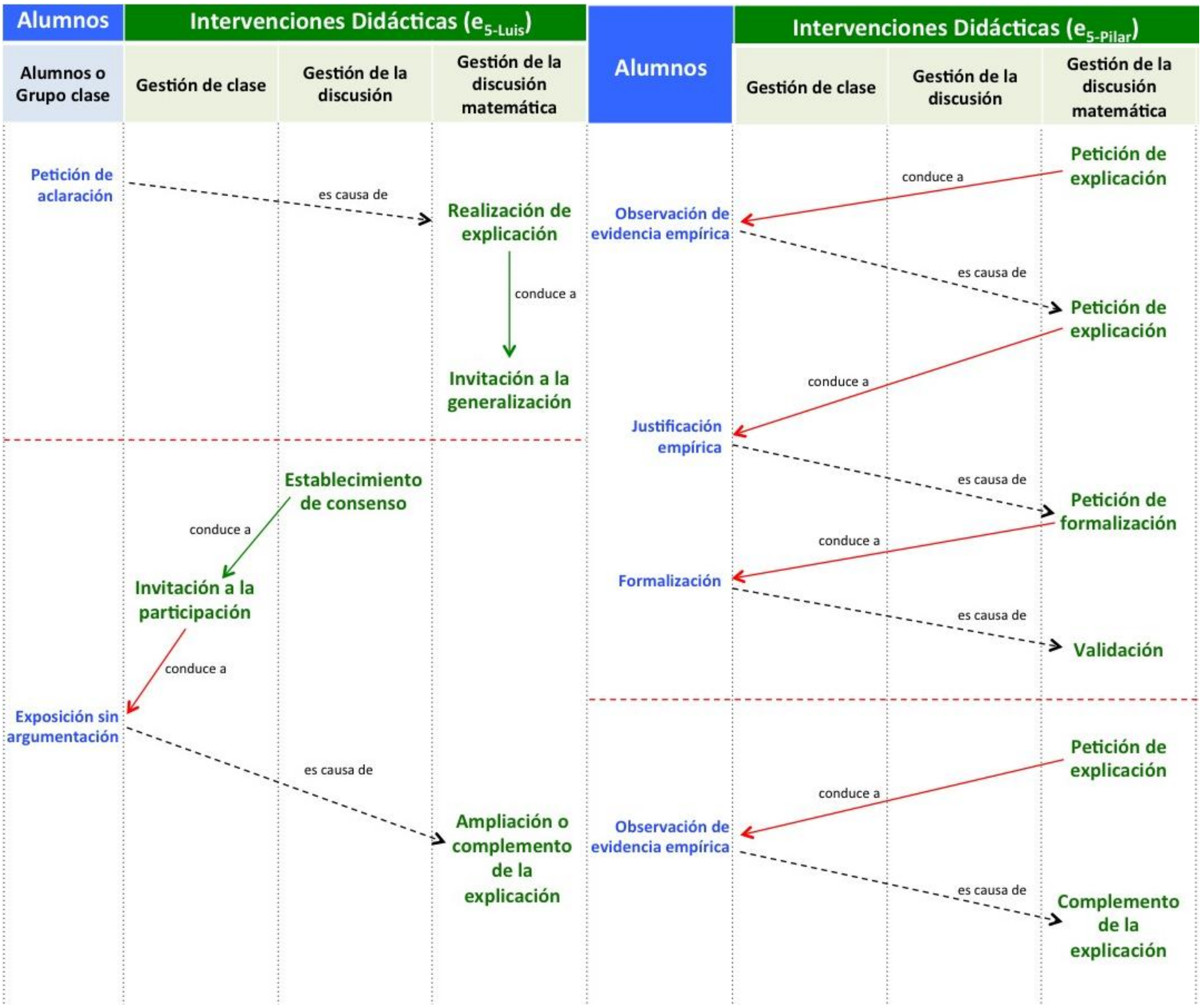


Figura 5. Comparación de las *acciones* de los episodios ($^{P1}e_5$) y ($^{P3}e_5$).

La Figura 5 muestra de forma comparativa las *acciones* detectadas en los episodios presentados en este análisis de datos. Los diagramas se consideran representativos del perfil de enseñanza seguido por cada profesor durante la implementación de su WGD. Así, los cinco episodios restantes de la WGD de Luis presentan un patrón de acciones análogo al ilustrado en este capítulo y lo mismo sucede con los demás episodios de la WGD de Pilar.

En los dos episodios ($^{P1}e_5$) y ($^{P3}e_5$) el punto de partida es el mismo ya que se dispone de las dos soluciones posibles del problema (duplicar el perímetro o el área de la figura original). No obstante, Luis no aprovecha esta situación para introducir el concepto matemático de semejanza y realiza explicaciones generales sobre el significado de cada una de ellas. Hay poca participación de los alumnos y el diagrama (Figura 5 – Izquierda) tiene una estructura centrada en las explicaciones del docente. En cambio Pilar utiliza las dos soluciones del problema para introducir preguntas que conduzcan a los estudiantes a la definición de semejanza. La profesora no realiza explicaciones sino que a través de las preguntas que formula y las respuestas de sus alumnos consigue enunciar la definición mencionada. La estructura del diagrama (Figura 5 – Derecha) presenta una sucesión encadenada de intervenciones entre la profesora y sus estudiantes.

Aunque no se muestra en este artículo el proceso seguido para clasificar las *acciones* de las WGD de Luna y Marta ha sido completamente análogo y los diagramas obtenidos muestran la misma estructura que los de la profesora Pilar.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Interpretamos los datos en dos ámbitos, uno sobre la importancia de la sistemática y el otro sobre los estilos de enseñanza (EE):

Importancia de la sistemática para implementar eficazmente una WGD.

El *árbol del problema* y especialmente la práctica de *anticipación* se han postulado como herramientas adecuadas para gestionar de forma eficiente la WGD y profundizar en el tratamiento matemático de la actividad. Hemos presentado diferencias relevantes entre las sesiones de los cuatro profesores:

a. Luis y Luna, que no utilizaron la sistemática, no trataron el problema para introducir y definir con rigor el concepto de figuras poligonales semejantes.

b. Las profesoras Marta y Pilar dedican una parte de sus WGD a estudiar con los alumnos la construcción de una figura con el doble de área y que respete la semejanza con la original.

Ambas cuestiones están recogidas en el *árbol del problema* y, como detallan Smith y Stein (2011), es importante anticipar de qué manera las respuestas de los estudiantes se relacionan con representaciones, procedimientos y prácticas que el profesor desea que sus alumnos aprendan para conseguir una implementación productiva de la WGD.

El análisis global de las cuatro WGD, su división en episodios basándonos en las dos dimensiones propuestas por Morera, Planas y Fortuny (2013) y su distribución en forma de tabla relacionando el TO y el ED ha resultado útil para caracterizar globalmente la WGD de cada docente investigado y determinar diferencias generales entre ellas.

Se detectan tres EE en las WGD que se sintetizan en los perfiles docentes siguientes:

- *EE A – Orquestación centrada en el profesor y tratamiento insuficiente de los estadios de la discusión.*

El TO que define la mayoría de los episodios se centra en el profesor, el cual focaliza la discusión en *Explicar a través del artefacto* y permite poca participación de los alumnos. La distribución de los ED es ordenada respecto a los que corresponden a momentos iniciales de la discusión y los relativos a instantes finales, y no se detectan repeticiones de episodios que traten de forma especial algún ED. Un ejemplo de este EE es el profesor Luis.

- *EE B – Orquestación centrada en los estudiantes y tratamiento desordenado y completo de los estadios de la discusión.*

Focaliza la gestión de sus clases en la figura del alumno y las pocas intervenciones del profesor orientan el debate para que los estudiantes elaboren sus explicaciones y razonamientos matemáticos. La distribución de los ED no sigue una secuencia ordenada y se produce una acumulación importante de episodios en *Presentación de una solución* y *Estudio de diferentes estrategias para resolver o argumentar*. Un ejemplo de este EE son las profesoras Luna y Marta.

- *EE C – Orquestación centrada equilibradamente entre el profesor y los alumnos, y tratamiento ordenado y completo de los estadios de la discusión.*

El TO de sus episodios se reparte casi por igual entre la figura del profesor y la del alumno. La distribución de los ED es ordenada y no se detectan repeticiones relevantes de episodios en ningún ED. Un ejemplo de este EE es la profesora Pilar.

En el análisis de los elementos característicos de los tres EE se sugiere que el patrón que siguen las *acciones* en el episodio puede ser propio de la tipología del profesor. Así, se observan diferencias entre el EE-A, y los EE-B y EE-C.

Por ejemplo, Luis (EE-A) realiza la mayor parte de las *acciones* de los episodios de su WGD. Esto se interpreta debido a las pocas preguntas que el profesor lanza a sus estudiantes y al gran número de explicaciones que realiza. En cambio, los diagramas de la profesora Pilar (EE-C) presentan sucesiones encadenadas de preguntas y respuestas, confeccionando un patrón de participación alternando intervenciones de profesora y alumnos. Un estudio análogo realizado en las WGD de las profesoras Luna y Marta (EE-B), el cual no se muestra en esta comunicación, ilustra el mismo patrón de *acciones* que el descrito por Pilar.

CONCLUSIONES

Si profundizamos en el orden de los ED en la WGD de cada profesor, observamos que el EE-B puede dividirse en dos estilos adicionales, hecho que permite concluir la comunicación determinando cuatro estilos locales de enseñanza:

EE-A: Magistral. La orquestación está centrada en el profesor y se produce una distribución secuencial, pero un tratamiento incompleto de los ED. Se ejemplifica con el profesor Luis.

EE-B.1: Interactivo y no secuencial. La orquestación se centra en el alumno y se produce un tratamiento bastante completo de los ED. Su distribución no es secuencial y se detectan acumulaciones en los tipos B y C. Un ejemplo es la profesora Luna.

EE-B.2: Interactivo y secuencial. El TO está centrado en el alumno y se realiza un tratamiento bastante completo de los ED. La distribución es secuencial y se producen acumulaciones en los tipos B y C. Se ejemplifica con la profesora Marta.

EE-C: Equilibrado. El TO es equilibrado entre la figura del profesor y los alumnos. Se detecta una distribución secuencial y un tratamiento bastante completo de los ED. Un ejemplo es la profesora Pilar.

La clasificación anterior es local y está centrada en el análisis de la WGD de la AIN-1. Por el momento no tenemos evidencias para afirmar que representa un comportamiento general del profesor en una situación de clase distinta. En futuras investigaciones habrá que establecer una correspondencia más amplia y detallada entre el estilo de enseñanza del profesor y la forma como se distribuyen las *acciones* en sus episodios. En este sentido se debería seguir en la línea del análisis de la argumentación y de la participación de Krummheuer (2012), distinguiendo los denominados *períodos condensados de interacción* y los *períodos suaves de interacción*. Asimismo, habría que encontrar evidencias para determinar qué estilos de enseñanza favorecen la aparición de un mayor número de oportunidades de aprendizaje, hecho que podría traducirse como un índice de mayor aprendizaje de los estudiantes.

Referencias

Aguilera, E. (2012). Los estilos de enseñanza, una necesidad para la atención de los estilos de aprendizaje en la educación universitaria. *Review of Learning Styles*, 10, 79-87.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75, 213-234.

Gairín, J.M., y Oller, A.M. (2012). Análisis histórico sobre la enseñanza de la razón y la proporción. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 249 - 259). Jaén: SEIEM.

Krummheuer, G. (2012). El aprendizaje matemático como participación en procesos de argumentación colectiva. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 61-79). Barcelona: Graó.

Morera, L. (2013). Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología (Tesis de Doctorado). Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra, España.

Morera, L., Planas, N., y Fortuny, J. M. (2013). Design and validation of a tool for the analysis of whole group discussions in the mathematics classroom. En B. Uhuz (Ed.), *Proceedings of the 8th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (en prensa). Antalya, Turquía: CERME.

Smith, M., y Stein, M. K. (2011). Five practices for orchestrating productive mathematics discussions. Reston, VA: NCTM.

OPORTUNIDADES QUE BRINDAN ALGUNOS ESCENARIOS PARA MOSTRAR EVIDENCIAS DEL MTSK[xxi]

Opportunities offered by some scenarios for showing MTSK' evidences

Eric Flores, Dinazar I. Escudero y Álvaro Aguilar

Universidad de Huelva

Resumen

Este trabajo plantea por objetivo señalar algunas oportunidades que brindan distintos escenarios para indagar acerca del conocimiento que utiliza el profesor de matemáticas en dichos contextos. Utilizamos como marco de referencia el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge, modelo teórico desarrollado recientemente con fines de exploración analítica del conocimiento del profesor. Los episodios analizados son obtenidos con diferentes acercamientos metodológicos, toda vez que nuestra intención es proporcionar escenarios en los cuales es factible observar y sistematizar evidencias de conocimiento. En las conclusiones presentamos una discusión acerca de cómo este estudio ayuda en la identificación de acercamientos metodológicos pertinentes para la exploración del conocimiento del profesor.

Palabras clave: *conocimiento especializado, profesor de matemáticas, escenarios de análisis.*

Abstract

The aim of this paper is to show some opportunities offered by different scenarios to inquire about the knowledge that mathematics teacher uses in this context. We use the Mathematics Teacher's Specialised Knowledge as a reference framework, this is a new theoretical model developed for teachers' knowledge analytical exploration. Analysed episodes were obtained with different methodological approaches, because our intention is to provide scenarios in which we can observe and systematize evidence of knowledge. In the conclusions we introduce a discussion about how this research helps to identify pertinent methodological approaches to inquire about teachers' knowledge.

Keywords: *specilalised knowledge, mathematics teachers, analysis scenarios*

INTRODUCCIÓN

Las investigaciones que indagan sobre el conocimiento del profesor de matemáticas han dado como resultado el surgimiento de diferentes modelos que proporcionan una explicación acerca del contenido y naturaleza de dicho conocimiento. Así, tenemos los tres modelos discutidos en el *Research Fora* del PME en 2009 titulado *Teacher knowledge and teaching: considering a complex relationship through three different perspectives* (Ball, Charalambous, Thames, & Lewis, 2009). Dichas perspectivas son el *Mathematics for Teaching* de Davis, & Smith (2006), el *Knowledge Quartet* de Rowland, Huckstep, & Thwaites (2005) y el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) de Ball, Thames, & Phelps (2008).

A partir de estos, han surgido nuevos modelos, ya sea como reflexión sobre algunos aspectos particulares (e. g., el *Knowledge for Algebra Teaching* de McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, [2012] como una particularización, dada por la enseñanza de álgebra, de diversos modelos para estudiar el conocimiento del profesor) o como reacción a situaciones que presentan dificultades en la investigación (e. g., el *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge* [MTSK] de

Flores, E., Escudero, D. I., y Aguilar, A. (2013). Oportunidades que brindan algunos escenarios para mostrar evidencias del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 275-282). Bilbao: SEIEM.

Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán [en prensa] como respuesta a una necesidad de corte analítico y de delimitación). Nosotros trabajamos con este último, con el MTSK.

Cuando surge un modelo, surgen también muchas preguntas: ¿para qué y por qué se crea?, ¿qué aporta respecto de los modelos existentes?, etcétera. Nosotros nos centramos en avanzar en la línea de identificar la potencialidad que ofrecen distintos escenarios al momento de indagar sobre el conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Nos basamos en parte de los datos empíricos recabados en las tesis doctorales de los autores de esta comunicación, las cuales comparten marco de referencia. Los profesores informantes son distintos, así como el método de recogida de información, lo cual no representa una limitación, ya que nuestra intención es aportar evidencias de la potencialidad de cada uno de estos escenarios.

MARCO DE REFERENCIA

El MTSK es un modelo teórico para estudiar, de forma analítica, el conocimiento del profesor de matemáticas. Surge como respuesta a problemas de delimitación entre los subdominios del MKT y a dificultades en su utilización para investigar elementos particulares de conocimiento (e. g., Flores, Escudero, & Carrillo, en prensa; Sosa, & Carrillo, 2010). Considera los avances y propuestas provenientes de distintos modelos de conocimiento profesional del profesor (e. g., Shulman, 1986; Ball *et al*, 2008, Rowland *et al*, 2005), en particular, la distinción en dos dominios de conocimiento, el Conocimiento Matemático (MK, de aquí en adelante, todas las siglas se corresponden con la traducción al inglés) y el Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK). Estos dominios son a su vez divididos en subdominios de conocimiento (Carrillo *et al*, en prensa) de la siguiente forma:

Dentro del MK se consideran los siguientes subdominios:

Conocimiento de los Temas (KoT): el contenido de este subdominio incluye aspectos fenomenológicos, significados, definiciones, ejemplos…, que caractericen aspectos del tema abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM): entendemos que el conocimiento matemático del profesor debe incluir un sistema integrado de conexiones que le permita comprender y desarrollar conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y conceptos elementales mediante el tratamiento a través de una visión avanzada.

Conocimiento de la Práctica Matemática (KPM): incluye el conocimiento de las formas de conocer, crear o producir en matemáticas (conocimiento sintáctico según Schwab, 1978), conocimiento de aspectos de la comunicación matemática, del razonamiento y la prueba. Saber, por ejemplo, qué es definir y cómo usar definiciones.

En el PCK ubicamos los subdominios:

Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas (KMT): incluye conocer distintas estrategias que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales. Conocer la potencialidad de recursos, ejemplos o modos de representación (Shulman, 1986) para hacer comprensible un contenido determinado.

Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM): se refiere al conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes sobre los distintos contenidos, del lenguaje asociado a cada concepto, así como de errores, dificultades u obstáculos posibles.

Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS): es el conocimiento que posee el profesor acerca de lo que el estudiante debe/puede alcanzar en un curso escolar determinado. Es aquello que el profesor sabe sobre las capacidades conceptuales, procedimentales y de razonamiento matemático que se promueve en determinados momentos educativos. Consideramos, además de lo prescrito en el currículo institucional, lo que proviene de las investigaciones y de las opiniones de profesores expertos acerca de logros de aprendizaje.

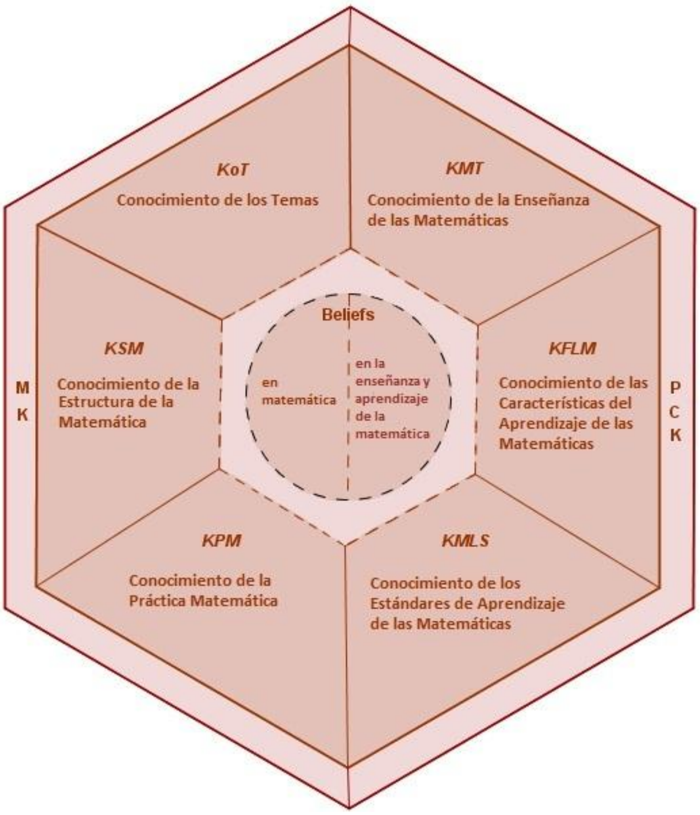


Figura 3. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al*, en prensa).

En el MTSK, las concepciones que el profesor tiene acerca de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje están consideradas como elementos que permean sus conocimientos y, por lo tanto, dan sentido a las diferentes acciones que éste realiza. No ahondaremos más en este punto por no tratarse de un elemento central en este trabajo.

OBTENCIÓN DE LOS DATOS EMPÍRICOS

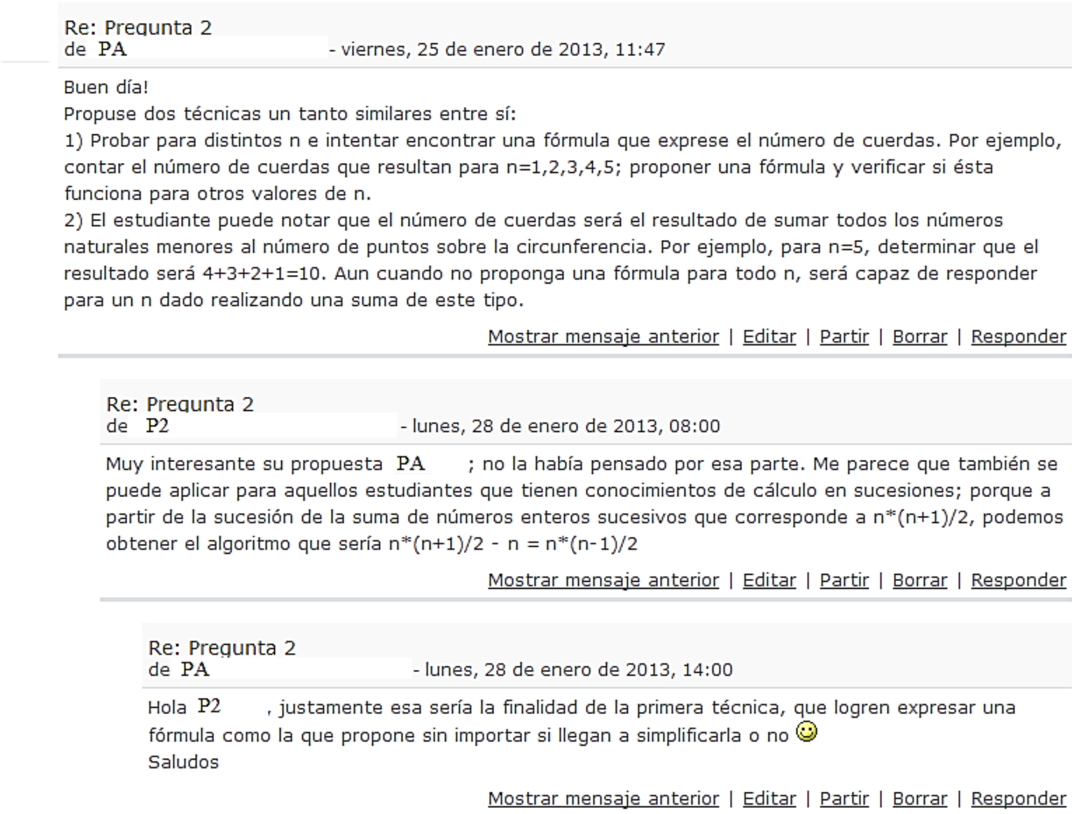
Los datos que presentamos son los análisis de episodios que forman parte de tres trabajos doctorales. No expondremos la intención particular de cada una de esas tesis, ya que el análisis aquí realizado resalta las oportunidades de exploración del MTSK que brindan los diferentes escenarios en los que se investiga el conocimiento del profesor.

Los escenarios fueron elegidos buscando cubrir distintos aspectos de la labor del profesor. Así, la profesora A fue analizada en un escenario de formación continua, la profesora B en la acción con sus alumnos y el escenario del profesor C fue la planificación de actividades para clase.

Profesora A

La profesora A es mejicana, imparte el curso de *pre-cálculo* en el primer semestre de la licenciatura en matemáticas. El siguiente episodio (Figura 2) es un fragmento de las participaciones que realizó en foros de discusión (en Moodle) que corresponden a actividades de la maestría (máster) en Matemática Educativa que cursaba.

Este episodio forma parte de la primera actividad del curso de Teoría de Situaciones Didácticas, en la cual se pide a los profesores que resuelvan *el problema de las cuerdas* (se colocan *n* puntos sobre una circunferencia. ¿Es posible determinar el número de todas las cuerdas que pueden trazarse?) y que posteriormente diseñen una guía pedagógica para implementarlo en el aula. Para finalizar la actividad los profesores discuten en un foro sobre las diferentes técnicas visualizadas para resolver el problema.



Re: Pregunta 2
de PA - viernes, 25 de enero de 2013, 11:47

Buen día!
Propuse dos técnicas un tanto similares entre sí:
1) Probar para distintos n e intentar encontrar una fórmula que exprese el número de cuerdas. Por ejemplo, contar el número de cuerdas que resultan para n=1,2,3,4,5; proponer una fórmula y verificar si ésta funciona para otros valores de n.
2) El estudiante puede notar que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia. Por ejemplo, para n=5, determinar que el resultado será 4+3+2+1=10. Aun cuando no proponga una fórmula para todo n, será capaz de responder para un n dado realizando una suma de este tipo.

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de P2 - lunes, 28 de enero de 2013, 08:00

Muy interesante su propuesta PA ; no la había pensado por esa parte. Me parece que también se puede aplicar para aquellos estudiantes que tienen conocimientos de cálculo en sucesiones; porque a partir de la sucesión de la suma de números enteros sucesivos que corresponde a n*(n+1)/2, podemos obtener el algoritmo que sería n*(n+1)/2 - n = n*(n-1)/2

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Re: Pregunta 2
de PA - lunes, 28 de enero de 2013, 14:00

Hola P2 , justamente esa sería la finalidad de la primera técnica, que logren expresar una fórmula como la que propone sin importar si llegan a simplificarla o no 🙂
Saludos

Mostrar mensaje anterior | Editar | Partir | Borrar | Responder

Figura 2. Fragmento del foro en el que interactúan la profesora (PA) y un compañero de maestría (P2), los nombres reales se ocultaron.

Profesora B

La profesora B es española, imparte clase de matemáticas en quinto de primaria. Los datos obtenidos son extraídos de la transcripción textual de videograbaciones de la puesta en práctica de una unidad didáctica sobre geometría cuya duración fue de dos semanas.

B ha discutido con sus alumnos la definición de polígonos y las características de éstos (ángulos, vértices y lados). Utiliza una trama de puntos para que sus alumnos puedan dibujar las figuras. En un momento de la clase, pregunta sobre el número mínimo de lados que debería tener una figura plana para que fuese un polígono. Sus estudiantes responden que serían tres lados. B dibuja un triángulo como el que se muestra en la Figura 3.

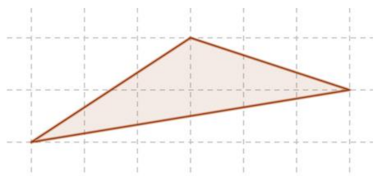


Figura 3. Triángulo dibujado por B

El siguiente episodio es la transcripción textual de las intervenciones de B ante los cuestionamientos de un estudiante (E1) provocados por el dibujo que aparece en la Figura 3:

E1: *¿Pero hay que dibujar triángulos normales o...?*

B: *No hay triángulos normales, E1.*
E1: *No, digo ése* [señala el de la pizarra].
B: *Éste es normal, ¿por qué no va a ser normal? ¿Qué le pasa para que sea anormal?* […]
E1: *Porque tiene la base...*
E2: *Está de lado, ¿no?,*
E1: *La superficie...*
B: *¿Qué le pasa a la superficie?*
E1: *Que está como así, como torcida* [por los gestos se deduce que E1 se refiere a que la base no coincide con la horizontal].
B: *No está torcida, yo no la veo torcida,* [...] *no lo veo raro, E1. ¿Le veis vosotros algo raro?* [Refiriéndose a toda la clase]

Casi todos dicen que no, uno de ellos le indica a B que gire la hoja hasta que coincida un lado con la horizontal.

B: *¿Así te gusta más?* [Siguiendo la indicación dada por el niño].
E1: *Sí.*
B: *Así te gusta más, ¿no? ¿Y ya así es normal? ¿Y así no es normal?* [Volviendo a poner el triángulo en la posición original].

Profesor C

El profesor C es mejicano. Da clase de matemáticas a un grupo de primero de secundaria (séptimo grado).

El escenario del que se extrae el episodio es la *Planificación de Actividades*. Dicha planificación corresponde al Bloque III de ese curso y plantea que el aprendizaje esperado será que el estudiante sea capaz de resolver problemas que impliquen los distintos tipos de ecuaciones de la forma $ax+b=0$, cuando a y b son números reales positivos. La planificación consta de una secuencia pensada para cinco sesiones de 50 minutos cada una, cuyo argumento central es calcular costes de compra y transporte de banderas olímpicas.

En la primera parte de la actividad, C proporciona los costes unitarios de las banderas que son diferentes en relación con sus dimensiones, y el coste de transportarlas, que es fijo sin importar la cantidad de banderas compradas, ni las dimensiones de estas. Está pensada para que los estudiantes propongan una expresión *general* para calcular el coste de comprar y transportar una bandera sin importar el tamaño que ésta tenga.

La segunda parte, que será nuestro objeto de análisis, consta de una serie de rectas colocadas en un plano cartesiano, todas cruzan por el origen y tienen diferentes pendientes. Representan, según el profesor C, “algunas compras de banderas con distinto precio” sin considerar el valor de transportarlas, menciona además que “son resultado de distintas ecuaciones”. Pide a los estudiantes que, con base en la información de precio unitario que se puede extraer de la gráfica, se determine el coste de más de una bandera. Algunos casos pueden ser resueltos a través de las gráficas y otros requieren ser calculados.

En la tercera parte afirma:

> “una ECUACIÓN es una de las formas en que podemos representar una FUNCIÓN, la gráfica en el plano cartesiano es otra y una forma muy común de representar funciones es de manera explícita, mediante todas la palabras que explican la relación existente entre los miembros de la igualdad”.

ANÁLISIS DE LOS DATOS EMPÍRICOS

El análisis se focalizó en dos aspectos: señalar oportunidades para mostrar evidencias de conocimiento para un determinado subdominio y resaltar cómo el escenario propició esa oportunidad. No pretendemos generar una propuesta *causa-efecto*, sino aportar evidencias de oportunidades que un determinado contexto provee para estudiar aspectos del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

Profesora A, subdominios KFLM, KPM, KoT y KMT

El fragmento de discusión que se generó en el foro nos permitió identificar oportunidades para profundizar en aspectos relacionados con cuatro subdominios, mediante la reflexión sobre declaraciones de A:

Declaración 1: Las dos técnicas que A propone en el foro hacen énfasis en formas de pensamiento y acción que podría tener un estudiante al momento de responder el problema. La asociación que hace A de las técnicas con los modos de proceder de sus estudiantes y con los conocimientos que pudieran poner en práctica, nos permite identificar un intento de anticipación, la cual nos brinda la oportunidad de explorar sobre el KFLM en el que se apoya para realizar esa anticipación.

Declaración 2: En otro momento, la profesora A pide que los estudiantes propongan una fórmula y verifiquen si ésta funciona para otros valores de n, lo cual nos invita a cuestionarnos acerca de las similitudes y diferencias que encuentra A entre la *verificación* a la que se refiere y la demostración de la generalidad en las fórmulas que propondrían los estudiantes. Esto nos ofrece una oportunidad para indagar acerca de los aspectos de conocimiento que la profesora involucra alrededor de la práctica de demostrar en matemáticas, que lo ubicamos en KPM.

Declaración 3: En su aportación, P2 señala un tema concreto que le permitiría al estudiante plantearse la posibilidad de llegar a una generalidad e incluso conocer la expresión en la que se basa dicha generalidad. La profesora A asocia ese razonamiento a su *primera* propuesta. Parece que ella no se diera cuenta de que el profesor hace referencia a una forma de avanzar en la *segunda* propuesta. De esta interacción podemos identificar un momento oportuno para indagar acerca de lo que la profesora entiende del razonamiento que propone P2, en términos de hacer explícito el KoT que utiliza la profesora con relación, tanto a la fórmula que propone P2, como a los otros posibles procedimientos que pueda concebir ella para resolver el problema.

Declaración 4: Identificamos también un último momento con potencial para discutir acerca de la gestión que A haría del recurso, cuando habla de que sus estudiantes *pueden notar* que el número de cuerdas será el resultado de sumar todos los números naturales menores al número de puntos sobre la circunferencia, lo cual nos da oportunidad de preguntar a la profesora sobre su papel como guía de la actividad, haciendo referencia a lo que podría hacer ella para ayudar al estudiante a establecer esa relación, lo que posibilita obtener información del KMT.

De los foros valoramos las aportaciones provenientes de la discusión entre pares sobre aspectos puntuales, ya que, al tener la opción de discutir cada aportación (los mensajes individuales), se focaliza de mejor manera las oportunidades de explorar elementos de conocimiento sobre dicho aspecto puntual, ayudando al análisis que realizamos en nuestros estudios con el MTSK.

Profesora B, subdominios KMT y KoT

La maestra utiliza un triángulo en posición no estándar. La reacción de un estudiante pone de manifiesto la oportunidad de profundizar en las opciones metodológicas que sigue la profesora en su curso, viendo, por ejemplo, qué valoración hace de enfrentar a los estudiantes con situaciones poco habituales. Además, la profesora aborda la dificultad que asalta al estudiante, cuestionando las suposiciones de éste, pidiendo explicaciones, y consensua lo entendido con el grupo, lo cual nos proporciona la oportunidad de preguntarnos si ese modo de actuar es habitual y además explorar el conocimiento que pone en juego cuando decide cómo afrontar dificultades expresadas por los estudiantes y cómo aprovecha las participaciones de éstos, sobre todo las erradas, lo que consideramos en el KMT.

Por otro lado, ante la clasificación de *normal* y *anormal* que propone E1, encontramos una oportunidad para explorar el conocimiento que posee B de la clasificación de triángulos y otras figuras planas y de la caracterización de sus elementos, y así profundizar en su KoT.

Vemos las transcripciones textuales de videograbaciones como soporte del escenario de la actuación del profesor, permitiéndonos así el registro de todas las interacciones ocurridas entre éste y los alumnos, y las que se generan entre los alumnos. Nos presenta la oportunidad de conectar elementos aislados de la clase para determinar conjuntos de conocimientos y de analizar cómo estos se adaptan a una intencionalidad perceptible. Además de brindarnos la posibilidad de tener una primera imagen de los conocimientos que pueden ser sistematizados, también nos da la oportunidad de encontrar coherencia entre aspectos que parecieran estar desasociados entre sí en una o varias clases.

Profesor C, subdominio KSM

En el análisis de la planificación del profesor C, decidimos, para esta comunicación, señalar aspectos puntuales que nos brindan oportunidades de adentrarnos en el estudio del KSM, particularmente, en los conocimientos que sustentan las conexiones interconceptuales (Martínez, Giné, Fernández, Figueiras, Deulofeu, 2011) que realiza entre tres temas *diferentes*.

La noción *función matemática* tiene un papel central en el episodio descrito. El profesor relaciona la *ecuación* con una particularidad de la *función*, lo cual invita a profundizar en cómo y por qué las relaciona, más aún, se detecta que en la tercera parte de la actividad asocia el término ecuación con la representación analítica de la función, lo que nos inspira la generación de mecanismos para explorar más a fondo esa conexión, y así considerar, por ejemplo, preguntarle sobre el papel de la igualdad en una ecuación y en una función.

Por otro lado, el hecho de que las rectas graficadas en realidad no representan el fenómeno trabajado, permite la oportunidad de explorar relaciones entre las ecuaciones y un tipo particular de función, que es la que tiene dominio discreto, es decir, se presenta otra oportunidad de explorar las relaciones que el profesor puede establecer entre las sucesiones (vistas como funciones de **N** en **R**) y las ecuaciones.

Con lo anterior no queremos decir que el KSM se reduzca a analizar cómo el profesor conecta temas porque estos hayan aparecido en su planificación. Hemos elegido estos (ecuación, función y sucesión) porque el fenómeno que elige C para desarrollar su actividad da sentido a dichas conexiones.

Consideramos que analizar la planificación nos permite tener una panorámica de posibles aspectos de conocimiento para investigar en alguna otra práctica del profesor, en particular, para esta comunicación identificamos oportunidades para investigar en los aspectos de conocimiento matemático poniendo atención a dos: los conceptos matemáticos que el profesor deseaba comunicar a los estudiantes y los conceptos que él tomaba como base para plantear los anteriores.

CONCLUSIONES

Los resultados de esta comunicación han sido ampliamente presentados en la sección anterior. Son en torno a la potencialidad de ciertos escenarios al momento de investigar sobre el conocimiento del profesor.

Se da una relación simbiótica entre los episodios y el MTSK, donde el modelo nos proporciona una mirada *focalizada* para explorar oportunidades para profundizar en elementos de conocimiento de diferentes naturalezas y cuya exploración alimentará el contenido de cada subdominio. Los escenarios con los que realizamos esta investigación fueron elegidos buscando variedad: lo que pasa en una clase, lo que planifica un profesor y la discusión entre pares. En todos ellos encontramos oportunidades para profundizar provenientes de la propia configuración del escenario.

Entendemos que dicha profundización requiere de una adecuada triangulación con otros instrumentos y acercamientos metodológicos, cuyos resultados serán de una naturaleza distinta a los aquí reportados.

Referencias

Ball D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59* (5), 389-407.

Ball, D.L., Charalambous C.Y., Thames M., & Lewis J.M. (2009). RF1: Teacher knowledge and teaching: viewing a complex relationship from three perspectives. En M., Tzekaki, M., Kaldrimidou, & H., Sakonidis (Eds.).*Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *1*, p.121-150.Thessaloniki, Greece: PME.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (en prensa). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Davis B., & Simmt E. (2006). Mathematics for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(3), 293-319.

Flores, E., Escudero, D., & Carrillo, J. (en prensa). A theoretical review of Specialised Content Knowledge. *Proceedings of the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education*. Antalya, Turquía: CERME.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M., Marín, G., Fernández, L.J., Blanco, & M., Palarea (Eds) *Investigación en Educación Matemática XV*, 429-438. Ciudad Real: SEIEM.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: Framework of knowledge and practices. *Journal for Research in Mathematics Education*, *43*(5), 584-615.

Rowland, T., Huckstep P., & Thwaites A. (2005). Elementary teachers´ mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281.

Schwab, J.J. (1978). Education and the structure of the disciplines. En I. Westbury, & N.J. Wilkof (Eds). *Science, curriculum and liberal education*, 229-272, University of Chicago Press: Chicago.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association*, *15*(2), 4-14.

Sosa L. y Carrillo J. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds), *Investigación en Educación Matemática XIV*, 569-580. Lleida: SEIEM.

[xxi] Los autores son miembros del proyecto de investigación "Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

VALORACIÓN DE LA IDONEIDAD MATEMÁTICA DE TAREAS

Assessment of mathematic suitability of tasks

Vicenç Font y Marta Adán

Universitat de Barcelona

Resumen

En este trabajo se explica el diseño e implementación de un ciclo formativo para investigar el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en un proceso de formación dirigido a futuros profesores de matemáticas. En particular se focaliza en el diseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para la valoración de la idoneidad matemática de una secuencia de tareas, uno de los componentes de dicha competencia.

Palabras clave: ***c****ompetencia en análisis didáctico, formación de profesores, tareas, idoneidad epistémica.*

Abstract

In this paper we describe the design and implementation of task sequences for the development of the competence in didactic analysis in the training of pre-service teachers of secondary school mathematics. In particular, our goal is the task design that promotes the emergence of theoretical tools for the assessment of mathematic suitability of a sequence of tasks, one component of this competence.

Keywords: *competence in didactic analysis, teachers training,* tasks, *epistemic suitability.*

Font, V. y Adán., M. (2013). Valoración de la idoneidad matemática de tareas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 283-291). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

Los currículos de secundaria por competencias conllevan el problema de cómo conseguir que los profesores tengan la competencia profesional que les permita el desarrollo y la evaluación de las competencias matemáticas señaladas en el currículo. Dicho problema lleva a las siguientes preguntas: ¿Cuáles son las competencias profesionales que permiten a los profesores desarrollar y evaluar las competencias, generales y específicas de matemáticas, prescritas en el currículum de secundaria? ¿Cómo desarrollarlas y evaluarlas? En nuestro caso, en el marco de dos proyectos de investigación (ver agradecimientos), estamos interesados en investigar, entre otros, los siguientes aspectos relacionados con estas preguntas:

1) Caracterizar competencias profesionales en la formación inicial del futuro profesor de matemáticas de secundaria, sus grados y descriptores.

2) Diseñar ciclos formativos para el desarrollo y evaluación de competencias profesionales del futuro profesor.

Estos aspectos se pueden vincular mediante el esquema de la figura 1 que muestra la relación que hay entre las tareas de un ciclo formativo y el desarrollo (y evaluación) de competencias profesionales. De acuerdo con este esquema, nos interesa analizar las prácticas de los profesores para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de grados de desarrollo de la competencia profesional que se pretende evaluar.

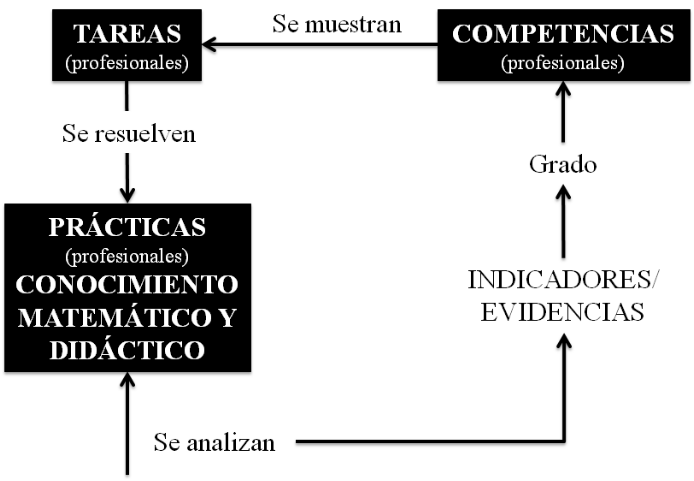


Figura 1. Evaluación y desarrollo de competencias profesionales.

En este trabajo se explica una parte del esquema de la figura 1 para investigar el desarrollo de la competencia en análisis didáctico en un proceso de formación dirigido a futuros profesores de matemáticas. En particular se focaliza en el diseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para la valoración de la calidad matemática del proceso de instrucción (entendida como una noción multidimensional que contempla aspectos como la falta de errores, la riqueza y relevancia de procesos matemáticos activados, la representatividad de la complejidad del objeto matemático que se enseña, etc.), uno de los componentes de dicha competencia.

MARCO TEÓRICO

En este apartado comentamos los elementos teóricos que se han tenido en cuenta.

Competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción

En la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz (Wilson, Cooney & Stinson, 2005; Hill, Blunk, Charambous, Lewis, Phelps, Sleep & Ball, 2008).

Entre las agendas de investigación que ponen el énfasis en las competencias que deben desarrollar los profesores para realizar procesos de instrucción de calidad hay que resaltar: 1) Las que consideran que el profesor debe desarrollar la competencia "mirar con sentido"; la cual le permite ver las situaciones de enseñanza aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de matemáticas (Mason, 2002), y 2) Las que se desarrollaron en el marco del enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007). En este enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción, cada uno de ellos con sus respectivas herramientas: a) Análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción. b) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas. c) Análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción. d) Identificación del sistema de normas y metanormas que regulan el proceso de instrucción. e) Utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo. Este tipo de análisis didáctico tiene por objetivo que el profesor tenga instrumentos para describir, explicar, valorar y mejorar dichos procesos.

Estas investigaciones coinciden (o al menos no contradicen) en que una de las competencias profesionales que debe tener el profesor de matemáticas es la competencia en análisis didáctico de secuencias de tareas, que le permita su diseño, aplicación, valoración y mejora.

El desarrollo y evaluación de la competencia en análisis didáctico implica analizar las prácticas profesionales de los futuros profesores de secundaria de matemáticas para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de niveles de desarrollo a dicha competencia. En este esquema el diseño de tareas tiene un papel muy relevante.

Diseño de tareas

Recientemente ha aumentado mucho el interés sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad. Este interés se manifestó en la creación, en el *The International Congress on Mathematics Education* del 2008, *del Topic Study Group*, *Research and development in task design and analysis*; y en la celebración de un ICMI *Study* específico sobre este tema en el año 2013, siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores.

Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.) a los alumnos; éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. La investigación sobre el diseño de tareas se interesó por diferentes aspectos. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Charalambus (2010) el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez, Font y Vanegas (2013) en el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Calidad matemática

Las reflexiones (e investigaciones) sobre la calidad matemática de los procesos de instrucción de las matemáticas son numerosas en el área de Educación Matemática. Todas ellas ponen de manifiesto que hay muchos aspectos que inciden sobre esta calidad y que, por tanto, se trata de un una noción multidimensional. En este trabajo se han tenido en cuenta dos aproximaciones que si bien consideran la calidad matemática de una manera multidimensional ponen el acento, según nuestra opinión, en dimensiones diferentes. Por una parte, las que destacan como elemento central de la calidad matemática el descriptor "riqueza matemática" y, por otra parte, las que toman como elemento central el descriptor "representatividad de las matemáticas enseñadas".

Un ejemplo relevante del primer tipo de aproximaciones son los trabajos de Hill y colaboradores. Segons Hill, Blunk, Charalambous, Lewis, Phelps, Sleep y Ball (2008) se puede definir la calidad matemática de la instrucción como un compuesto de varias dimensiones que caracterizan el rigor y la riqueza de las matemáticas de la clase, incluyendo la presencia y ausencia de errores matemáticos, explicación y justificación matemática, representaciones matemáticas y observaciones relacionadas. Estos autores han desarrollado un sistema de categorías pera medir la calidad matemática de la instrucción (Hill, 2010). Estas son: a) Formato del segmento, b) El trabajo en las clases está conectado a las matemáticas, c) La riqueza de las matemáticas, d) Trabajo con los estudiantes, e) Errores e imprecisiones en el lenguaje, f) Participación de los estudiantes. A su vez para cada categoría se tienen subcategorías. Por ejemplo, para la riqueza de las matemáticas, se tiene: 1) Explicaciones matemáticas, 2) Múltiples procedimientos o métodos de resolución, 3) El desarrollo de generalizaciones matemáticas, 4) El lenguaje matemático, 5) Riqueza de las matemáticas en general.

Un ejemplo relevante del segundo tipo de aproximaciones es el EOS, principal referente teórico de esta investigación. Este enfoque propone herramientas para, primero, describir las matemáticas implicadas en un proceso de instrucción y, segundo, valorar su calidad. Para la descripción propone herramientas que permiten analizar las prácticas matemáticas y los objetos primarios y procesos matemáticos activados en ellas. Para valorar la calidad de las matemáticas se propone el constructo "criterios de idoneidad", en especial el criterio de idoneidad epistémica:

> 1. Idoneidad epistémica, para valorar si las matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". 2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar. 3. Idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos. 4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción. 5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción. 6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Font, Planas y Godino, 2010, p. 101)

Para cada una de las seis idoneidades hay un conjunto de indicadores. A continuación siguen los indicadores de la idoneidad epistémica: Muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (contextualizados, con diferentes niveles de dificultad, etc.); uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), y traducciones y conversiones entre los mismos; procurando que el nivel del lenguaje matemático utilizado sea adecuado y que las definiciones y procedimientos estén clara y correctamente enunciados y adaptados al nivel educativo a que se dirigen; presentación de los enunciados y procedimientos básicos del tema y adecuando asimismo las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen; establecimiento de relaciones y conexiones significativas entre las definiciones, propiedades, problemas del tema estudiado, etc.

La noción de calidad epistémica propuesta por el EOS está muy centrada en la idea de representatividad de las matemáticas enseñadas con relación al significado holístico del objeto matemático que se quiere enseñar, entendido como el conjunto de pares (prácticas matemáticas, objetos primarios y procesos matemáticos activados en dichas prácticas). La determinación de dicho significado global u holístico requiere de la realización de un estudio histórico-epistemológico sobre el origen y evolución del objeto en cuestión. Así mismo se deben tener en cuenta la diversidad de contextos de uso donde se pone en juego dichas configuraciones de objetos primarios.

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

Se asume la siguiente caracterización de la competencia en análisis didáctico: *Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora.* Se considera, además: 1) que se pueden encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia (Font, 2011), y 2) que algunos de los constructos propuestos en el modelo de análisis didáctico que propone el EOS son útiles para el desarrollo de dicha competencia, sobre todo, el constructo criterios de idoneidad didáctica. En esta investigación se asume esta caracterización de la competencia en análisis didáctico y tomamos como hipótesis general de partida las dos consideraciones anteriores.

El objetivo es el diseño e implementación de un ciclo formativo que permita el desarrollo la competencia de análisis didáctico de procesos de instrucción, en particular, la valoración de calidad matemática. Nos planteamos pues el diseño (bien sea adaptando tareas ya diseñadas o bien haciendo un diseño propio de tareas), implementación y rediseño de tareas que permitan la emergencia de herramientas teóricas para que los futuros profesores realicen la valoración de la calidad matemática de procesos de instrucción propios o ajenos, desarrollando de esta manera uno de los componentes de dicha competencia. Para conseguirlo, utilizamos una metodología de investigación que tienen elementos de la investigación basada en el diseño. Estos son: (1) estudiar la adquisición de competencias en un ambiente real, (2) tener por objetivo generar ambientes de aprendizaje eficaces novedosos, (3) la colaboración entre la investigadora y los profesores y (4) la búsqueda simultánea de la construcción de teorías y la innovación de la práctica (Cobb, diSessa, Lehrer y Schauble, 2003). Por otra parte, para el caso en que las tareas sean de diseño propio, se utiliza una metodología de estudio de caso, especialmente para aquéllas que impliquen el estudio exhaustivo del contexto en el que se desarrolló el episodio seleccionado.

Los sujetos participantes son los futuros profesores de matemáticas de secundaria del Máster de Formación del Profesorado de Secundaria de Matemáticas de la Universitat de Barcelona. Los datos para la investigación se obtienen, sobre todo, de: a) Registros de la plataforma virtual; b) Registros audiovisuales de episodios de clases implementados en el máster y c) de su Trabajo Final de Máster donde se realiza una valoración de la calidad matemática de la unidad didáctica que implementaron en su periodo de prácticas..

Nos planteamos pues una investigación que permita relacionar herramientas teóricas ya desarrolladas por programas de investigación en educación matemática (en este caso, sobre todo el EOS) con la práctica profesional del futuro profesor de matemáticas de secundaria, lo cual sirve, entre otras cosas, para desarrollar y precisar dichas herramientas. Se trata, por tanto, de una investigación experimental que permite el desarrollo de elementos teóricos.

EJEMPLO DE TAREA

A continuación, se explica el diseño y la implementación de una tarea de este ciclo. Se ha seleccionado una de las tareas de diseño propio. Se trata de la tarea inicial del ciclo y su objetivo es crear un debate en el que se espera la emergencia de criterios relacionados con la noción de calidad matemática como, por ejemplo: representatividad, riqueza de procesos, adaptación curricular, complejidad del objeto matemático, etc. Cabe destacar que esta tarea debe realizarse antes de que los alumnos estudien estos conceptos, el objetivo es que surjan de manera espontánea en el propio debate.

La tarea se presenta como uno de los primeros problemas profesionales que tuvo una alumna del máster del curso 2010-2011 en su primera experiencia profesional. Esta alumna fue contratada como profesora substituta de un profesor que debía explicar las integrales en el segundo de bachillerato. En concreto tuvo que poner en funcionamiento su conocimiento común del contenido para poder resolver las tareas sobre integrales del libro de texto, pero también se topó con una problemática relacionada con otros componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, conocimiento del currículo, etc.). En concreto se encontró que el profesor a quien substituía había diseñado una prueba en formato digital para preparar el examen del tema de integrales y ella no tenía muy claro si la prueba era adecuada o no. No tenía claro que este cuestionario sirviese para evaluar los elementos fundamentales del tema.

El cuestionario era voluntario y estaba dirigido a aquellos alumnos que querían repasar los contenidos susceptibles de entrar en el examen sobre integrales. Las características principales del cuestionario eran: 1) se tenía que realizar en un entorno digital soportado per dos plataformas virtuales: Moodle y Wiris (calculadora simbólica virtual), 2) el temario abarcado era: Integral definida, Integral indefinida y Cálculo de áreas, 3) las preguntas eran abiertas (no era un test) y los alumnos debían introducir su respuesta mediante la calculadora Wiris, 4) la generación de preguntas era aleatoria. Había un banco de preguntas y cada intento del cuestionario generaba, mediante la calculadora Wiris, preguntas con datos numéricos diferentes. 5) El cuestionario producía como retroalimentación, en el caso de que el alumno fallase la respuesta, una respuesta correcta (que para el cálculo de áreas detallaba todos los pasos). La figura 2 es un ejemplo de las pantallas del cuestionario que aparecían en el ordenador del alumno, mientras que la figura 3 es un ejemplo gráfico de la retroalimentación aportada por el cuestionario al dar el alumno una respuesta incorrecta.

En la primera fase de la implementación de esta tarea se daba toda esta información (incluido el acceso al cuestionario digital), junto a lo que decía el currículo sobre el tema de integrales (en especial los criterios de evaluación) y la parte del índice sobre la integral del libro de texto utilizado. A los futuros profesores se les pedía que, primero en pequeños grupos y después en gran grupo, discutieran sobre la siguiente consigna abierta *¿Podrías valorar si el cuestionario digital tiene calidad matemática o no? Justifica tu respuesta.* El resultado de la discusión fueron dos criterios: 1) adaptación del cuestionario a los criterios de evaluación, 2) tener en cuenta la complejidad de la integral.

En la segunda fase de la implementación de esta tarea el profesor limitó el criterio “adaptación al currículo” al componente “riqueza de procesos matemáticos” ya que, dado que el currículo estaba pensado para el desarrollo de procesos, esta idea era uno de los criterios de evaluación. Después reelaboró el criterio “tener en cuenta la complejidad de la integral” en términos de “representatividad” y conectó ambos criterios haciendo ver que se podían considerar como dos componentes de la noción “calidad matemática”. A continuación se dieron más indicadores para poder medir estas dos componentes.

Con relación a valorar si el cuestionario era representativo de la complejidad de la integral se explicaron los siguientes significados de “integral” (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010): 1) Geométrico, 2) Resultado de un proceso de cambio, 3) Inversa de la derivada, 4) Aproximación al límite: 5) Generalizada: (Lebesgue, Riemann, etc.), 6) Algebraica, 7) Métodos numéricos. Después, en una hoja de trabajo específicamente diseñada, el alumno, para cada una de las 10 preguntas del cuestionario digital y para cada uno de los 7 significados parciales, tenía que escribir en una tabla un 1 o un 0 según considerase que la pregunta activaba (o no) dicho significado. Con relación a la “riqueza de procesos matemáticos” el profesor se limitó a considerar los siguientes: Contextualización, Algoritmización, Comunicación, Argumentación y Resolución de problemas. Después el alumno para cada una de las 10 preguntas del cuestionario digital y para cada uno de estos 5 procesos tenía que escribir un 1 o un 0 según considerase que la pregunta activaba (o no) dicho proceso.

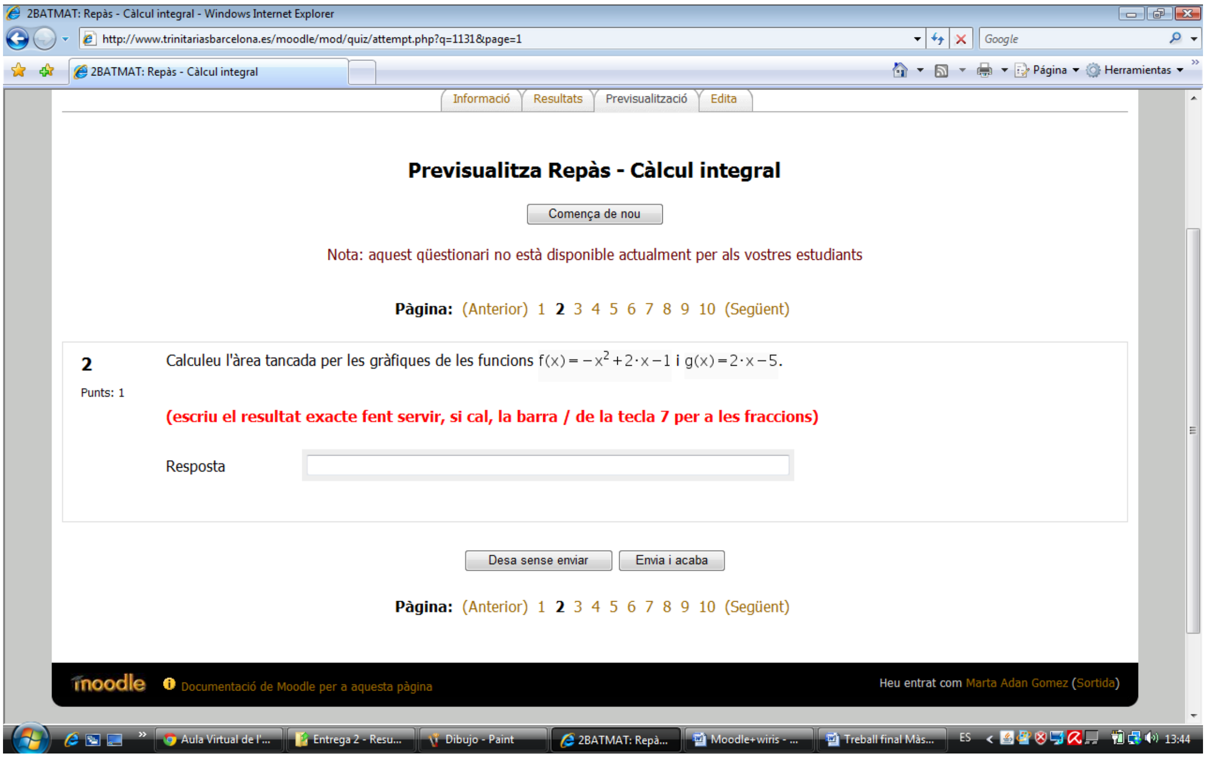


Figura 2. Ejemplo de las pantallas del cuestionario

La conclusión de los futuros profesores, tal como se esperaba, fue que el cuestionario no era representativo de la complejidad del objeto integral ya que solo activaba dos de los siete significados posibles de la integral y que, además, no activaba procesos relevantes (resolución de problemas, contextualización comunicación y argumentación). La conclusión que se consensuó, después de la discusión en el gran grupo, fue (1) que calidad matemática del cuestionario era baja y, además, no era causada por las características del entorno digital y (2) que se podía argumentar mediante elementos relativamente objetivos el nivel de calidad matemática del cuestionario.

CONSIDERACIÓN FINAL

La mirada compleja sobre los objetos matemáticos, como la que realiza el EOS, lleva a pensar no en un objeto simple sino en un sistema complejo formado por partes o componentes. La idea de representatividad, como criterio de calidad matemática de una secuencia de tareas, es una consecuencia de esta mirada compleja y de ella se derivan otros criterios que están relacionados con la articulación de los elementos en los que se descompone la complejidad, como son los de conexión y coherencia. Precisamente la noción de conexión se puede utilizar como puente entre los dos principales criterios de calidad matemática considerados en nuestra investigación (representatividad y riqueza de procesos matemáticos) ya que en los principios y estándares del NCTM (2000) se propone como un proceso importante el proceso de conexión – eso sí, entendido más como la articulación entre diferentes partes de las matemáticas que como conexión de las matemáticas con la realidad extramatemática.

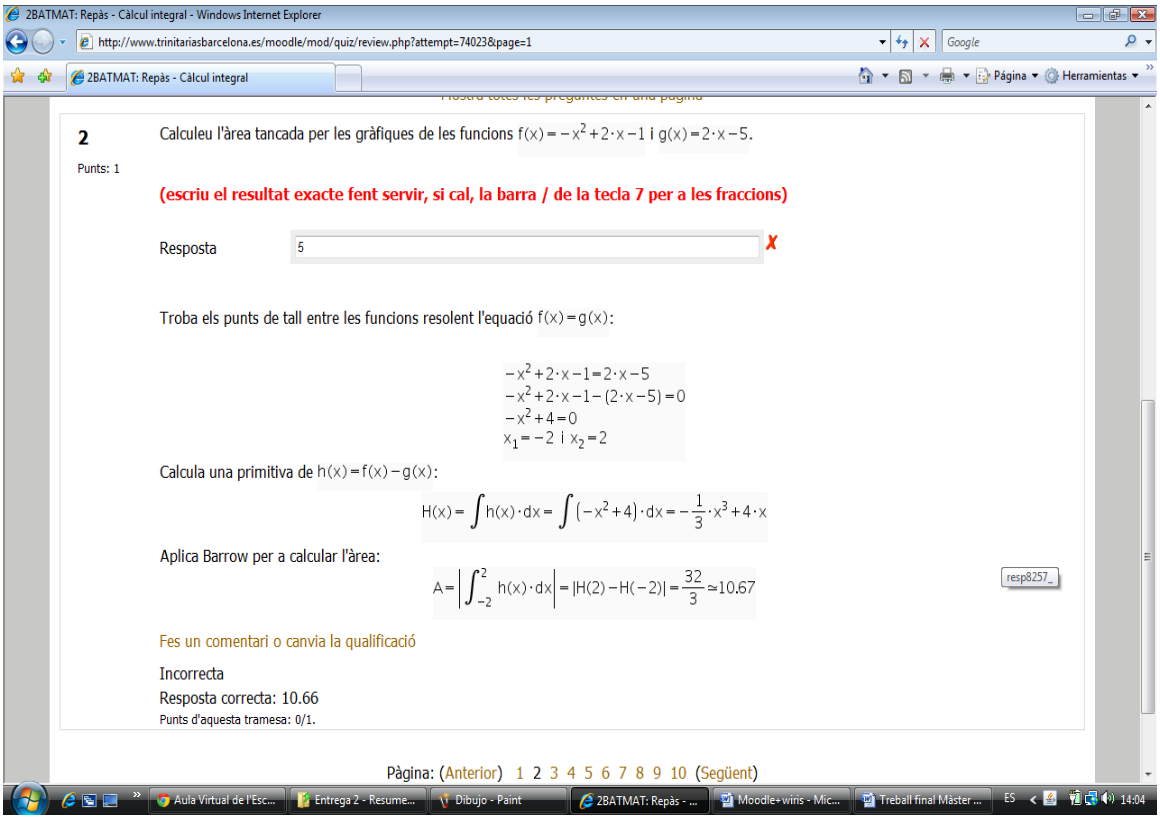


Figura 3. Ejemplo gráfico de retroalimentación

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco de los siguientes proyectos de investigación REDICE-12-1980-02 y EDU2012-32644.

Referencias

Charalambous, C. Y. (2010). Mathematical knowledge for teaching and tasks. *Journal of Teacher Education*, *60*(1-2), 21-34.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13.

Contreras, A., Ordóñez, L., y Wilhemí, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las ciencias*, *28*(3), 2010.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, *26*, 9-25.

Font, V., Planas, N., y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giménez, J., Font, V., y Vanegas, Y. (2013). *Professional Tasks analyzing school mathematical practices.* Comunicación aceptada para su presentación en el ICMI Study 22.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Hill, H. C. (2010). Mathematical Quality of Instruction (MQI) (Manuscrito no publicado). *Learning Mathematics for Teaching*. Universitat de Michigan.

Hill, H. C., Blunk, M. L., Charalambous, C. Y., Lewis, J. M., Phelps, G. C., Sleep, L., & Ball, D. L. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction: An Exploratory Study. *Cognition and Instruction*, *26*(4), 430-511.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. The Council: Reston, Virginia.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 217-237.

Wilson, P. S., Cooney, T. J., & Stinson, D. W. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(2), 83–111.

UN ESTUDIO EMPÍRICO DE LAS SITUACIONES-PROBLEMA DE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN EN LIBROS DE TEXTO DE BACHILLERATO

An empirical study of the problem-situations of correlation and regression in high school textbooks

M. Magdalena Gea, Carmen Batanero, Gustavo R. Cañadas y J. Miguel Contreras

Universidad de Granada

Resumen

Presentamos un estudio de las situaciones usadas para contextualizar la correlación y regresión en una muestra de ocho libros de texto de Bachillerato. Se analizan los campos de problemas principales, contextos empleados, y el uso de recursos tecnológicos en las situaciones propuestas. Se detectan diferencias en los diferentes textos, así como un tratamiento no uniforme de las variables analizadas.

Palabras clave: *regresión y correlación, libros de texto, Bachillerato, problema.*

Abstract

We present a study on the situations used in the topic of correlation and regression in a sample of eight high school textbooks. We analyze the main problem areas, the variety of contexts proposed, and the technology resources that are used. We detect some differences in the different texts, as well as a non uniform treatment of the analyzed variables.

Keywords: *regression and correlation, textbooks, high school, problem.*

INTRODUCCIÓN

La correlación y regresión se relacionan con muchos conceptos estadísticos, como los de variación, distribución, centralización o dispersión, y extienden la dependencia funcional, pudiendo además considerar una medida de su intensidad mediante el coeficiente de correlación. En España se estudia en el primer curso de Bachillerato (16-17 años) en las modalidades de *Ciencias y Tecnología* y *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007), con contenidos similares.

El razonamiento sobre la correlación y regresión se vincula también a la toma de decisiones en ambiente de incertidumbre. La investigación desarrollada en psicología, muestra que los adultos no emplean reglas matemáticas, sino estrategias intuitivas incorrectas al estimar la correlación. Chapman y Chapman (1969) denominaron “correlación ilusoria” a los sesgos producidos en la estimación de la correlación debidos a las expectativas sobre las variables en estudio. Estepa y Batanero (1995) describieron dificultades, como no apreciar la correlación inversa, tener un sentido determinista o local de la correlación, o identificar correlación con causalidad (Estepa, 2008; Zieffler y Garfield, 2009). La creencia infundada en la transitividad del coeficiente de correlación es descrita por Castro-Sotos et al. (2009).

Este trabajo completa los anteriores, analizando las situaciones problemas que sirven para contextualizar la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato En lo que sigue analizamos los fundamentos, métodos y resultados del estudio.

Gea, M. M., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2013). Un estudio empírico de las situaciones-problema de correlación y regresión en libros de texto de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 293-300). Bilbao: SEIEM.

MARCO TEÓRICO

Estudiamos algunos resultados de la transposición didáctica (Chevallard, 1991) de la correlación y regresión, esto es, las adaptaciones que estas nociones sufren al incluirlas en el Bachillerato. Nos basamos en el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), que da gran importancia a la situación-problema, ya que el significado institucional (personal) de un objeto sería el conjunto de prácticas significativas asociadas al campo de problemas de donde surge dicho objeto (Godino, Batanero y Font, 2007).

Tomamos de este marco, el sentido dado a la situación-problema, que puede ser cualquier tarea, ejercicio ó actividad planteada al alumno que promueva actividades de matematización, y que suelen agruparse en tipos o clases. Siguiendo este marco, clasificaremos las situaciones-problemas propuestas en los textos en clases que sean representativas de las incluidas en el significado institucional del concepto y que permitan contextualizar los conocimientos pretendidos (Godino, Font, Contreras y Wilhelmi, 2006). Dicho significado institucional se determinó en Gea (2012), a partir del análisis histórico, de las orientaciones curriculares y de libros de textos universitarios.

ANTECEDENTES

Hay una amplia investigación sobre los libros de texto de matemáticas, siendo menor en el caso de la estadística y probabilidad, donde encontramos ejemplos como los de Ortiz (1999), Cobo y Batanero (2004) y Azcárate y Serradó (2006).

Respecto a la correlación y regresión, Sánchez Cobo (1998) analiza once libros de texto de Bachillerato publicados entre 1987 y 1990. Analiza las definiciones y demostraciones, su función y componentes, mostrando una tendencia formalista en la presentación del tema y un fuerte sesgo hacia la correlación positiva. No clasifica específicamente los campos de problemas, que será un punto original de nuestro trabajo.

Lavalle et al. (2006) analizan la correlación y regresión en siete libros de texto argentinos de Bachillerato, observando un enfoque mayoritariamente socio-constructivista, donde se plantean más actividades bajo una asociación directa que inversa y ninguna usa recursos tecnológicos.

METODOLOGÍA

Se analizaron ocho libros de textos de primer curso de Bachillerato en la Modalidad de *Humanidades y Ciencias Sociales* (MEC, 2007), publicados recién implantado el currículo actual (MEC, 2007), que se eligieron por ser de editoriales de prestigio y los más utilizados en la enseñanza pública en España (Anexo 1). En ellos se analizaron las situaciones-problemas incluidas, independientemente de si se trata de un ejemplo, ejercicio o problema. Se parte de variables y categorías fijadas a priori en el estudio del significado de referencia (Gea, 2012), que son:

V1. Campos de problema, que se deducen de las preguntas que dieron origen a estos conceptos (Estepa, Gea et al., 2012): P1: ¿Hay relación entre las variables y de qué tipo?; P2: ¿Puedo usar una variable para predecir la otra? Se añade otro: (P0), relacionado con la organización y reducción de los datos.

V2. Contextos del problema, usando las categorías fijadas por Sánchez Cobo (1998).

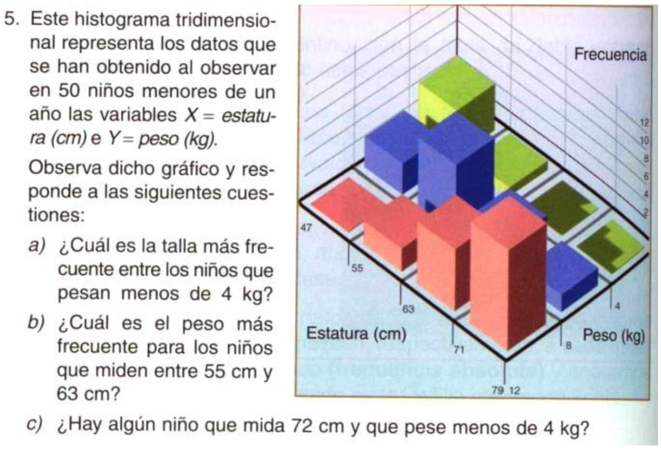
V3. Uso o no de la tecnología para plantear el problema o en su resolución.

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

V1.Campos de problemas

Se encontraron tres campos principales de problemas, algunos de los cuáles hemos subdividido:

P0. Organización/Reducción de datos. El primer paso en el estudio de la correlación y regresión es resumir o representar los datos bivariantes, traduciéndolos desde un registro a otro: gráfico, tabular, numérico, o algebraico. También consideramos las actividades de lectura o construcción de dichas representaciones (Figura 1) consideradas por Sánchez Cobo (1998) (Figura 2).


5. Este histograma tridimensional representa los datos que se han obtenido al observar en 50 niños menores de un año las variables *X* = *estatura (cm)* e *Y* = *peso (kg)*.

Observa dicho gráfico y responde a las siguientes cuestiones:

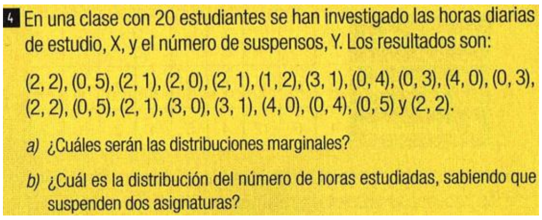
a) ¿Cuál es la talla más frecuente entre los niños que pesan menos de 4 kg?

b) ¿Cuál es el peso más frecuente para los niños que miden entre 55 cm y 63 cm?

c) ¿Hay algún niño que mida 72 cm y que pese menos de 4 kg?

Figura 1. Lectura de representación gráfica ([T2], p.220)

Se observó una tendencia a la representación gráfica, siendo escaso el tratamiento tabular de los datos, posiblemente porque el gráfico visualiza mejor la dependencia entre las variables. En cuanto a representaciones como el diagrama de barras o histograma, destacamos [T8] y [T2], presentando este último también el pictograma. En cuanto a la representación tabular, los textos [T8], [T5], [T3] y [T2] proponen tareas relativas a distribuciones marginales, y sólo [T8] trata la distribución condicional (Figura 2).


4 En una clase con 20 estudiantes se han investigado las horas diarias de estudio, X, y el número de suspensos, Y. Los resultados son:

(2, 2), (0, 5), (2, 1), (2, 0), (2, 1), (1, 2), (3, 1), (0, 4), (0, 3), (4, 0), (0, 3), (2, 2), (0, 5), (2, 1), (3, 0), (3, 1), (4, 0), (0, 4), (0, 5) y (2, 2).

a) ¿Cuáles serán las distribuciones marginales?

b) ¿Cuál es la distribución del número de horas estudiadas, sabiendo que suspenden dos asignaturas?

Figura 2. Representación tabular y gráfica de datos bidimensionales ([T8], p. 220)

P1. Analizar la existencia de relación entre variables. El segundo paso sería analizar la posible presencia de una relación, problema que aparece con frecuencia en los textos analizados, y también considerado en Lavalle et al. (2006), pudiendo asimilarlo al denominado “interpretación” por Sánchez Cobo (1998). Podemos subdividir este problema en los siguientes:

P1.1. Definir/Analizar las variables que conforman un estudio estadístico bidimensional. En primer lugar sería necesario delimitar las variables que se van a estudiar. Este problema fue considerado por Lavalle et al. (2006) pero no por Sánchez Cobo (1998). Por ejemplo, en [T2] se pide a los estudiantes analizar las variables: “*Duración e importe de las llamadas telefónicas urbanas efectuadas en una ciudad durante 24 horas*” ([T2], p. 216).

P1.2. Analizar la existencia de una dependencia funcional o estadística. Definidas las variables, habría que decidir si se trata de una función o una dependencia estadística. Este problema se encuentra en todos los textos analizados, y motiva el posterior análisis de regresión. Su inclusión ayudará a controlar el obstáculo didáctico descrito por Agnelli et al. (2009) consistente en usar un procedimiento determinista en situaciones en que es adecuada la regresión, lo que podría crear una concepción determinista (Estepa, 1994). Un ejemplo lo encontramos en [T2] (p. 232) donde se pide caracterizar la dependencia que presentan los datos en un diagrama de dispersión que muestra dependencia aleatoria exponencial inversa y alta. Incluimos también en este campo las tareas referidas a la discriminación de correlación y causalidad (que sólo presenta [T3]).

P1.3. Determinar la intensidad de la relación. Detectada la relación, es necesario estudiar su intensidad, que variará desde la independencia hasta la dependencia funcional. Partiendo del diagrama de dispersión se puede deducir en forma intuitiva, y de forma más precisa, mediante la covarianza y el coeficiente de correlación lineal. La mayoría de tareas de este campo se orientan al cálculo del coeficiente de correlación, planteándose en algunas la estimación de la correlación a partir de representaciones de los datos (Figura 3). Incluimos también aquí las tareas de cálculo del coeficiente de determinación.

9 Describe el grado de correlación entre las dos variables representadas.

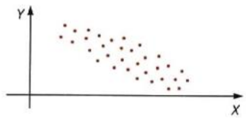


Figura 3. Estimación de la intensidad de la dependencia ([T5], p.248)

P1.4. Determinar la dirección de la relación entre variables. El último problema en este apartado es estudiar el sentido de la dependencia, determinando si la relación es directa o inversa. En caso que los datos presenten relación curvilínea, ésta se ha caracterizado en directa o inversa siempre que la tendencia creciente/decreciente de dependencia fuese evidente.

P2. Predecir una variable en función de otra. Aceptada la existencia de una relación entre las variables de estudio, interesa encontrar alguna función que nos permita obtener una de las variables a partir de la otra (problema de regresión). Este problema se puede asimilar a la categoría "predicción" de Sánchez Cobo (1998). Se suele descomponer en la forma que sigue.

P2.1. Analizar el ajuste lineal entre variables. La presentación de la regresión en los textos analizados se basa principalmente en el modelo de regresión lineal. Se reducen principalmente al ajuste/trazado de las rectas a partir de un diagrama de dispersión, al cálculo de los parámetros de las rectas, y la comprobación de propiedades del modelo de regresión lineal (Figura 4). Destacamos el texto [T3] primero, por explicar mediante un ejercicio resuelto el cálculo de la recta de Tukey y proponer tareas al respecto; y segundo, por introducir el procedimiento de cambio de variable para determinar un ajuste no lineal a los datos. Además, se pide al estudiante que compare las representaciones de estos modelos de ajuste obtenidos y el modelo de regresión lineal y justifique la elección del mejor de todos estos modelos.

49 Daniel afirma que si una nube de puntos es de una recta, el coeficiente de correlación siempre vale 1 o −1. Como Eva no está de acuerdo, Daniel prueba con los puntos de la recta cuya ecuación es $y = -5x + 20$, y Eva hace lo mismo con los puntos de $y = 2x - x^2$.

a) ¿Quién tiene razón? ¿Por qué?

b) Si la hipótesis de Daniel no resulta cierta, ¿podrías formularla de forma que se verifique siempre?

57 El ángulo que forman las dos rectas de regresión de una distribución bidimensional es mayor cuanto menor sea el coeficiente de correlación.

Vamos a comprobarlo estudiando las dos magnitudes en estas distribuciones.

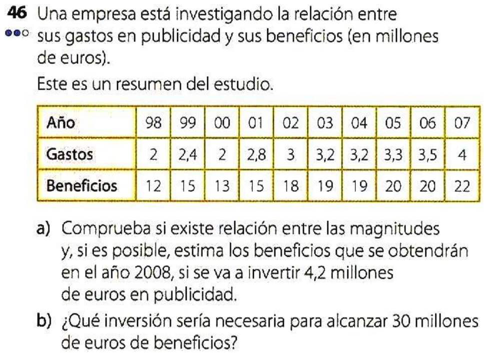
10	12	14	16	18
3	8	1	9	2

10	12	14	16	18
3	6	8	6	7

10	12	14	16	18
5	6	6,5	8,5	9

Figura 4. Análisis de regresión lineal ([T5], p.262 y 263)

P2.2. Hacer estimaciones mediante el ajuste lineal entre variables. Calculada la recta de regresión, se evidencia su utilidad planteando ejercicios de estimación (Figura 5). Al igual que en Lavalle et al. (2006), el cálculo de la estimación lleva asociado una reflexión en torno al valor esperado y el valor real, ya que puede haber diferentes valores observados.



46 Una empresa está investigando la relación entre sus gastos en publicidad y sus beneficios (en millones de euros).

Este es un resumen del estudio.

Año	98	99	00	01	02	03	04	05	06	07
Gastos	2	2,4	2	2,8	3	3,2	3,2	3,3	3,5	4
Beneficios	12	15	13	15	18	19	19	20	20	22

a) Comprueba si existe relación entre las magnitudes y, si es posible, estima los beneficios que se obtendrán en el año 2008, si se va a invertir 4,2 millones de euros en publicidad.

b) ¿Qué inversión sería necesaria para alcanzar 30 millones de euros de beneficios?

Figura 5. Estimación mediante el ajuste lineal ([T5], p.262)

Todos los campos de problemas descritos se presentan en los textos analizados, aunque con diferente frecuencia (Tabla 1). Se puede observar el predominio del campo P1 con más de la mitad de tareas, seguido de las de ajuste y predicción (P2), entre un 25 y 30%. Hay también una tendencia a determinar la intensidad de la dependencia (P1.3) y su signo (P1.4), mas que a analizar el tipo de dependencia (P1.2) o definir las variables (P1.1). Como se indicó anteriormente, estos campos de problemas son necesarios para un desarrollo adecuado de la noción de regresión.

Tabla 1. Contextos utilizados en los textos analizados

Campo de problemas		T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
P0		18(6.7)	45(17.6)	22(7.5)	24(10.9)	70(17.4)	28(8.8)	8(4.5)	38(16.9)
P1	P1.1.	27(10.1)	16(6.3)	38(12.9)	26(11.8)	34(8.5)	19(6)	27(15.3)	45(20)
	P1.2.	39(14.6)	50(19.5)	44(15)	31(14)	45(11.2)	44(13.8)	24(13.6)	26(11.6)
	P1.3.	56(20.9)	49(19.1)	60(20.4)	53(24)	90(22.4)	74(23.3)	39(22.2)	45(20)
	P1.4.	52(19.4)	36(14.1)	39(13.3)	21(9.5)	55(13.7)	51(16)	16(9.1)	27(12)
P2	P2.1.	44(16.4)	26(10.2)	60(20.4)	26(11.8)	59(14.7)	52(16.4)	28(15.9)	26(11.6)
	P2.2.	32(11.9)	34(13.3)	31(10.5)	40(18.1)	49(12.2)	50(15.7)	34(19.3)	18(8)
Total		268	256	294	221	402	318	176	225

Respecto al campo de problemas P0, es escasa su presencia, aunque más en el texto [T7], seguido de [T1], a pesar de ser necesario para un desarrollo óptimo de los campos P1 y P2. Además, facilitará al estudiante alcanzar un nivel de abstracción en la organización de los datos de gran utilidad, un ejemplo es el que se mostró en la Figura 5, ya que si el estudiante no reflexiona sobre la representación gráfica de los datos del problema, podría no advertir la continuidad de la variable tiempo, y podría tratar las categorías 00, 01, etc. como valores 0, 1, etc. y conducirle a error en el cálculo del coeficiente de correlación y determinación de la recta de regresión.

V2.Contextos utilizados

Una segunda variable de análisis es el contexto de las situaciones propuestas, que se toman de la clasificación efectuada por Sánchez Cobo (1998), revisada inductivamente, cuando ha sido necesario. Se ha encontrando una gran variedad de contextos en las situaciones-problemas, que finalmente, con el procedimiento descrito, se han clasificado en seis categorías: (a) *fenómenos biológicos* (como la estatura de hijos-estatura de padres, problema que históricamente dio origen a la idea de regresión); (b) *estudios en ciencias* (peso de un animal-mg diarios de un fármaco; altura que alcanza una piedra y fuerza con que se lanza); (c) *deportivos* (distancia del jugador-número de encestes); (d) *economía* (consumo de energía per cápita y renta per cápita); (e) *educativos* (notas de exámenes: física-matemáticas) o (f) *sociología y demografía* (renta per cápita - índice de natalidad).

Hemos encontrado también una séptima categoría (g) "sin contexto". En la Figura 6 se presentan los resultados del análisis realizado.

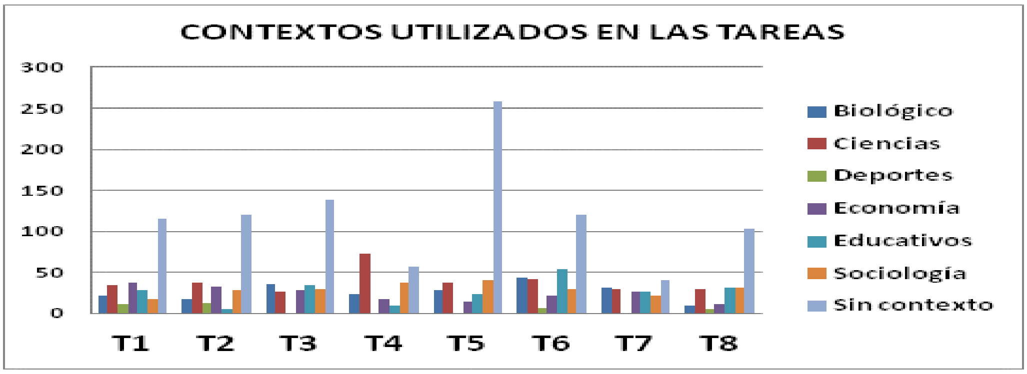


Figura 6. Contextos utilizados en las tareas presentes en los textos analizados

Observamos (Figura 6) un alto número de ejercicios descontextualizados, en especial [T5], superando, en general, a lo obtenido por Sánchez Cobo (1998), que obtuvo un 31,7% de ejercicios descontextualizados (que en comparación se trataría de un 37,9% ya que su categoría "expresión matemática" es tratada en la presente investigación como sin contexto). Nuestro porcentaje es mayor (entre 37,7% y 64,4%), salvo en los textos [T4] y [T7] (26,2% y 23,3%, respectivamente). El resto de contextos tienen una representatividad similar, aunque se destaca el uso del contexto de estudio en ciencias. Este resultado es preocupante, pues Suydam y Weaver (1977) mostraron que los alumnos tienen mejores resultados cuando el contexto del problema les resulta familiar que si se trata de un nuevo contexto o situaciones abstractas.

V3. Uso de tecnología

Finalmente se han clasificado las situaciones problemas respecto a si utilizan o proponen el uso de algún recurso tecnológico o no, y en caso que propongan, teniendo en cuenta el tipo de recurso. En la Tabla 2 se presenta los resultados del análisis. Observamos muy bajo uso, en particular, de Excel, aunque se recomienda su uso en los diseños curriculares. Hay diferencias notables en los libros, pues [T4] tiene un 25% de tareas apoyadas en la tecnología. Destacamos [T3], [T4] y [T8] por el tratamiento de la Hoja de Cálculo en el tema. La situación no es exclusiva en España, pues en la investigación de Lavalle et al. (2006) ningún libro de texto proponía actividades con tecnología, mientras que en la presente investigación encontramos, al menos, la presencia del uso de la calculadora y la Hoja de Cálculo. Esta tecnología ayudaría al estudiante a disponer, en segundos, de una o varias representaciones gráficas, del valor del coeficiente de correlación y mucho mejor aún, probar diferentes modelos de ajuste a los datos, pudiendo dedicarse a otras tareas tan necesarias como las de argumentación.

Tabla 2. Frecuencias de tareas con el uso de tecnología en los libros de texto analizados

Recurso	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8
Excel		2(0.8)	17(5.8)	48(21.7)				10(4.4)
Calculadora	13(4.9)			5(2.3)	17(4.2)	15(4.7)	4(2.3)	
No usa	255(95.1)	254(99.2)	277(94.2)	168(76)	385(95.8)	303(95.3)	172(97.7)	215(95.6)
Total	268	256	294	221	402	318	176	225

Hemos de añadir también en casos esporádicos, otra tecnología. Por ejemplo, el texto [T2] presenta un enlace a un applet para tratar los campos P0, P1.3, P1.4, P2.1 avanzando en este campo con el tratamiento de la regresión cuadrática. También se mencionan algunas páginas web con unidades didácticas o resúmenes teóricos de las nociones de correlación y regresión ([T2], p. 228; [T4], p.257; [T8], p. 218; y [T6], p.255, 263 y 270), o se incluye un CD, pero no es objeto de nuestro estudio.

CONCLUSIONES

En relación con los campos de problemas presentados, los resultados obtenidos muestran el protagonismo que ocupa el campo de problemas de análisis de la dependencia entre las variables (P1), que no suele venir acompañado de un óptimo tratamiento del campo P0, fundamental en el análisis que se lleve a cabo sobre los datos bidimensionales. Tampoco se suelen proponer tareas que impliquen el manejo de la representación tabular (frecuencias absolutas/relativas, distribución marginal o condicional) que ayudan a comprender la naturaleza bidimensional de los datos.

Respecto a la variable contexto, aparece un exceso de ejercicios descontextualizados; por tanto los estudiantes no podrán observar la aplicación de este tema a situaciones varias y además se contradice la tendencia internacional que da una gran importancia al contexto en el estudio de la estadística.

Finalmente, y en relación al uso de tecnología, son pocas las situaciones que la utilizan, a pesar de que se recomienda en los decretos el uso de la hoja Excel y otros recursos (MEC, 2007); por otro lado un mayor uso de tecnología permitiría reducir el tiempo de cálculo y dedicarlo a actividades interpretativas.

Todos estos resultados han de interpretarse con precaución, pues, de acuerdo a Lowe y Pimm (1996), el impacto del libro de texto depende no sólo del mismo libro, sino del lector, y del profesor, así como de las interacciones que determinan su uso en el aula.

Agradecimientos

Proyecto EDU2010-1494, FPI-BES-2011-044684 (MICINN-FEDER) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, N. Z. y Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 17*, 52 - 61.

Azcárate, P. y Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la Eso. *Revista de Educación, 340*, 341-378.

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. y Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal, 8* (2), 33-55. Disponible en: www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/.

Chapman, L. J. y Chapman, J. P. (1969). Illusory correlation as an obstacle to the use of valid psychodiagnostic signs. *Journal of Abnormal Psychology, 74* (3), 271-280.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseña*do. Buenos Aires: Aique.

Cobo, B. y Batanero, C. (2004). Significados de la media en los libros de texto de secundaria. *Enseñanza de las Ciencias, 22* (1), 5-18.

Estepa, A. (1994). *Concepciones iniciales sobre la asociación estadística y su evolución como consecuencia de una enseñanza basada en el uso de ordenadores.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 26* (2), 257-270.

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 13* (2), 155-170.

Estepa, A., Gea, M. M., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2012). Algunas notas históricas sobre la correlación y regresión y su uso en el aula. *Números, 81*, 5-14.

Gea, M. M. (2012). *Fundamentos para un estudio sobre la didáctica de la correlación y regresión*. Tesis de Máster. Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM. The International Journal on Mathematics Education, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V., Contreras, A. y Wilhelmi, M. R. (2006). Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (1), 117-150.

Lavalle, A. L., Micheli, E. B. y Rubio, N. (2006). Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9* (3), 383-406.

Lowe, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts, en A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde. (Eds.). *International Handbook of Mathematics Education*, pp. 371-410. Dordrecht: Kluwer.

M.E.C. (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura de Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas*. Madrid: Autor.

Ortiz, J. J. (1999). *Significado de los conceptos probabilísticos elementales en los textos de Bachillerato.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Sánchez Cobo, F.T. (1998). *Significado de la correlación y regresión para los estudiantes universitarios.* Tesis doctoral no publicada. Universidad de Granada.

Suydam, M. y Weaver, J. F. (1977). Research on problem solving: Implications for elementary school classroom. *Journal of Experimental Psychology General, 112*, 634-656.

Zieffler, A, y Garfield, J. (2009). Modeling the growth of students' covariational reasoning during an introductory statistics course. *Statistics Education Research Journal, 8* (1), 7-31.

Anexo 1: Textos utilizados en el análisis

[T1]. Colera, J., Oliveira, M.J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Grupo Anaya.

[T2]. Anguera, J., Biosca, A., Espinet, M. J., Fandos, M.J., Gimeno, M. y Rey, J. (2008). *Matemáticas I aplicadas a las Ciencias Sociales*. Barcelona: Guadiel.

[T3]. Vizmanos, J. R., Hernández, J. y Alcaide, F. Moreno, M. y Serrano, E. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Grupo SM.

[T4]. Arias, J. M. y Maza, I. (2011). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales 1*. Madrid: Grupo Editorial Bruño.

[T5]. Antonio, M., González, L., Lorenzo, J. Molano, A., del Río, J., Santos, D. y de Vicente, M. (2009). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales I*. Madrid: Santillana Educación.

[T6]. Martínez, J. M., Cuadra, R., Heras, A. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1.º Bachillerato*. Madrid: McGraw-Hill.

[T7]. Bescós, E. y Pena, Z. (2008). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales. 1 Bachillerato.* Vizcaya: Oxford University Press.

[T8]. Monteagudo, M. F. y Paz, J. (2008). *1º Bachillerato. Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales.* Zaragoza: Luis Vives.

DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE NOMBRES DE CANTIDADES DURANTE LA RESOLUCIÓN ALGEBRAICA DE PROBLEMAS VERBALES POR ESTUDIANTES DE PRIMARIA[xxii]

Difficulties in naming quantities when primary students solve word problems in an algebraic way

José Antonio González-Calero[a], David Arnau[b], y Luis Puig[b]

[a] Universidad de Castilla-La Mancha

[b] Universitat de València

Resumen

En esta comunicación presentamos algunos resultados de una investigación sobre la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la hoja de cálculo en sexto curso de primaria (11-12 años). El principal objetivo del estudio es evaluar si la hoja de cálculo puede emplearse como un mediador en la enseñanza de la resolución algebraica de problemas. En esta comunicación describimos resumidamente las etapas y características de la investigación y mostramos ejemplos de la dificultad que presentan los estudiantes a la hora de asignar nombres adecuados a las cantidades involucradas en los problemas, así como su influencia en el proceso de resolución.

Palabras clave: *Aprendizaje y enseñanza del álgebra, prealgebra, resolución de problemas, nuevas tecnologías.*

Abstract

In this paper we discuss some results of an investigation into the teaching of algebraic solving of arithmetic-algebraic word problems to sixth grade students (11-12 years old) in a spreadsheet environment. The main aim of this study was to investigate whether the spreadsheet could be employed as a mediator to the teaching of algebraic problem solving. In this paper we describe briefly the stages and features of this research. Furthermore, we will show examples of the difficulty presented by students to give appropriate names to the quantities involved in the problems, as well as its influence in the problem solving.

Keywords: *Learning and teaching of algebra, prealgebra, problem solving, new technologies.*

González, J. A., Arnau, D. y Puig, L. Dificultades en la construcción de nombres de cantidades durante la resolución algebraica de problemas verbales por estudiantes de primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 301-310). Bilbao: SEIEM.

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Desde prácticamente el momento en que las hojas electrónicas de cálculo se convirtieran en una herramienta ofimática de elevada difusión, han sido numerosas las voces que han defendido su potencial a la hora de abordar las dificultades más comunes en el paso del pensamiento aritmético al algebraico (Dettori, Garuti y Lemut, 2002; Friedlander, 1996).

En el caso concreto del uso de la hoja de cálculo (en adelante, HC) como un instrumento para la resolución algebraica de problemas verbales, podemos citar los resultados del *Spreadsheet Algebra Project* (Sutherland y Rojano, 1993). Este proyecto constaba de dos fases, una de las cuales estaba orientada a alumnos de 10-11 años sin ninguna formación algebraica previa, condiciones de partida similares a las del trabajo que presentamos en esta comunicación. A pesar de que este estudio enfatiza la potencialidad de la HC, las autoras también indican a modo de conclusión, que el trabajo con alumnos de estas edades puso en evidencia que “los alumnos de esta edad no piensan espontáneamente en términos de una fórmula general cuando trabajan por vez primera en el entorno de la hoja de cálculo” (p. 379). Este resultado parece subrayar la necesidad de instruir a los alumnos tanto en los usos básicos de la HC como en la resolución algebraica de problemas verbales en dicho entorno.

En el trabajo de Arnau (2010) se analizó cómo influía la enseñanza de la resolución algebraica de problemas en la HC en la competencia de los estudiantes de secundaria cuando resolvían problemas verbales con lápiz y papel y, en especial, mediante el método cartesiano. En este estudio se concluyó que los estudiantes al abandonar la HC recurrían en mayor proporción a métodos de resolución en los que no era necesario emplear el lenguaje del álgebra. Estos resultados plantean dudas sobre la conveniencia de enseñar a resolver problemas de manera algebraica en la HC en el nivel educativo de secundaria, cuando ya los alumnos han recibido instrucción en el lenguaje algebraico. Sin embargo, estas conclusiones no coartan el hipotético potencial de la HC en la enseñanza del álgebra con anterioridad a la formalización de dicho lenguaje.

Por otro lado, dentro de las investigaciones sobre dificultades en la traducción de problemas verbales al lenguaje del álgebra, Küchemann (1978) analizó las respuestas de estudiantes de secundaria a la tarea “Los lápices azules cuestan 5 peniques cada uno y los lápices rojos cuestan 6 peniques cada uno. Compro algunos lápices azules y algunos rojos y juntos me cuestan 90 peniques. Si b es el número de lápices azules comprados, y r el número de lápices rojos comprados, ¿qué puedes escribir sobre b y r?” (Küchemann, 1978, p. 26). Observó que la respuesta errónea más común a esta tarea era $b + r = 90$ y lo interpretó señalando que estos estudiantes parecía que usaban las letras como etiquetas para referirse a conjuntos, siendo b y r abreviaturas de lápices azules (blue pencils) y lápices rojos (red pencils). En el mismo sentido, Rosnick (1981) recomendaba no escribir “P = profesores” cuando en realidad significa “P = número de profesores”, como una consecuencia de la idea de que la ambigüedad de los nombres de las cantidades podría impedir al resolutor identificar unívocamente la cantidad a la que hace referencia.

Neuman y Schwarz (2000), en el curso de una investigación en la que se analizaban las resoluciones de problemas de mezclas por estudiantes de noveno grado, documentaron esta misma dificultad durante la traducción del enunciado a una representación tabular. En uno de los ejemplos presentados, un estudiante puso el nombre de “peso” a una cantidad, lo que hacía imposible identificar si se refería al peso de azúcar o al peso de mermelada. Los autores señalaron que “este etiquetado impreciso podría considerarse insignificante […] sin embargo, consideramos que esta vaguedad lingüística refleja la dificultad de organizar los elementos matemáticos en las categorías semánticas adecuadas” (p. 212). A modo de conclusión, los autores apuntaron que una importante fuente de dificultades en la resolución de problemas verbales se encontraba en la etapa de traducción del enunciado más que en la construcción de la ecuación.

En esta comunicación presentaremos parte de los resultados de una investigación más amplia en la que se pretende:1) analizar la viabilidad, haciendo uso de la HC, de iniciar la enseñanza de la resolución algebraica de problemas verbales en sexto de primaria, nivel educativo donde el desconocimiento del lenguaje algebraico parece vedar esta posibilidad y 2) crear un catálogo de las actuaciones de los estudiantes de primaria, sin instrucción académica previa en el método cartesiano, cuando resuelven problemas verbales de manera algebraica en la HC.

En concreto, en estas páginas mostraremos ejemplos de actuaciones en las que se pondrá de manifiesto la incapacidad, por parte de algunos de los estudiantes que participaron en el estudio, para construir nombres apropiados para las cantidades involucradas en el problema, y cómo este hecho se traduce en dificultades durante el proceso de resolución. Las dificultades mostradas por los estudiantes se reflejan en una tendencia de los resolutores a asignar nombres ambiguos a determinadas cantidades, lo que es origen de errores a la hora de establecer las relaciones entre cantidades.

POBLACIÓN, DISEÑO Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación se estructuró bajo las directrices que ofrece el marco de los Modelos Teóricos Locales (Filloy, Rojano, y Puig, 2008). Los Modelos Teóricos Locales mediante varios componentes teóricos interrelacionados (un componente de competencia, un componente de actuación, un componente de enseñanza y un componente de comunicación) permiten tomar en consideración la complejidad de los fenómenos que se producen en todo proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En esta investigación, el componente de competencia se fundamenta en un análisis del método cartesiano y del método de la hoja de cálculo. El primer método por constituir el modelo de referencia en la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos (véase, Filloy, Rojano, y Puig, 2008), y el segundo, por ser una extrapolación directa del método cartesiano al entorno de la hoja de cálculo (véase Arnau, 2010). El componente de enseñanza se articula mediante una secuencia de enseñanza orientada a instruir a los alumnos en el método de la hoja de cálculo. Finalmente, el componente de actuación pretende dar cuenta de las acciones que realiza un estudiante cuando se enfrenta a una tarea matemática con la finalidad de caracterizar las estrategias que utiliza, los obstáculos que encuentra y los errores que comete. En concreto, la investigación estaba orientada a incrementar el conocimiento sobre este componente cuando estudiantes de primaria resuelven problemas verbales de manera algebraica en la HC. A su vez, estos componentes ofrecen un marco metodológico sobre el que estructurar el desarrollo de la investigación. Por motivos de espacio, sólo describimos las etapas de la investigación necesarias para abordar los objetivos de la comunicación.

Como los alumnos desconocían por completo el funcionamiento de la HC, el diseño de la enseñanza tuvo que incluir sus elementos y rudimentos básicos con antelación a la enseñanza del método de la hoja de cálculo (véase una descripción del método en Arnau y Puig, 2006). De esta forma, el modelo de enseñanza consta de dos partes bien diferenciadas: 1) la enseñanza de los rudimentos básicos de la HC; y 2) la enseñanza del método de la hoja de cálculo.

La secuencia de enseñanza se desarrolló en el aula de informática del centro al que pertenecían los estudiantes. Su desarrollo ocupó diez sesiones, cinco sesiones de 45 minutos de duración y otras cinco de una hora. Las sesiones se impartieron en el horario de la asignatura de matemáticas. Los alumnos se agruparon por parejas libremente con el fin de fomentar el proceso comunicativo entre ellos. La primera etapa de la secuencia de enseñanza, tenía como objetivo transmitir el conjunto de rudimentos básicos, así incluía las técnicas básicas siguientes: la identificación de los elementos de una HC (celda, fila, columna…), la introducción de fórmulas, la necesidad de uso de paréntesis, etc.

La segunda etapa, dedicada a la instrucción en el método de la hoja de cálculo, se inició con la resolución por parte del profesor de un problema-ejemplo mediante este método. A partir de este momento, y durante cuatro sesiones más, se brindó a cada pareja una colección de problemas para que fuesen resueltos de forma autónoma. Durante estas sesiones, dos o tres profesores prestaban ayuda a las parejas en el proceso de resolución. En las dos primeras sesiones los profesores actuaban prestando ayuda siempre que percibían dificultades en cualquiera de las parejas, mientras que en las dos últimas sesiones sólo intervenían bajo petición de las parejas.

Tras la realización de secuencia de enseñanza, cuyas principales características acabamos de describir, y en la que intervinieron todos los miembros del grupo (21 alumnos), se procedió a grabar en vídeo a estas mismas parejas conformadas para la secuencia de enseñanza, cuando se enfrentaban a la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos en el entorno de la HC. En concreto, se preparó una colección de cuatro problemas, cuya principal característica es que la lectura más natural de los mismos desemboca en una resolución algebraica. Todos los problemas fueron seleccionados con la intención de que tuvieran un nivel dificultad similar a los problemas planteados durante la secuencia de enseñanza.

A continuación, para ejemplificar el tipo de problemas empleados, presentamos una lectura analítica del problema *Sillas y mesas*, ilustrada con el grafo correspondiente (Figura 1. Véase Filloy, Rojano, y Puig, 2008, para una descripción del tipo de grafos que usamos para representar la estructura de las lecturas analíticas). Más adelante ofreceremos extractos de las actuaciones de dos parejas durante sus resoluciones de este problema.

El problema "Sillas y mesas"

Hemos comprado 12 sillas y 2 mesas por un importe total de 1380 euros. Si una mesa cuesta 200 euros más que una silla, ¿cuál es el precio por unidad de cada artículo?

Una lectura analítica natural de este problema es la que transforma su enunciado en la lista de cantidades y relaciones siguiente:

Cantidades:

Precio de una silla. (*Psu*)

Precio de una mesa. (*Pmu*)

Número de sillas compradas. ($S = 12$)

Número de mesas compradas. ($M = 2$).

Precio total pagado por las sillas. (*Ps*)

Precio total pagado por las mesas. (*Pm*)

Importe total de la compra de mesas y sillas. ($T = 1380$)

Número de euros de más que cuesta una mesa respecto a lo que cuesta una silla ($Msm = 200$).

Relaciones:

$Ps = S \cdot Psu$

$Pm = M \cdot Pmu$

$Pmu = Psu + Msm$

$T = Ps + Pm$

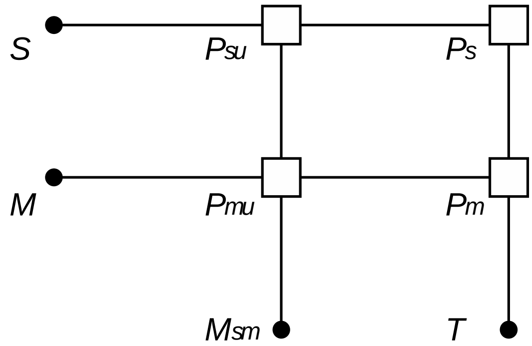


Figura 4. Lectura analítica de “Sillas y mesas”

DIFICULTADES EN LA CONSTRUCCIÓN DE CANTIDADES

Una vez presentadas las principales características de la investigación, dedicaremos el resto de la comunicación a una de las dificultades que emergieron en la resolución algebraica de problemas verbales durante el estudio de casos. En concreto, nos centraremos en describir una dificultad ligada al primer paso del método de la hoja de cálculo, en el proceso de construcción de cantidades, donde se constató la tendencia de los resolutores a asignar nombres a las cantidades involucradas poco adecuados por su ambigüedad. Emplearemos la actuación de dos parejas al enfrentarse al problema *Sillas y Mesas* para documentar aspectos significativos de esta dificultad.

El primer paso del método de la hoja de cálculo consiste en la realización de una lectura analítica del enunciado del problema, de tal forma que el resolutor transforma el enunciado en una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades. Este primer paso suele reflejarse en la HC en la construcción de los nombres de las cantidades y en la asignación implícita de celdas para dichas cantidades. En el caso del método de la hoja de cálculo, el resolutor afronta un proceso de traducción del enunciado en lenguaje natural a una representación tabular anidada en la HC, con la potencialidad añadida de que el lenguaje de la HC habilita la simbolización de cantidades desconocidas y la formulación de relaciones entre cantidades, ya sean éstas conocidas o desconocidas. En el estudio de casos se observó que los alumnos tienden a poner nombres escuetos a las cantidades al representarlas en la HC. En Puig (2012) se explica que el método cartesiano precisa que las cantidades se nombren con nombres propios y no con nombres comunes. El lenguaje natural tiene mecanismos para convertir los nombres comunes como “precio”, por ejemplo, en nombres propios como “el precio de una silla”, en este caso el artículo determinado y el genitivo “de una silla”. Si los alumnos no elaboran un nombre propio distinto para cada cantidad (determinada) distinta, o lo abrevian al escribirlo en la HC, el nombre puede dejar de funcionar como el nombre propio asignado a una cantidad determinada concreta, y funcionar como un nombre común que puede referirse a varias de las cantidades determinadas. Entonces, en el curso de la resolución, los alumnos pueden olvidar qué cantidad querían nombrar con el nombre (abreviado) que han escrito, o confundirse de cantidad al usar ese nombre. A continuación analizaremos las actuaciones de dos parejas en el problema *Sillas y mesas*, donde se atestigua cómo, cuando los nombres que se ponen a las cantidades no están construidos de forma adecuada para funcionar como nombres propios o se abrevian, el proceso de resolución se ve condicionado en gran medida. En los extractos de protocolos escritos se mantiene la numeración de los ítems de la transcripción original.

La pareja Andrés-Julián en el problema “Sillas y mesas”

La pareja Andrés-Julián mantuvo el siguiente diálogo mientras llevaban a cabo acciones en la HC para resolver el problema partiendo de la situación representada en la Figura 2.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa		
5	Total euros silla		
6			

Figura 2. Contenido de la HC antes del ítem 2.

1. Julián:	A ver… por un importe total de mil tres cientos ochenta… Si una mesa cuesta doscientos euros más que una silla, ¿cuánto es el precio por unidad de cada artículo?
2. Andrés:	Una mesa cuesta…
3. Julián:	Doscientos más…
4. Andrés:	Igual a esto… (Introduce “=B1” en la celda B4.)
5. Julián:	Por dos… por doscientos…
6. Andrés:	Será más doscientos… (Concluye “=B1+200” en B4 y en dicha celda aparece el número 212.)
7. Julián:	Por…
8. Andrés:	¡Será más!
9. Julián:	Más… sí…

En este fragmento se aprecia cómo la ambigüedad de los nombres provoca que los estudiantes reinterpreten el significado de una cantidad a lo largo de la resolución, llegando a representar en la HC fórmulas erróneas a pesar de tener su origen en relaciones correctas. Así, la pareja representa dos cantidades llamadas “Sillas” y “Mesas” en las celdas B1 y B2, respectivamente (véase la Figura 2). Dado que informan estas celdas con el número de artículos comprados de cada tipo, parece evidente que ése es el significado que otorgan a estas cantidades. Sin embargo, pocos segundos después, cuando afrontan la traducción de la relación “una mesa cuesta doscientos euros más que una silla”, Andrés introduce la fórmula =B1+200 en la celda B4, por lo que parece estar reinterpretando la cantidad “Sillas” como el precio unitario de las sillas. De este modo, aunque parece tener en mente la relación correcta $Pmu = Psu + Msm$, representa en la HC la relación incorrecta $Pmu = S + Msm$. La conducta de Andrés está amparada por la ambigüedad del nombre “Sillas”, la cual impide una interpretación unívoca del significado de la cantidad. A continuación mostramos otro fragmento del protocolo escrito de esta resolución en el que se hacen patentes las dudas que genera en los resolutores los nombres de las cantidades. Antes presentamos las Figuras 3 y 4, que dan cuentan de la información contenida en la HC antes del ítem 97.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa	=B1+200	
5	Total euros silla	=B1+B6	
6	Unidad artículo	800	
7			

Figura 3. Fórmulas antes del ítem 97.

	A	B	C
1	Sillas	12	
2	Mesas	2	
3	Total euros	1380	
4	Total euros mesa	212	
5	Total euros silla	812	
6	Unidad artículo	800	
7			

Figura 4. Contenido antes del ítem 97.

97. Entrevistador: Ahí tienes total euros mesas… ¿eso qué quiere decir?

98. Andrés: Lo que vale la mesa…

99. Entrevistador: ¿Una sólo o…?

100. Andrés: Cada una.

101. Entrevistador: Y el total euros silla… ¿lo que vale cada silla?

102. Andrés: Sí… o lo que valen las sillas… es que ya no sé lo que…

El extracto muestra al entrevistador tratando de indagar qué significado otorga la pareja a las representaciones de las celdas B4 y B5. Aunque inicialmente Andrés declara que representan *Pmu* y *Psu*, termina dudando sobre a qué cantidad le habrá puesto esos nombres, si a *Pmu* y *Psu* o a *Pm* y *Ps* (ítem 102). Andrés parece tener claro que sólo debe significar una cosa pero evidencia dudas sobre qué significación le han dado. Parece plausible considerar que el nombre de la cantidad favorece el error, e induce a que en determinadas ocasiones den una u otra interpretación a la cantidad. La incorrecta interpretación de etiqueta de las cantidades cristaliza, tal y como hemos mostrado en este estudio casos, en la construcción de relaciones incorrectas entre cantidades.

La pareja Andrea-Marta en el problema "Sillas y mesas"

La pareja Andrea-Marta mantuvo el siguiente diálogo mientras llevaban a cabo acciones en la HC para resolver el problema partiendo de la situación representada en las Figuras 5 y 6.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	=B4+200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6			

Figura 5. Fórmulas antes del ítem 44.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6			

Figura 6. Contenido antes del ítem 44.

44. Marta: Y ahora sólo nos queda una en blanco, esa es la que tenemos que probar. Prueba algún número a ver si cambia algo. A ver qué cambia. Pon aunque sea un dos.

45. Andrea: Que no, voy a poner un cien. (Introduce "100" en la celda B4.)

46. Marta: ¡Hala! ¿Qué cambia? Euros mesa. ¿Cambia euros mesa? Ahh, sí. Pero, ¿qué tiene que coincidir?

47. Andrea: Euros mesa…

48. Marta: Euros mesa con total euros. (Señala A3 y A5 con dos dedos.)

49. Andrea: Pero dónde pone que tiene que coincidir eso. Vamos a cambiar, por ejemplo quinientos euros todas las sillas… (Andrea introduce "500" en B4.)

La pareja Andrea-Marta ha nombrado una cantidad "euros silla", y dada la fórmula contenida en la celda B3, parece plausible considerar que interpretan esta cantidad como el precio unitario de las sillas y, por ende, la fórmula de la celda B3 da cuenta de la relación $Pmu = Psu + Msm$. En el fragmento mostrado se desarrolla un proceso de prueba y error sobre la cantidad "euros silla", en la que destaca la intervención de Andrea en el ítem 49, al afirmar "vamos a cambiar, por ejemplo, quinientos euros todas las sillas…". Esta verbalización demuestra un cambio de referencia de la cantidad "euros silla", la cual pasa a ser interpretada como Ps. Al igual que sucedía con la pareja Andrés-Julián, el nombre de la cantidad no permite identificar claramente si hace referencia al precio total de las sillas o al precio de una silla.

Prosiguiendo con la actuación de Andrea-Marta, una vez que la pareja había desistido en el intento de resolver el problema, la HC presentaba la situación plasmada mediante las Figuras 7 y 8.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	=B4+200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6	total		
7			

Figura 7. Fórmulas antes del ítem 126.

	A	B	C
1	sillas	12	
2	mesas	2	
3	euros mesa	200	
4	euros silla		
5	total euros	1380	
6	total		
7			

Figura 8. Contenido antes del ítem 127.

Produciéndose en ese momento un diálogo entre el entrevistador y la pareja, del que rescatamos el siguiente fragmento:

126. Entrevistador: ¿Vosotras sabéis escribir lo que le cuesta la compra de doce mesas y dos sillas de otra manera aparte de mil trescientos ochenta?

127. Andrea: Esto (B1) más esto (B2).

El entrevistador, con el objetivo de obtener información sobre las dificultades que impiden a la pareja construir la ecuación, pregunta a la pareja si sabrían construir alguna relación que dé cuenta de la cantidad T, con lo que implícitamente señala la cantidad sobre la que ha de establecerse la ecuación. Andrea (ítem 127) afirma que sí, y verbaliza la relación incorrecta $T = S + M$. Nuevamente se pone de manifiesto como la ambigüedad de los nombres, se traduce en la construcción de relaciones erróneas. En este caso, Andrea afirma poder calcular el coste total de la compra de doce sillas y dos mesas sumando las cantidades nombradas "sillas" y "mesas", a pesar de que a estas cantidades asignaron previamente los valores doce (número de sillas) y dos (número de mesas) respectivamente. Este comportamiento parece reflejar cómo a lo largo de la resolución del problema la etiqueta "sillas" es interpretada indistintamente como "número de sillas" o "coste total de las sillas".

CONCLUSIONES

Hemos puesto de manifiesto cómo la dificultad para nombrar adecuadamente las cantidades en la resolución algebraica de problemas en el entorno de la HC condiciona críticamente el proceso de resolución. El entorno de la HC propicia la visibilidad de esta dificultad, dado que su sistema de representación tabular fuerza al resolutor a asignar un nombre a todas aquellas cantidades a las que asigna una celda, mientras que en una resolución en lápiz y papel mediante el método cartesiano es habitual que los estudiantes no vean necesidad de informar el nombre a las cantidades y se limiten al uso de letras. El hecho de que esta dificultad se traduzca en un incremento de las relaciones incorrectas, parece indicar que debiera dedicarse atención a la construcción de nombres para las cantidades en la enseñanza de la resolución de problemas verbales.

Referencias

Arnau, D. (2010). *La enseñanza de la resolución algebraica de problemas en el entorno de la hoja de cálculo*. Valencia: Servei de Publicacions de la Universitat de València.

Arnau, D. y Puig, L. (2006). Formas de construir nombres y referirse a las cantidades en las actuaciones de alumnos de secundaria al resolver problemas verbales en el entorno de la hoja de cálculo. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del X Simposio de la SEIEM* (pp. 145–153). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Dettori, G., Garuti, R. y Lemut, E. (2002). From arithmetic to algebraic thinking by using a spreadsheet. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on School Algebra*, Mathematics Education Library (Vol. 22, pp. 191–207). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Friedlander, A. (1996). Superproblemas del algebra en hojas de cálculo. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática*, *9*, 71–75.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, *7*(4), 23–26.

Neuman, Y. y Schwarz, B. (2000). Substituting one mystery for another: the role of self-explanations in solving algebra word-problems. *Learning and Instruction*, *10*(3), 203 – 220.

Puig, L. (2012). Observaciones acerca del propósito del álgebra educativa. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (Anexo, pp. 1 - 20). Jaén: SEIEM.

Rosnick, P. (1981). Some misconceptions concerning the concept of variable. *Mathematics Teacher*, *74*(6), 418–420.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *12*, 353–383.

[xxii] Esta investigación ha sido realizada dentro de los proyectos EDU2012-35638 y UV-INV-PRECOMP12-80109, concedidos por el Ministerio de Economía y Competitividad y el Vicerrectorado de Investigación de la Universitat de València.

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE FUTUROS MAESTROS DE PRIMARIA SOBRE VISUALIZACIÓN DE OBJETOS TRIDIMENSIONALES

Prospective Primary School Teachers' Specialized Knowledge about the Visualization of Three-Dimensional Objects

Margherita Gonzato [(a)], Juan D. Godino [(a)], Ángel Contreras[(b)] y Teresa Fernández [(c)]
[(a)]Universidad de Granada; [(b)]Universidad de Jaén; [(c)]Universidad de Santiago de Compotela

Resumen

En esta comunicación presentamos las respuestas de una muestra de 241 futuros profesores de educación primaria a un cuestionario diseñado para explorar algunos aspectos relevantes de su conocimiento especializado sobre visualización de objetos tridimensionales. Concretamente se tienen en cuenta los tipos de justificaciones que dan a las soluciones de las tareas propuestas, las variaciones que proponen para usarlas con fines de enseñanza en la escuela y los conocimientos que identifican en la resolución de las mismas.

Palabras claves: formación de maestros, visualización espacial, conocimiento especializado, evaluación.

Abstract

We present the responses by 241 prospective primary school teachers to a questionnaire designed to explore their specialized content knowledge about the visualization of three-dimensional objects. We specifically take into account the variety of justifications given by the participants when solving the tasks, the changes they propose to use the tasks for teaching at school, and the knowledge they identify as involved in the tasks' solution.

Key words: *teachers' training, spatial visualization, specialized content knowledge, assessment*

INTRODUCCIÓN

La formación matemática y didáctica de los futuros profesores constituye un campo de investigación de creciente interés en educación matemática. Una de las problemáticas que más ha interesado es la de determinar cuál es el conocimiento didáctico-matemático requerido para enseñar matemáticas. Las reflexiones y recomendaciones de Shulman (1986) y las investigaciones de Ball, Lubienski y Mewborn (2001), Hill, Ball y Schilling (2008), suponen avances en la caracterización de los componentes del conocimiento que un profesor debería tener para desarrollar eficazmente su práctica docente y facilitar el aprendizaje de los estudiantes. Sin embargo, como señala Godino (2009), los modelos de conocimiento matemático para la enseñanza elaborados desde las investigaciones en educación matemática, incluyen categorías demasiado globales, por lo que sería útil disponer de modelos que permitan un análisis más detallado de cada uno de los tipos de conocimiento que se ponen en juego en una enseñanza efectiva de las matemáticas. Además, es de interés profundizar en la trama de conocimientos que el profesor requiere para enseñar matemáticas, centrándose en temas específicos.

En este trabajo se informa de algunos resultados obtenidos mediante la aplicación de un cuestionario que, con base en el modelo para la evaluación y desarrollo del conocimiento didáctico-matemático propuesto por Godino (2009), hemos diseñado con el fin de explorar aspectos

Gonzato, M., Godino, J. D., Contreras, A. y Fernández, T. (2013). Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre visualización de objetos tridimensionales. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 311-318). Bilbao: SEIEM.

relevantes de dicho conocimiento. Específicamente centramos la atención en la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre visualización de objetos tridimensionales representados en el plano.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN Y MARCO TEÓRICO

Un aspecto importante de la problemática de la formación de profesores en el tema de la visualización es identificar y evaluar las "habilidades espaciales" de los maestros y su relación con aspectos de la enseñanza. Consideramos la visualización de objetos tridimensionales como un conjunto de habilidades relacionadas con el razonamiento espacial. Visualizar un objeto tridimensional no incluye únicamente la habilidad de "ver" los objetos espaciales, sino también la habilidad de reflexionar sobre dichos objetos y sus posibles representaciones, sobre las relaciones entre sus partes, su estructura, y la habilidad de examinar las posibles transformaciones del objeto (Battista, 2007, p. 843). Así mismo, la interpretación y la comunicación de la información espacial de manera figural, verbal o mixta, son importantes habilidades relacionadas con la visualización de objetos tridimensionales (Gorgorió, 1998).

En Gonzato, Godino y Contreras (2011) presentamos resultados parciales de una investigación sobre evaluación de conocimientos sobre visualización de objetos tridimensionales de estudiantes de magisterio, centrando la atención en las facetas de conocimiento común y ampliado puestas en juego en una muestra de tareas. Se reportaron los resultados obtenidos con la aplicación de un cuestionario sobre el tema a 241 estudiantes de magisterio. Puesto que la investigación se refiere a futuros maestros no es suficiente tener en cuenta los conocimientos sobre los contenidos matemáticos que se pretenden desarrollar en los alumnos de primaria, y los correspondientes a niveles de secundaria (conocimientos común y en el horizonte matemático en la terminología de Ball y cols), sino que es necesario abordar la evaluación y el desarrollo del conocimiento especializado del contenido.

En términos de los tipos de geometrías propuestos por Parzysz (2006), las tareas presentadas en los ítems que evalúan el conocimiento común son propias de G1 (geometría espacio-gráfica, que involucra objetos físicos representados gráficamente, y validaciones perceptivo-deductivas). Sin embargo, el maestro necesita desarrollar un conocimiento especializado del contenido que le sirva de base para planificar e implementar su enseñanza, en este caso conocimiento propio del tipo de geometría G2 (proto-axiomática, que involucra objetos teóricos y validaciones hipotético-deductivas).

Dada la amplitud de aspectos que se deben incluir en el conocimiento especializado del contenido, como se describe en Godino (2009) aplicando el marco teórico del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, hemos seleccionado tres de dichos aspectos: los tipos de justificaciones que son capaces de elaborar los estudiantes de magisterio para las tareas, las variaciones que proponen para las mismas con vistas a su uso en la escuela y la reflexión epistémica que son capaces de realizar sobre los conocimientos que se ponen en juego en la resolución.

Para el desarrollo de esta investigación hemos adoptado el marco teórico conocido como Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS, Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012). Este marco teórico incluye un modelo epistemológico de las matemáticas, sobre bases antropológicas y socioculturales, un modelo cognitivo, sobre bases semióticas de índole pragmatista, y un modelo instruccional coherente con los anteriores. Dentro de este marco teórico, en Godino (2009) se ha desarrollo un modelo para caracterizar el "conocimiento didáctico-matemático" que articula y desarrolla otros modelos sobre los conocimientos del profesor de matemáticas (PCK, Shulman, 1986; MKT, Hill et al., 2008).

METODOLOGÍA

Nuestra investigación se inscribe en un enfoque metodológico de tipo mixto (Johnson y Onwuegbuzie, 2004; Castro y Godino, 2012), procediéndose a recoger y analizar datos tanto cualitativos como cuantitativos mediante la aplicación de un cuestionario a una muestra de 241 estudiantes.

En Gonzato et al. (2011) se describe el cuestionario sobre visualización de objetos tridimensionales (Cuestionario VOT) que consta de 5 ítems de respuesta abierta, los cuales cubren los siguientes aspectos del tema:

1. Coordinar e integrar vistas de objetos:
   - Dibujar o identificar algunas vistas de un objeto a partir del dibujo del objeto en perspectiva (ítem 1)
   - Dibujar un objeto en perspectiva a partir de sus proyecciones ortogonales (ítem 2)
2. Plegar y desplegar desarrollos (ítem 3)
3. Componer y descomponer en partes un objeto tridimensional (ítem 4)
4. Generar cuerpos de revolución (ítem 5)

Los aspectos del conocimiento especializado tenidos en cuenta se evalúan mediante la inclusión en cada ítem de las siguientes cuestiones:

i. Justifica la respuesta (a las cuestiones propuestas que evalúan aspectos del conocimiento común)
ii. Identifica los conocimientos que se ponen en juego en la resolución de la tarea.
iii. Indica cómo cambiar el enunciado de la tarea para que resulte más difícil (o fácil, según el ítem) de resolver por un niño de primaria.

El cuestionario fue respondido por 241 futuros profesores del segundo curso de la especialidad Educación Primaria de la Universidad de Granada del año académico 2010-2011, en una sesión de dos horas de duración. Los conocimientos previos de los estudiantes sobre el tema fueron los relativos a sus formaciones básicas y los que profundizaron durante el año anterior en el estudio del bloque temático de geometría para maestros.

RESULTADOS

En este apartado presentamos los resultados obtenidos en las cuestiones que evalúan aspectos relativos al conocimiento especializado del contenido. Incluimos resultados globales para los cinco ítems en los tres aspectos del conocimiento especializado, y ejemplos de respuestas para el ítem 5a, cuyo enunciado se incluye en la figura 1.

Para las cuestiones referidas al conocimiento especializado del contenido se diferencian y valoran diferentes tipologías de respuestas según el estudio de determinadas variables cualitativas: la tipología de las justificaciones descritas en cada cuestión se apoya principalmente en Harel y Sowder (2007) y Marrades y Gutiérrez (2000) (para la caracterización de las justificaciones empírico-perceptivas), en Parzysz (2006) (para las validaciones perceptivo-deductivas e hipotético-deductivas) y en Recio y Godino (2001) (para las argumentaciones deductivas-informales y deductivas-formales).

Ítem 5a) Haz corresponder cada figura plana con el cuerpo de revolución que engendra al girar sobre el eje señalado.

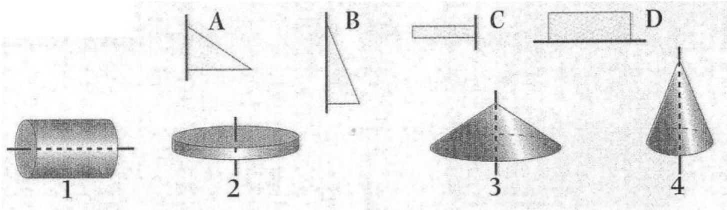


Figura 1: Ítem 5a) cuestionario VOT

Los conocimientos identificados por los alumnos se organizan según las categorías del EOS (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos), mientras que las variaciones de las tareas propuestas por los estudiantes se clasifican según los cambios sugeridos. Estos cambios pueden ser en el lenguaje y artefactos visuales, la descripción de conceptos visuales, las propiedades del objeto, el procedimiento visual involucrado, o en la longitud de la tarea. Además, para las diferentes cuestiones, se analizan posibles conflictos relacionados con la sinergia existente entre la componente visual y analítica presente en la tarea (Godino, Cajaraville, Fernández y Gonzato, 2012).

Conocimientos argumentativos (justificaciones de las respuestas)

En las justificaciones dadas por los estudiantes encontramos interpretaciones de las tareas en términos empíricos, asociadas a validaciones de tipo perceptivo, en las cuales hay un predominio de la componente visual (Figura 2). En dicha respuesta se mencionan conceptos aislados relacionados con propiedades visuales de los objetos involucrados (en este caso, grosor y tamaño), sin describirlos.

Figura 2: Ejemplo de justificación perceptiva del ítem 5a)

En las argumentaciones de tipo deductivo-informales, la sinergia entre lo visual y analítico propia de las tareas está a veces presente de forma implícita: en general para describir conceptos, propiedades y procedimientos visuales el sujeto utiliza un vocabulario cotidiano, cuyos términos se refieren a determinados objetos analíticos. Dicha relación entre los objetos visuales ("ver") y objetos analíticos ("saber"), aunque no es explicitada por el estudiante, le permite no obstante hacer afirmaciones correctas sobre las soluciones presentadas, y en algunos casos justificar sus soluciones. Como ejemplo de prueba deductiva-informal incluimos el ejemplo de la figura 3.

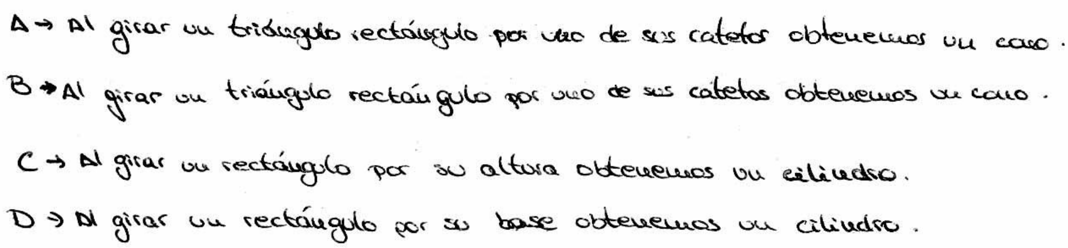


Figura 3: Ejemplo de prueba deductiva-informal

La carencia de pruebas deductivo-formales, con referencias a objetos independientes del contexto y con potencial de generalidad a diferentes situaciones, manifiesta que la interpretación del término "justificar" por parte de los alumnos ha sido estrictamente dependiente al tipo de tareas geométricas solicitadas. La gran mayoría de los estudiantes, no relacionan de forma espontánea la justificación de dichas tareas con otros temas más avanzados del currículo correspondiente, como puede ser el dibujo técnico, propiedades de geometría analítica, etc.

Identificación de conocimientos que se ponen en juego en la resolución de las tareas

A nivel global observamos que el grupo de alumnos ha conseguido identificar un conjunto bastante amplio de conocimientos que se ponen en juego en las tareas visuales seleccionadas, tanto relativos a conceptos, como propiedades y procedimientos. En el ítem 5 mencionan, entre otros, los conceptos de eje de revolución, generatriz, sección, volumen; como procedimientos, pasar de una figura de dos dimensiones a tres, girar polígonos sobre un eje; como propiedades, simetría, proporciones entre figuras 2D y 3D, posición del eje, entre otras.

Sin embargo, hemos observado que a nivel individual los alumnos tienen un conocimiento especializado muy pobre relacionado con la identificación de conocimientos puestos en juego en las tareas. Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre conocimientos movilizados en cada ítem (categorizando los diferentes tipos de objetos matemáticos reconocidos), y también un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de conocimientos reconocidos por cada estudiante. El grado de pertinencia refleja el número de conocimientos pertinentes identificados por los estudiantes, los cuales han sido evaluados y clasificados comparándolos con una respuesta esperada elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada.

En la Tabla 1 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de dicha variable.

Tabla 1. Frecuencias absolutas (porcentajes) del grado de pertinencia de los conocimientos reconocidos (*n*=241)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1	2	3	4	5
Pertinente	53 (22)	64 (26)	54 (23)	38 (16)	57 (24)
Parcialmente pertinente	73 (30)	81 (34)	68 (28)	55 (23)	61 (25)
No pertinente	104 (43)	73 (30)	102 (42)	93 (38)	96 (40)
En blanco	11 (5)	23 (10)	17 (7)	55 (23)	27 (11)

Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos en todas las respuestas. La puntuación media de toda la muestra relacionada con esta variable es solo de 3,6 (sobre 10).

De forma general se puede observar que la mayoría de conocimientos encontrados son de tipo conceptual: los alumnos mencionan conceptos básicos generalmente ya presentes en el enunciado de la tarea, aunque no los definen (Figuras 4 y 5).

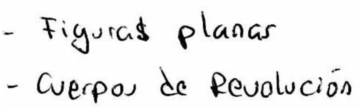


Figura 4: Ejemplo de respuesta parc. pertinente.

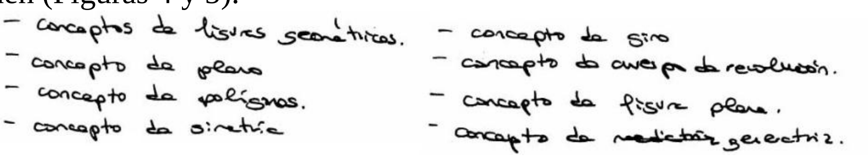


Figura 5: Ejemplo de respuesta pertinente.

Modificaciones del enunciado de las tareas

De forma similar que en el caso de la identificación de los conocimientos, también por lo que se refiere a las variaciones de las tareas propuestas, podemos observar que a nivel global la muestra de estudiantes ha conseguido proponer un conjunto amplio de cambios pertinentes y significativos. Sin embargo, observamos que a nivel individual los estudiantes tienen muy pobre conocimiento especializado relacionado con la formulación de posibles variaciones de tareas visuales.

Hemos realizado un análisis cualitativo de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre variaciones posibles a las tareas (categorizando los diferentes tipos de tareas propuestas), y también un análisis cuantitativo, distinguiendo un grado de pertinencia al conjunto de tareas propuestas por cada estudiante. De igual modo que para los conocimientos, el grado de pertinencia de las respuestas se asignó comparando una respuesta esperada, elaborada mediante un análisis a priori de la tarea solicitada, con las soluciones dadas por los estudiantes. En la Tabla 2 presentamos las frecuencias absolutas (y porcentajes) relativas a los valores de dicha variable.

Tabla 2. Frecuencias absolutas (y porcentajes) del grado de pertinencia de las variaciones de las tareas (*n*=241)

Grado de pertinencia	Ítem				
	1	2	3	4	5
Pertinente	63 (26)	49 (20)	87 (36)	40 (17)	50 (21)
Parcialmente pertinente	17 (7)	33 (14)	61 (25)	5 (2)	29 (12)
No pertinente	151 (63)	133 (55)	80 (33)	142 (59)	127 (53)
En blanco	10 (4)	26 (11)	13 (6)	54 (22)	35 (14)

La puntuación media de todo el grupo para la variable grado de pertinencia de la respuesta es solo de 3,0 (sobre 10). Estos resultados muestran muy pobre conocimiento especializado relacionado con la planificación de variaciones de tareas visuales.

Por lo que se refiere al ítem 5, se pedía indicar cómo cambiar el enunciado de la tarea para que resultase más difícil de resolver para un niño de primaria. Entre las variaciones no pertinentes destacamos las que propusieron añadir al enunciado original elementos superfluos, que ponen un énfasis en la caracterización física asociada a la tarea (por ejemplo la necesidad de que el eje "mueva" la figura, o que ésta gire muy rápido (Figura 6). Entre las variaciones pertinentes emergieron las relativas a la omisión de elementos gráficos presentes en la tarea, o bien las figuras planas o bien los cuerpos de revolución, con el objetivo de que estos sean dibujados por los alumnos (Figura 7).

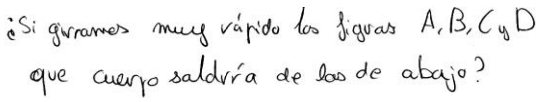


Figura 6: Ejemplo de variación no pertinente al ítem 5.

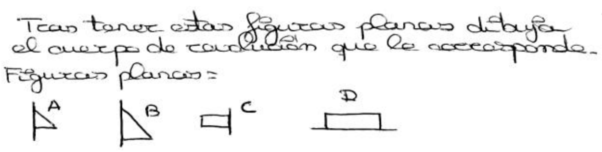


Figura 7: Ejemplo de variación pertinente dada al ítem 5.

CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos a partir del análisis cuantitativo y cualitativo de las resoluciones que 241 estudiantes dieron a las tareas incluidas en el Cuestionario VOT, señalan que los futuros profesores muestran ciertas dificultades para resolver tareas relacionadas con el conocimiento especializado del contenido. Las justificaciones propuestas por los alumnos a tareas visuales de nivel elemental se refieren principalmente a validaciones de tipo perceptivo y argumentaciones deductivo-informales expresadas con un vocabulario cotidiano. Aunque en el contexto de la escuela primaria dichas argumentaciones se pueden considerar como pertinentes, consideramos necesario que los futuros maestros puedan formular una prueba deductivo-formal de referencia que justifique la validez de la proposición y guíe su forma de argumentar en los diferentes niveles educativos. Parzysz (2006) indica que los futuros profesores no tienen el conocimiento necesario para reconocer que una argumentación de tipo perceptivo y una demostración rigurosa no se sitúan en el mismo plano. Consideramos entonces necesaria una formación que incluya la reflexión sobre los diferentes tipos de esquemas de pruebas, y la manera de articularlos de forma progresiva, desde los primeros niveles educativos. Este conocimiento le permitirá cumplir una de las finalidades de la enseñanza de la geometría en los niveles educativos obligatorios, consistente en "hacer pasar a los alumnos desde una 'geometría de la observación' a una 'geometría de la demostración' " (Parzysz, 2006, p. 129).

La carencia de variaciones pertinentes a las tareas dadas puede influir negativamente en una futura gestión de una trayectoria didáctica idónea para el desarrollo de habilidades visuales en la enseñanza de la geometría espacial. Parece entonces conveniente preparar a los futuros profesores para realizar análisis sistemáticos de las variables didácticas que intervienen en una determinada tarea visual, que oriente la reflexión sobre posibles generalizaciones, o particularizaciones, y las conexiones con otros contenidos matemáticos.

Las insuficiencias manifestadas en el conocimiento especializado relacionado con la identificación de conocimientos puestos en juego podrían obstaculizar una apropiada gestión del conocimiento matemático de sus futuros alumnos sobre la visualización. Estas carencias justifican la pertinencia de diseñar acciones formativas específicas para desarrollar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de los futuros maestros. El análisis de las prácticas matemáticas, objetos y procesos (Godino, 2009; Font, Godino y Gallardo, 2013), puede ser una herramienta potente para la identificación y caracterización del conocimiento especializado, en tanto que proporciona pautas y criterios para analizar dichos tipos de conocimientos.

Reconocimiento:

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC) y de la Beca FPU, AP2008-04560.

Referencias

Ball, D.L., Lubienski, S.T., y Mewborn, D.S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En Richardson, V. (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Battista, M. T. (2007). The development of geometric and spatial thinking. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 843-908). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En, M. Marín et al (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics* 82, 97–124.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J.D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1), 127-135.

Godino, J. D., Cajaraville, J. A., Fernández, T. y Gonzato, M. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30 (2), 163-184.

Gonzato, M., Godino, J. D. y Contreras, J. M. (2011). Evaluación de conocimientos sobre la visualización de objetos tridimensionales en maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco, M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 383-392). Ciudad Real: SEIEM.

Gorgorió, N. (1998). Exploring the functionality of visual and non-visual strategies in solving rotation problems. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 207-231.

Harel, G., y Sowder, L (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: National Council of Teachers of Mathematics.

Hill, H.C., Ball, D.L., y Schlling, S.G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education,* 39, 372-400.

Johnson, B. y Onwuegbuzie, A. J. (2004). Mixed methods research: A research paradigm whose time has come. *Educational Researcher*, 33 (7), 14-26.

Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics,* 44(1/2), 87-125.

Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles: de quoi s'agit-il? *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151.

Recio, A. M. y Godino, J. D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 48, 83-99.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14

EXPLORACIÓN DE LOS ESTILOS DE RAZONAMIENTO DE ESTUDIANTES CON ALTAS CAPACIDADES MATEMÁTICAS[xxiii]

Exploration of reasoning styles of mathematically talented students

Ángel Gutiérrez y Adela Jaime

Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Valencia

Resumen

En esta comunicación hacemos un análisis de los estilos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas de estudiantes de altas capacidades matemáticas, con el fin de identificar características diferenciadoras de estos estudiantes. En primer lugar, hacemos una síntesis de los principales modelos teóricos de caracterización de las altas capacidades matemáticas y repasamos la literatura relacionada con esta problemática. Después, presentamos varios casos de estudiantes de altas capacidades matemáticas resolviendo problemas y analizamos sus resoluciones para identificar los rasgos característicos de sus estilos de razonamiento.

Palabras clave: *altas capacidades matemáticas, resolución de problemas, estilos de razonamiento, educación primaria, ESO.*

Abstract

In this presentation we analyze reasoning styles and problem solving strategies used by mathematically talented students, to identify differential characteristics of these students. First, we synthesize the main theoretical models for identification of mathematical giftedness and review the literature on this issue. Then, we present some cases of mathematically talented students solving problems and we analyze their answers to identify the specific characteristics of their reasoning styles.

Keywords: *mathematically talented students, problem solving, thinking styles, primary school, lower secondary school.*

Gutiérrez, A. y Jaime, A. (2013). Exploración de los estilos de razonamiento de estudiantes con altas capacidades matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 319-326). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En los últimos años se puede observar un aumento del interés de los diferentes actores del sistema educativo (autoridades educativas, legislación, libros de texto, profesores, padres, investigadores en educación matemática) por la problemática educativa de los estudiantes superdotados y de altas capacidades matemáticas (aaccmm). La LOE diferencia, dentro del grupo de estudiantes con necesidades educativas especiales, a los que tienen "altas capacidades intelectuales" y plantea la necesidad de realizar adaptaciones curriculares u otras actuaciones específicas. Algunas editoriales ofrecen a los profesores, como complemento a los libros de texto, unas fichas con actividades de ampliación para estos alumnos. Las asociaciones de profesores de matemáticas organizan actividades extraescolares, como olimpiadas, el proyecto Estalmat, talleres y otras, dirigidas a este colectivo de estudiantes. También hay centros de enseñanza y profesores de forma individual que toman la iniciativa de desarrollar materiales de enseñanza personalizados para sus alumnos. Sin embargo, podemos decir que, de manera global, la atención específica a los estudiantes de aaccmm en las aulas sigue siendo muy deficiente, siendo uno de los motivos principales la falta de materiales educativos especialmente diseñados para la formación matemática de estos estudiantes en sus centros de enseñanza.

En este contexto, estamos desarrollando un proyecto de investigación cuyo objetivo final es la elaboración de materiales de enriquecimiento para la enseñanza a los estudiantes de aaccmm de diferentes temas de matemáticas de los currículos de E. Primaria y E.S.O. Este objetivo requiere previamente obtener información detallada sobre las características cognitivas específicas de los estudiantes con aaccmm de estos niveles educativos, en aspectos como sus formas de razonamiento matemático, formas de resolver problemas, uso de habilidades de visualización, cálculo mental o formas de demostración, entre otros.

En dicho contexto, el objetivo de esta comunicación es presentar una descripción de algunos estilos de razonamiento puestos en práctica por estudiantes de E. Primaria y E.S.O. con aaccmm cuando resuelven problemas de matemáticas y ejemplificarlos en algunos casos concretos.

La información disponible sobre este tópico en la literatura sobre investigación en educación matemática es reducida, por lo que nuestro estudio tiene un carácter exploratorio y descriptivo. Somos conscientes de que, siendo siempre problemática la generalización de resultados obtenidos en los estudios de casos, la dificultad de generalizar comportamientos observados en estudiantes de aaccmm es todavía mayor debido a lo reducido y heterogéneo de este colectivo.

REVISIÓN DE LA LITERATURA

La literatura sobre investigaciones con estudiantes de altas capacidades y superdotación incluye numerosas publicaciones que, desde la psicología, presentan formas de identificación, estrategias de tratamiento en aspectos sociales como las relaciones en la familia o en el aula, así como modelos teóricos que tratan de explicar y caracterizar la superdotación. No es nuestro objetivo bucear en este tipo de literatura, sino centrarnos en la que, desde la educación matemática, tiene que ver específicamente con investigaciones sobre aaccmm. Algunos autores han ofrecido listados de habilidades matemáticas que diferencian a los estudiantes con aaccmm, entre los que destacamos a Freiman (2006), Greenes (1981), Krutetskii (1976), Miller (1990) y Pasarín y otros (2004). En conjunto, las habilidades enunciadas por estos autores pueden organizarse en habilidades de tipo afectivo (relacionadas con el gusto e interés por las matemáticas), de aprendizaje (relativas a sus formas de aprender diferentes contenidos matemáticos) y de resolución de problemas (sobre sus estrategias de resolución, procesos metacognitivos de control, uso de la imaginación e intuición, etc.).

Nuestro interés se dirige al último grupo de habilidades, las relacionadas con la resolución de problemas, pues el objetivo del estudio que presentamos es identificar características de las formas de resolver problemas de matemáticas de los estudiantes españoles de aaccmm.

Algunos autores han investigado características de estos estudiantes en relación con aspectos concretos de su actividad de resolución de problemas, como la identificación de estudiantes con capacidad superior para la resolución de problemas de estructura multiplicativa y su aprendizaje de este campo conceptual (Castro, Benavides y Segovia, 2006, 2008), las relaciones entre aaccmm y las habilidades de visualización (Rojas, Jiménez y Mora, 2009) en contextos de problemas geométricos (Presmeg, 1986; Ramírez, 2012) y algebraicos (Jiménez, Rojas y Mora, 2011), las formas de inventar problemas características de los alumnos de aaccmm (Ellerton, 1986), las estrategias de resolución de problemas de demostrar (Sriraman, 2004), o las diferencias entre las estrategias de resolución empleadas por estudiantes de aaccmm y estudiantes medios (Heinze, 2005).

En las actas de los simposios de la SEIEM, hasta ahora han sido muy escasas las presentaciones de investigaciones sobre estudiantes de aaccmm: Castro (2008) ofrece una panorámica de las principales investigaciones publicadas hasta ese momento, en particular las relacionadas con la resolución de problemas. Reyes-Santander y Karg (2009) presentan la implementación de una unidad de enseñanza. Ramírez, Flores y Castro (2010) presentan una investigación orientada a observar las habilidades de visualización de estudiantes con aaccmm.

MARCO TEÓRICO

En la sección anterior hemos mencionado varias investigaciones cuyo objetivo es presentar listados de habilidades matemáticas que permitan diferenciar a los estudiantes de aaccmm y superdotados. De dichos listados, hemos seleccionado las siguientes habilidades por ser las que tienen relación directa con la actividad de resolución de problemas:

- Flexibilidad: Cambiar fácilmente de estructura y de estrategia, según convenga.
- Producir ideas originales, valiosas y extensas.
- Localizar la clave de los problemas.
- Identificar patrones y relaciones.
- Mantener los problemas y su resolución bajo control.
- Desarrollar estrategias eficientes.
- Simplificar los procesos al resolver problemas de tipo similar.
- No estar sujetos a técnicas de resolución que han tenido éxito en el pasado y poder hacer reajustes cuando éstas fallan.
- Tender a recordar las estructuras generales, abreviadas, de los problemas y sus soluciones.
- Tener capacidad de generalización y transferencia.
- Reducir el proceso de razonamiento matemático, simplificándolo para obtener soluciones racionales y económicas.

Estas habilidades no son disjuntas unas de otras, sino que durante la resolución de un problema se pueden usar varias de ellas, ya que algunas tienen su ámbito de aplicación en todo el proceso de resolución del problema mientras que otras son aplicables en momentos concretos. Por ejemplo, desarrollar estrategias eficientes o simplificar los procesos son unas habilidades amplias que se pueden utilizar al mismo tiempo que otras estrategias más específicas como localizar la clave del problema o identificar patrones y relaciones.

No intentamos validar la utilidad de estas habilidades para diferenciar a los estudiantes de aaccmm, pues asumimos que son adecuadas para dicho fin. El objetivo de la parte de nuestra investigación que presentamos aquí es, tomando estas habilidades como marco de referencia, recopilar información de estudiantes de aaccmm resolviendo problemas de matemáticas para identificar y describir estilos de razonamiento propios de estos estudiantes que los diferencien de los estudiantes medios. Por la limitación de espacio, en este texto sólo podemos mostrar ejemplos de algunas de las habilidades.

METODOLOGÍA

El objetivo de la investigación mencionado nos indica la conveniencia de usar una metodología de estudio de casos para la recogida de información y su análisis. El análisis de la información recogida no se centra en evaluar la corrección de las respuestas, sino en describir los procesos de resolución e identificar las estrategias empleadas por los estudiantes, con la finalidad de valorar aspectos como la rapidez de la resolución y el uso de habilidades enumeradas en la sección dedicada al marco teórico.

Al extraer conclusiones sobre las resoluciones de los problemas, es necesario tener también en cuenta los conocimientos matemáticos de los estudiantes, pues es frecuente plantear a estudiantes de aaccmm problemas cuya resolución típica se basa en contenidos matemáticos (conceptos, propiedades, fórmulas o algoritmos) que ellos todavía no han estudiado. Esto permite valorar habilidades relacionadas con la originalidad, creatividad, intuición o transferencia.

Aquí presentamos las resoluciones de problemas hechas por dos estudiantes, E1 y E2, trabajando solos en una sesión de un curso extraescolar específico para estudiantes talentosos. Ambos estudiantes tienen 11 años y sus capacidades matemáticas son claramente superiores a la media. El estudiante E1 cursa 1º de la E.S.O., porque ha sido adelantado de curso, y E2 cursa 6º de E. Primaria. Las resoluciones de los problemas y los diálogos entre investigadores y estudiantes que presentamos a continuación se grabaron en video.

ANÁLISIS DE DATOS EXPERIMENTALES

A continuación vamos a mostrar dos ejemplos de estilos de razonamiento empleados por estos estudiantes al resolver problemas de características diferentes.

Estilo de razonamiento: Identificar el elemento clave de un problema y flexibilidad para modificar el problema dado

El estudiante E1 está estudiando en su clase del instituto los problemas de móviles típicos escolares, aunque, en el momento de la entrevista, sólo ha estudiado los casos de móviles que circulan en sentido contrario hasta encontrarse y de móviles que salen del mismo punto con un tiempo de diferencia, circulando en el mismo sentido hasta que el segundo móvil alcanza al primero. Le planteamos el siguiente problema:

Román y Úrsula van por el mismo camino al colegio. La casa de Román está 200 metros más lejos del colegio que la de Úrsula. Los dos niños salen de sus casas a las 8’30 h. Úrsula camina a 80 cm/seg. y Román camina a 1’10 m/seg. ¿A qué hora se encontrarán?

E1 lee el enunciado y empieza sus cálculos:

$20000 \div 80 = 250$

$80\,(250 + x) = 110x$ [y continúa los cálculos hasta resolver la ecuación]

Al preguntarle qué está haciendo, explica:

E1: Es como si los dos [niños] salieran de la casa de Román pero Úrsula sale antes. He calculado cuánto tiempo tarda [Úrsula] en recorrer los 200 metros y es el tiempo de ventaja que tiene Úrsula.

Vemos cómo E1 ha identificado un elemento clave para resolver el problema (los puntos y las horas de partida) y transforma rápidamente un problema desconocido para él (móviles que circulan en el mismo sentido partiendo de diferentes puntos al mismo tiempo) en otro conocido (móviles que circulan en el mismo sentido partiendo del mismo punto con una diferencia de tiempo), mostrando así su capacidad para encontrar el elemento clave para resolver el problema y su flexibilidad para modificar la estructura del problema dado y convertirlo en otro conocido.

También hay que tener en cuenta, aunque el protocolo no lo refleja, la velocidad de resolución del problema, pues casi nada más terminar de leer el enunciado ha identificado el elemento clave del problema y ha empezado a resolverlo.

Estilo de razonamiento: Identificar el patrón y la relación entre las partes del problemas, flexibilidad, capacidad de generalización

Cinco meses antes del diálogo que transcribimos debajo, el estudiante E2 estuvo trabajando en el siguiente problema (abreviamos el enunciado por la limitación de espacio):

Aquí hay un triángulo al que se le ha añadido una línea [figura 3a]. *Podemos ver tres triángulos diferentes* [figura 3b].

- *¿Cuántos triángulos se ven si añadimos dos líneas al triángulo* [figura 3c]*? Dibújalos debajo y explica qué procedimiento has seguido para encontrarlos todos. ¿Estás seguro de que has contado todos los triángulos? ¿Por qué?*
- [se plantean las mismas preguntas para triángulos a los que se han añadido tres y cuatro líneas, figuras 3d y 3e].

- a - - b - - c - - d - - e -

Figura 3

- *Completa la siguiente tabla.*

Número de líneas añadidas:	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*10*	*100*	*n*
Número de triángulos:	*3*	*6*						

- *¿Cuántos triángulos habrá si se añaden 8 líneas? (puedes utilizar la tabla para contestar). Explica tu respuesta.*
- [se repite la pregunta para triángulos a los que se han añadido 20 y *n* líneas, ahora sin figuras de apoyo].

Ahora, hemos vuelto sobre este problema con el objetivo de que el estudiante reconstruya su resolución. En varios momentos a lo largo del diálogo se puede observar que E2 no recuerda lo que hizo cuando estuvo trabajando en el problema, por lo que ahora tiene que resolverlo de nuevo casi como si fuera la primera vez.

E2: [reflexiona un tiempo, sin escribir nada, pero su cara indica que está calculando mentalmente]

Investig.: ¿Cuántos triángulos salen en el caso primero [figuras 3a y 3b]?

E2: Tres.

Investig.: Tres. Vale, pues anótalo ahí. ¿Y en el siguiente?

E2: Seis.

Investig.: Seis. ¿Cuáles son los seis [triángulos]?

E2: Tres triángulos de una parte [los señala en la figura 3c], dos triángulos de dos partes [ya no los señala] y un triángulo de tres partes.

Investig.: Muy bien. ¿Y si lo dividimos en cuatro?

E2: En cuatro, ... pues serían cuatro de una parte, ... diez.

Investig.: A ver, ¿cómo los has contado?

E2: Pues cuatro de una parte, tres de dos partes, dos de tres partes y uno de cuatro partes.

[sigue otra respuesta similar para el triángulo dividido en cinco partes]

Investig.: Muy bien. Y luego, si tenemos 100 partes, ¿cuántos triángulos habrá?

E2: [hasta ahora todos los cálculos los ha hecho mentalmente] Pues, ... es que ahora lo tengo que pensar.

Investig.: Pero escríbetelo si quieres, tienes ahí el lápiz.

E2: [coge el lápiz pero no lo usa; durante 42 segundos sus gestos indican que está calculando mentalmente]

Investig.: Cuéntame lo que estás pensando.

E2: Estoy pensando en la explicación que diste tú [cuando resolvimos el problema la primera vez].

Investig.: Ya, pero, ¿lo que has hecho hasta ahora sirve? Los recuentos que has hecho para dos partes, tres partes, ... ¿cuál es la secuencia que hay ahí?

E2: La secuencia, ... Que ahí es de n+1 más ... bueno, n es el número de líneas. n+1 más n más n-1 más n-2 más n-3 más n-4 más n-5

Investig.: [interrumpiéndole] Hasta ...

E2: Hasta cero.

Investig.: Hasta 1, el triángulo grande, que incluye todas las partes.

E2: Sí.

Investig.: Escribe eso, a ver, escribe esa suma. ... ¿Cuánto sumarían entonces? Si tenemos 100 partes, ¿cuánto sumarían? 1 más 2 más 3 ¿hasta ...?

E2: 100.

Investig.: Hasta 100. Y si tenemos n partes, es lo que has dicho tú, 1 más 2 más 3, hasta n.

Ahora E2 se queda pensando un momento pero el investigador le interrumpe y le explica el procedimiento para calcular la suma de los 100 primeros números naturales. E2 escribe las dos secuencias 1, 2, ..., 99, 100 y 100, 99, ..., 2, 1. El investigador le hace notar que todas las parejas de números suman 101 y le pregunta cuántas veces tiene 101. E2 contesta y, a continuación, hace el cálculo de 100 x 101, se da cuenta de que debe dividir el resultado entre dos y obtiene el valor correcto de la suma.

E2: Entonces, es ... [tras unos pocos segundos, escribe directamente la fórmula] n x (n + 1) / 2.

Investig.: n + 1 por n partido por 2. Muy bien. Esa es la fórmula general que te permite calcular cualquier suma de números [naturales] desde el 1 hasta el que quieras.

A lo largo de la resolución de este problema, el estudiante da muestras de su competencia en varias de las habilidades enunciadas: Identifica enseguida el patrón que organiza las secuencias de cantidades de triángulos generados por las sucesivas divisiones del triángulo inicial, gracias a lo cual es también capaz de simplificar el proceso de cómputo de la cantidad de triángulos ya que no necesita recurrir a dibujar los triángulos en los sucesivos casos para contarlos. Además, muestra la flexibilidad necesaria para aplicar el patrón a las sucesivas particiones del triángulo y encontrar las soluciones correspondientes. También es evidente su capacidad de generalización, en especial cuando, al pedirle la cantidad de triángulos que hay si tenemos 100 partes, trata de calcular la cantidad de triángulos del caso general, para *n* partes.

CONCLUSIONES

Las limitaciones de espacio no nos permiten incluir más ejemplos de estudiantes de aaccmm resolviendo problemas y utilizando otros estilos de razonamiento, pero creemos que los casos presentados aportan indicios de que los estudiantes de aaccmm son capaces de desarrollar una amplia variedad de habilidades de resolución de problemas específicas, diferentes o más avanzadas que las de sus compañeros de clase, que se traduce en una amplia diversidad de estilos de razonamiento.

Una cuestión a la que en este momento no podemos dar una respuesta apoyada en datos experimentales es si realmente los estilos de razonamiento de los estudiantes de aaccmm se diferencian mucho de los de sus compañeros de clase. Uno de los próximos pasos de nuestra investigación es cubrir este hueco planteando los mismos problemas a grupos completos de clase para observar los estilos de razonamiento y las estrategias de resolución de estudiantes con capacidades matemáticas no tan elevadas. No obstante, si observamos los resultados de las investigaciones citadas en las que se han comparado estudiantes de capacidades matemáticas medias y altas (Castro, Benavides y Segovia, 2006; Ellerton, 1986; Heinze, 2005; Reyes-Santander y Karg, 2009; Rojas, Jiménez y Mora, 2009), todos apoyan la hipótesis de que también los estilos de razonamiento de los estudiantes de aaccmm serán claramente diferentes de los de sus compañeros.

Referencias

Castro, E. (2008). Resolución de problemas. Ideas, tendencias e influencias en España. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho & L.J. Nieto (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XII* (pp. 113-140). Versión electrónica disponible en <https://dl.dropbox.com/u/104572257/Actas/Actas12SEIEM.zip>.

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *Faisca, 11*, 4-22.

Castro, E., Benavides, M., & Segovia, I. (2008). Diagnóstico de errores en niños con talento. *Unión, 16*, 123-140.

Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems - A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 261-271.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A challenging situations approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Arithmetic Teacher, 28*(6), 14-17.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Jiménez, W., Rojas, S., & Mora, L. (2011). *Características del talento matemático asociadas a la visualización*. Texto de la presentación en el XIII Congreso de la CIAEM. Disponible en <http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/1175/234>.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren*. Chicago, EE.UU.: The University of Chicago Press.

Miller, R. C. (1990). *Discovering Mathematical Talent*. Washington, EE.UU.: ERIC. Disponible en <http://www.eric.ed.gov/ERICWebPortal/contentdelivery/servlet/ERICServlet?accno=ED321487>.

Pasarín, M. J., Feijoo, M., Díaz, O., & Rodríguez, L. (2004). Evaluación del talento matemático en Educación Secundaria. *Faísca, 11*, 83-102. Disponible en <http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2476416.pdf>.

Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 297-311.

Ramírez, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático* (tesis doctoral no publicada). Granada: Universidad de Granada. Disponible en <http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/7461/descargar>.

Ramírez, R., Flores, P., & Castro, E. (2010). Visualización y talento matemático: una experiencia docente. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra, (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 499-510). Lérida: SEIEM.

Reyes-Santander, P., & Karg A. (2009). Una aproximación al trabajo con niños especialmente dotados en matemáticas. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 403-414). Santander: SEIEM.

Rojas, S., Jiménez, W., & Mora, L. C. (2009). *El uso de la resolución de problemas como instrumento para la caracterización de talento en matemáticas*. Texto de la presentación en el 10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. Disponible en <http://funes.uniandes.edu.co/709/1/eluso.pdf>.

Sriraman, B. (2004). Gifted ninth graders' notions of proof: investigating parallels in approaches of mathematically gifted students and professional mathematicians. *Journal for the Education of the Gifted, 27*(4), 267-292.

[xxiii] Este estudios es parte de las actividades del proyecto de investigación *Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas* (EDU2012-37259), subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España en el Subprograma de Investigación Fundamental No Orientada del Programa Nacional de I+D+i.

CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR ANTE ERRORES RELATIVOS AL ÁLGEBRA DE LOS ALUMNOS DE SECUNDARIA

Teacher's Professional Knowledge about Secondary Students' Mistakes on Algebra

José L. Huitrado[a] y Nuria Climent[b]

[a]Universidad Autónoma de Zacatecas, [b]Universidad de Huelva

Resumen

En este trabajo se exponen los resultados parciales de una investigación sobre el conocimiento profesional de los profesores evaluadores olímpicos puesto en acción al analizar los errores relativos al álgebra. A través de dos pruebas de interpretación sobre los errores, y a partir de un análisis inspirado en la teoría emergente de los datos, obtuvimos dimensiones para la caracterización de saberes en la comprensión sobre los errores. En los resultados describimos los saberes de un profesor, estrechamente relacionados con la práctica y con el conocimiento sobre el aprendizaje de los alumnos.

Palabras clave: *conocimiento profesional, error, álgebra*

Abstract

This paper presents the partial results of a research on the professional knowledge of Olympic evaluators teachers put into action when analyzing the errors relating to algebra. By means of two tests on errors interpretation and from an analysis inspired by the grounded theory, we obtained dimensions for the characterization of knowledge in understanding about mistakes. In the result, we also describe a teacher's knowledge, which is closely related to practice and knowledge about the learning of students.

Keywords: *teachers' professional knowledge, mistake, algebra*

INTRODUCCIÓN

Existen diversas conceptualizaciones del conocimiento profesional del profesor, que han influido en las aproximaciones metodológicas que se aplican en su estudio (Llinares, 1996). Los significados de términos como concepciones, creencias y conocimientos, y las relaciones entre éstos, determinan diferentes posturas que imprimen peculiaridad a la definición de este conocimiento y a la relevancia de sus componentes. La perspectiva del conocimiento del profesor, en este trabajo, se sitúa en la línea del conocimiento en acción o saber práctico profesional (Azcárate, 2004) o el "Knowing something" al que hacen referencia Cook y Brown (1999). Frente a planteamientos que intentan distinguir entre creencias, concepciones y conocimientos, o analizar la descomposición de éstos, nos interesa comprender la influencia de conocimientosy concepciones desde un punto de vista integrado (Thompson, 1992).

Por otro lado, reconocemos en el error un elemento medular en las propuestas de enseñanza de las matemáticas constructivistas, al ser reconocido como indicador de la comprensión del alumno. En este sentido sostenemos que el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas con una concepción constructivista del aprendizaje, debe permitirles la comprensión sobre los errores de sus alumnos.

Huitrado, J. L. y Climent, N. (2013). Conocimiento profesional del profesor ante errores relativos al álgebra de los alumnos de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 327-336). Bilbao: SEIEM.

Reconocemos con Llinares (1996) la complejidad y naturaleza contextualizada del conocimiento profesional del profesor de matemáticas y con ello la necesidad de nuevas formas de aproximarnos a su comprensión; nuestra pretensión es aportar elementos para el diseño de situaciones que permitan el desarrollo del conocimiento profesional para la comprensión sobre los errores.

MARCO DE REFERENCIA

Los errores de los alumnos relativos al álgebra y el conocimiento profesional del profesor

En nuestra consideración, el error es un elemento inherente al proceso de aprendizaje, compartimos que "los errores son datos objetivos que encontramos permanentemente en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; constituyen un elemento estable de dichos procesos" (Rico, 1998, pp. 76). La presencia constante y el status que se concede al error caracterizan la postura de enseñanza que compartimos en donde el error es un indicador del proceso de comprensión del alumno.

El sustento de un contexto positivo para el error como medio para enseñar (Astolfi, 1999) se construye a partir de las aportaciones de Bachelard y Piaget. Así, nuestra concepción sobre el aprendizaje considera que éste no es una acumulación de conocimientos, sino que los conocimientos anteriores son cuestionados a partir de desequilibrios, lo que provoca su reorganización. Por su parte, Bachelard (1948) plantea el aprendizaje en términos de la superación de obstáculos epistemológicos, planteamiento que es recuperado en la Teoría de las Situaciones Didácticas en donde el error está asociado a la existencia de un obstáculo (Brousseau, 1976).

Cada paradigma sobre la enseñanza y el aprendizaje supone una posición respecto de lo que son ambos procesos y, por tanto, también sobre el error. Algunos posicionamientos en los que se fundamenta nuestro trabajo son: el error como evidencia de conocimiento, como producto de una manera de conocer, como evidencia de un proceso creativo y como un medio para enseñar.

Por otro lado, los errores en los que se centra nuestro trabajo se refieren a la comprensión sobre las ecuaciones. Socas (2011) reconoce tres etapas de investigación de los errores en el álgebra, la primera caracterizada por el recuento de éstos, su clasificación y asociación con causas relativas al contenido matemático (e.g. Rico, 1998); en la segunda se reconoce el error como elemento natural del proceso de aprendizaje, intentando comprender el pensamiento de los alumnos; y una tercera en la que se trabaja en clasificar los errores y conocer su origen, favoreciendo procedimientos que ayudan a los alumnos a corregirlos (e.g. Palarea, 1998; Socas, 2007).

Varios planteamientos sustentan la necesidad de que los profesores interpreten de manera adecuada los errores de los alumnos (Rico, 1998; Astolfi, 1999); sin embargo, se cuenta con poca información de cómo ir más allá de su identificación y clasificación. En la literatura no se evidencian estudios sobre el conocimiento de los profesores en el análisis de los errores.

Nuestro interés es estudiar la forma en la que los conocimientos y creencias orientan las acciones del profesor (Thompson, 1992). En ese sentido, concebimos el conocimiento profesional del profesor integrado por diferentes tipos de saberes que orientan su acción, un saber práctico que se fortalece en la atención a problemas profesionales (Azcárate, 2004). En términos de Cook y Brown (1999), nos referimos a lo que ellos denominan "Knowing" (something), el cual no es asumido como un conocimiento estático que puede sustentar, posibilitar o ser usado en la acción, sino que es acción misma; para el caso de nuestro estudio consideramos los saberes en la acción de comprender los errores.

METODOLOGÍA

Nos propusimos comprender el conocimiento que ponen en juego los evaluadores olímpicos al analizar los errores relativos al álgebra; a partir de un paradigma interpretativo, realizamos un estudio de casos mediante el cual estudiamos a 4 profesores evaluadores de las olimpiadas de matemáticas en Zacatecas, aquí nos centraremos en el caso de uno de ellos, al que llamaremos Raúl.

Al ser nuestra investigación un estudio de casos exploratorio, aspira a abrir las puertas a estudios más profundos y favorecer el surgimiento de nuevas preguntas de investigación. El tratamiento de la información se realizó siguiendo un proceso inductivo inspirado en la teoría emergente de los datos. Los instrumentos de recogida de datos se describen a continuación:

a) Una entrevista semi-estructurada cuyo objetivo fue recoger datos generales sobre Raúl así como algunas nociones sobre los errores,

La revisión de la literatura sobre los errores nos permitió la selección de los contenidos de las dos pruebas de análisis sobre los errores aplicadas en dos momentos, con una distancia de 5 semanas:

b) La primera, interpretando los errores en los procesos de resolución de tres alumnos a un ejercicio de división de potencias.

c) La segunda, valorando siete respuestas erróneas a la resolución de una ecuación a través de la tarea de reconstrucción de los procesos seguidos por los alumnos para llegar a cada una de ellas.

La información se recabó a partir de pruebas escritas y grabaciones de audio, se transcribió y se procedió a la selección de las unidades de información; a partir de múltiples reflexiones sobre los datos obtenidos con cada uno de los instrumentos, fue posible construir una serie de dimensiones sobre la interpretación del error. El instrumento de análisis que obtuvimos se extrae de las respuestas de Raúl, de nuestro análisis como investigadores y de la literatura que hemos revisado (Rico, 1998; Astolfi, 1999; Cerdán 2008); si bien no consideramos específicamente ninguna de las clasificaciones presentadas en estos trabajos, no podemos negar su influencia en nuestra sensibilidad teórica (Strauss y Corbin, 1994, en Muñoz-Catalán, 2010).

ANÁLISIS Y RESULTADOS

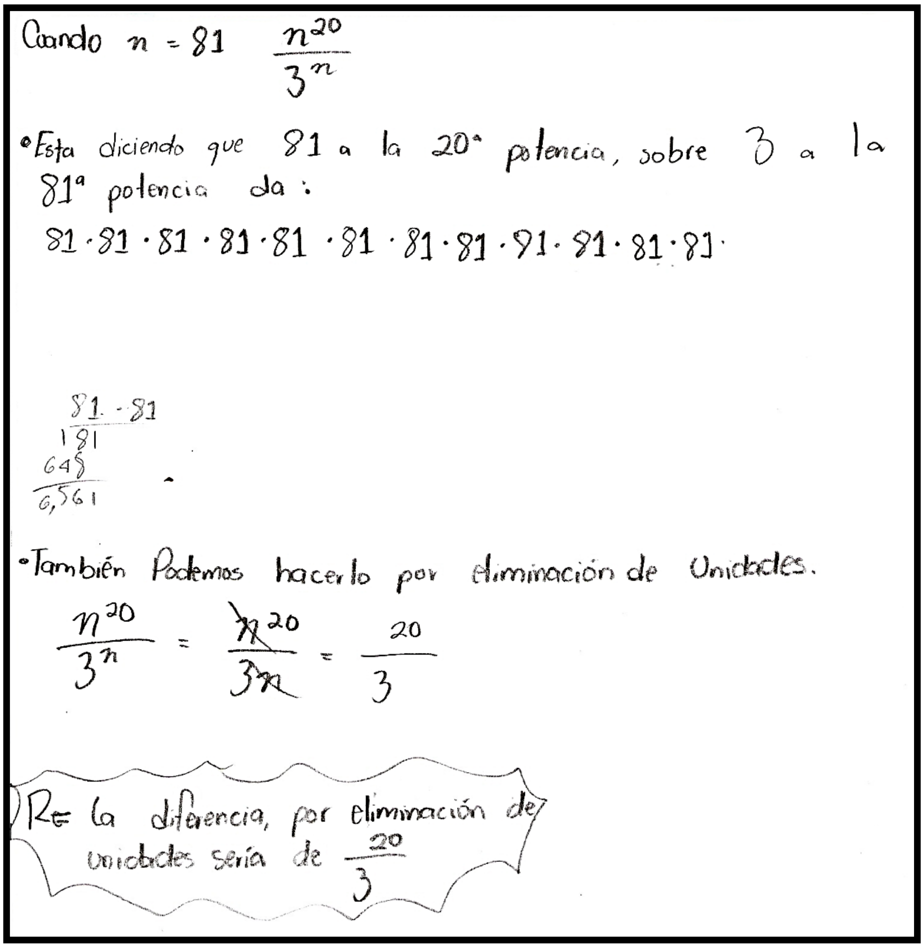
Raúl es Licenciado en Educación Secundaria con Especialidad en Matemáticas, actualmente cursando una Maestría en Docencia. Tiene una experiencia de 4 años de ejercicio profesional en bachillerato y secundaria. Participa desde hace 8 años en la Olimpiada Estatal de Matemáticas de primaria y secundaria; en estos eventos ha fungido como juez y asesor. Considera que los principales errores que se presentan en el álgebra se deben a la dificultad de interpretar las diferentes funciones de la literal y lo relaciona con la adquisición de reglas sin significado como las leyes de los signos o de los exponentes; afirma que los errores se asocian, de manera general, con la forma de desarrollar la enseñanza (entrevista inicial, 30/08/2011).

La primera prueba se basa en el análisis de tres protocolos de resolución al ejercicio siguiente:

PROBLEMA 3	Cuando $n = 81$, ¿Cuál es el valor de $\frac{n^{20}}{3^n}$?

Figura 1: Ejercicio planteado a los alumnos y que genera los protocolos de la prueba 1.

A continuación ilustramos el análisis realizado con la primera prueba de errores y en torno al proceso del alumno A:



Cuando $n = 81$ $\frac{n^{20}}{3^n}$

• Esta diciendo que 81 a la 20° potencia, sobre 3 a la 81ª potencia da:

$81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 81 \cdot 91 \cdot 91 \cdot 81 \cdot 81 \cdot$

$81 \cdot 81$
181
648
$6{,}561$

• También Podemos hacerlo por eliminación de Unidades.

$$\frac{n^{20}}{3^n} = \frac{\cancel{n}^{20}}{3\cancel{n}} = \frac{20}{3}$$

R= la diferencia, por eliminación de unidades sería de $\frac{20}{3}$

Figura 2: Protocolo de resolución correspondiente al alumno A.

Las dimensiones obtenidas mediante nuestro estudio se organizan en la tabla 1 y se explican brevemente a continuación.

Tabla1: Dimensiones que emergieron del análisis.

TABLA DE DIMENSIONES							
ACTITUD	**CONCEPCIÓN DEL ERROR**	**ORIGEN DEL ERROR**	**ANÁLISIS**	**PROPÓSITO DEL ANÁLISIS**	**EVIDENCIA**	**VALORACIÓN**	**REFERENCIA DE VALORACIÓN**
Actitud Negativa (AN) Aversión ante el error	Como Fallo del Alumno (FA)	Descuido (O-DC)	Superficial, Desinteresado (A-SD)	Identificar el Error (P-IE)	Error Puntual (E-EP) Como punta del iceberg	Valoración Absoluta del error en lo Aislado (E-VAA)	El error determina la Distancia al Proceso Esperado (R-DPE)
	Como Fallo del Proceso de enseñanza (FP)	Ausencia de Conocimiento (O-AC)					
Actitud Positiva (AP) Aprecio por el error	Como Indicador de Saber del alumno (IS)	Conocimiento Alternativo (O-CA)	Búsqueda de Sentido (A-BS)	Comprender el Error (P-CE)	Todo el Proceso (E-TP) El iceberg en toda su extensión	Valoración Relativa en el Contexto general del proceso (V-RC)	El error le da Sentido al Proceso Alternativo (R-SPA)

Dimensiones sobre actitudes, concepciones y posturas del profesor ante el error de los alumnos

Dimensión Origen

En una concepción negativa del error se asocia al descuido del alumno (O-DC) o la ausencia de conocimiento (O-AC); en la concepción positiva del error, lo identificamos como conocimiento alternativo (O-CA).

Dimensión Análisis

El análisis difiere por la profundidad con que se realice: el análisis superficial y desinteresado (A-SD) del que sólo trata de encontrar el error o el análisis en busca de sentido (A-BS) del que se interesa por obtener información sobre la comprensión del alumno.

Dimensión Propósito

Un propósito de identificación del error (P-IE) se relaciona con un análisis superficial y desinteresado (A-SD); mientras que la comprensión del error (P-CE) se relaciona con un análisis en búsqueda de sentido (A-BS).

Dimensión Evidencia

Se distingue entre fijar la atención en el error de manera puntual (E-EP) (como cuando se observa la punta del iceberg) o apreciarlo en el contexto de todo el proceso de resolución (E-TP) (como cuando consideramos el iceberg completo).

Dimensión Valoración

La consideración del error como un elemento puntual (E-EP), está asociada a una valoración en sí mismo, valoración absoluta en lo aislado (V-AA), que asigna una etiqueta rápida, acentuando más las semejanzas que las diferencias; se contrapone con la valoración relativa en el contexto (V-RC) que, en el reconocimiento de la diversidad, busca caracterizar detalladamente al error como un caso, si no único, sí particular, y cuya caracterización sólo está completa si se considera el proceso en el cual se presenta.

Dimensión Referencia

En correspondencia con la de valoración. En una valoración absoluta y aislada (V-AA), se hace notar la diferencia entre el estado en que queda el proceso de resolución al momento de presentarse el error y el proceso que se considera idóneo, referencia de distancia al proceso esperado (R-DPE). En contraposición, en una valoración relativa en el contexto (V-RC), se aprecia el significado que le aporta el error a todo el proceso alternativo, referencia del sentido al proceso alternativo (R-SPA).

Saberes en la Interpretación del error

Las dimensiones obtenidas y que consideramos determinadas por las actitudes y concepciones sobre el error, permiten iniciar la caracterización de lo que hemos denominado saberes en la comprensión sobre los errores. Los consideramos saberes que pueden proceder de la reflexión del profesor sobre su práctica y el aprendizaje de sus alumnos:

Saber que un error es respuesta a la interpretación de una pregunta (SERP)

Se refiere al reconocimiento de que un error es una respuesta, una manifestación de voluntad de resolver la tarea, problema o ejercicio y que no es una respuesta cualquiera, al azar, sino que trata de ser aceptada. Este saber considera que hay una lógica que respalda al error y además supone la posibilidad de encontrarla. Podríamos considerarlo como un saber que detona el proceso de búsqueda.

Saber que el mismo error puede tener diferente origen (SEDO)

Este saber se orienta a la consideración de la diversidad y la individualidad en los procesos de pensamiento de los alumnos y por tanto en los errores. Podríamos considerarlo como un saber que se resiste a etiquetar demasiado pronto y a considerar la homogeneidad de los casos.

Saber reconstruir los procedimientos alternativos de los alumnos (SRPA)

Este saber supone creatividad, orienta a poseer un conocimiento flexible de la matemática, se resiste a encorsetarse en el rigor o el formalismo de los procesos esperados. Reconoce que hay varios caminos y que, no necesariamente, uno es el correcto. Supone poder reconstruir los procesos de los alumnos en razón de darle sentido al resultado o proceso propuesto por ellos.

A continuación presentamos los resultados acerca del conocimiento del profesor:

Raúl hace conclusiones parciales sobre el proceso seguido por el alumno:

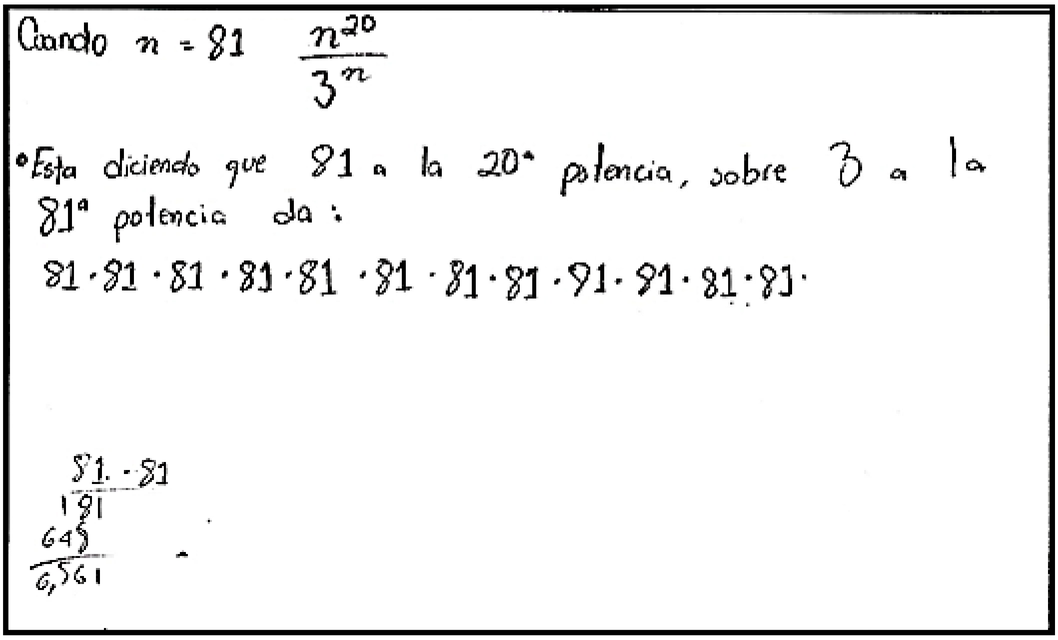


Figura 3: Primera parte del proceso de resolución del alumno A.

Raúl reconoce que el alumno hace una interpretación adecuada del problema y señala:

> [A-SD; E-EP; V-AA; R-DPE] (Ver indicadores de dimensiones en la Tabla 1) "En la primera parte de la argumentación el alumno está describiendo con palabras lo que la expresión representa; sin embargo, muestra después que $\frac{81^{20}}{3^{81}}$, es lo mismo que 81^{12}."

Raúl sabe que el alumno quiso expresar de forma desarrollada la potencia 81^{20}, y afirma que expresó inadecuadamente que: $\frac{81^{20}}{3^{81}} = 81^{12}$.

Dicha afirmación parece corresponder con un análisis que no persigue explicaciones sobre lo plasmado por el alumno(A-SD):

Figura 4: Desarrollo parcial de la potencia 81^{20}

Esta expresión es todo lo que considera Raúl como base de su juicio, como evidencia del error en lo puntual (E-EP); asimismo, realiza una valoración absoluta en lo aislado (V-AA) que de manera inmediata le lleva a concluir que el alumno expresa que $\frac{81^{20}}{3^{81}} = 81^{12}$; la referencia es la distancia al proceso esperado (R-DPE) (lo que el alumno debió de hacer, lo que debió de escribir).

De manera similar en la apreciación siguiente:

> [O-DC-AC; R-DPE] “Considero que el error surge al no visualizar que se trata de dos números que son uno múltiplo del otro elevado a la potencia 20 y 81 respectivamente”.

que el alumno no considere la expresión como un cociente de potencias hace que Raúl asuma que el origen del error sea un descuido o una ausencia de conocimiento (O-DC-AV). Para Raúl, no visualizar esa posibilidad, es considerado como la causa del error y el referente vuelve a ser la distancia al proceso esperado (R-DPE).

Un segundo intento del alumno corresponde al siguiente fragmento:

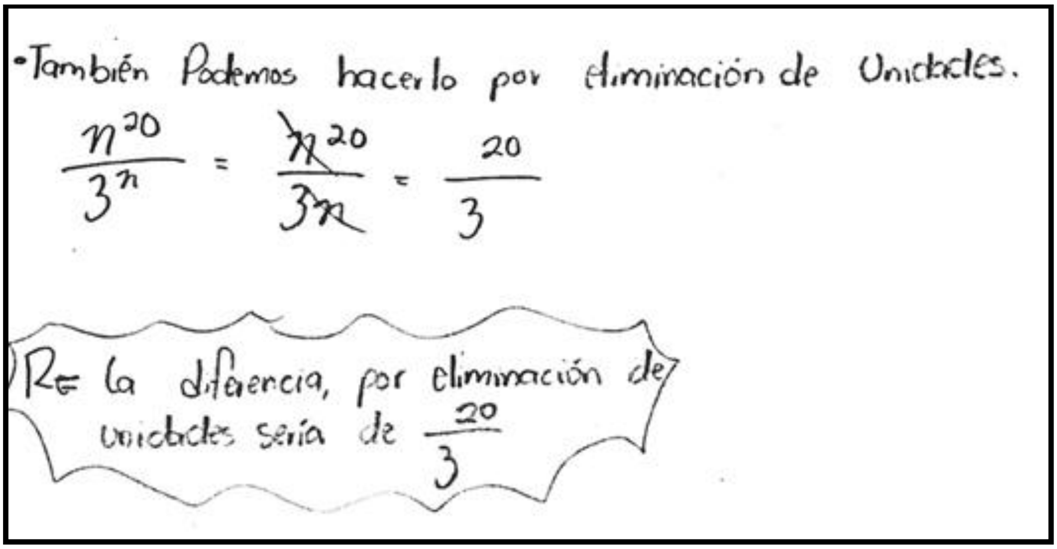


Figura 5: Segunda parte del proceso de resolución del alumno A.

Raúl identifica los siguientes errores:

> [O-DC; E-EP] “En su segunda explicación interpreta el $\frac{n^{20}}{3n}$ en la que 3n es 3 veces n, pudo ser por la forma en la que se escribió”.

La apreciación de Raúl se concentra en señalar el error en el cambio de 3^n por $3n$, considerando como evidencia el error puntual (E-EP) y asociándolo con la forma en que lo escribió, lo que interpretamos como la designación de origen de descuido del alumno (O-DC).

Respecto de la respuesta (figura 6), Raúl declara:

> [E-EP; V-AA; R-DPE] “Otro error es que en su respuesta habla de diferencia, y la forma en la que expresa su respuesta, ya que de acuerdo al lenguaje matemático no es posible expresar $\frac{20}{3}$ sin haber un número el cual sea elevado a la 20”.

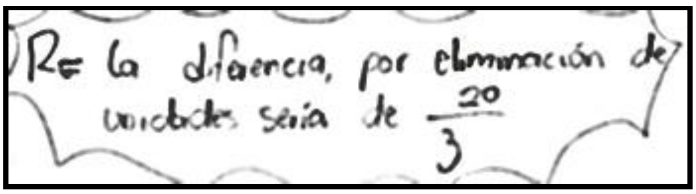


Figura 6: Expresión del resultado que propone el alumno.

Nombrar “diferencia por eliminación de unidades” y expresar una potencia sin base, sólo con el exponente: ($\frac{20}{3}$), son señalados en lo particular, como evidencia de error en lo puntual (E-EP) sin que muestre intención de buscar una relación entre ellos o con el contexto, la valoración es absoluta en lo aislado (V-AA); en este caso la referencia de la apreciación aparece explícita cuando Raúl expresa “de acuerdo con el lenguaje matemático” (refiriéndose a la cancelación de términos semejantes), coincidiendo con una referencia de distancia al proceso esperado (R-DPE).

El análisis, durante la segunda visita (5 semanas después), se orientó a identificar similitudes en las dificultades evidenciadas por los tres alumnos, es conveniente mencionar que este segundo análisis, lo realiza después de trabajar en la segunda parte de la Prueba de análisis de errores, tarea que suponía la reconstrucción de los procesos seguidos por los alumnos para llegar a cada una de las respuestas presentadas.

Raúl comienza afirmando que se trata del mismo error (refiriéndose a escribir $3\mathrm{n}$ en lugar de 3^{n}).

[A-BS; SEDO] “aquí es lo mismo; es el mismo error, ¿no? ¿y aquí, qué multiplicó?..., no, aquí ni siquiera la noción de potencia 3^{n}”.

Por medio de un análisis en la búsqueda de sentido (A-BS), Raúl pasa de considerar que los alumnos A y C tienen un error común asociado a la escritura por descuido (cambiar 3^{n} por $3\mathrm{n}$), a diferenciarlos respecto de su origen (SEDO): uno asociado a la escritura y otro a un problema conceptual, pues el alumno C multiplica 81×20.

[E-TP; V-RC] “Este si tiene la noción de potencia al hacer esto 81×81 (alumno A), nada más lo que sucedió fue que confundió la escritura y este (alumno C) no tiene la noción de potencia pero sí conoce algo de álgebra”.

En un análisis en donde le pedimos afinar su apreciación, Raúl reconoce que no siempre es posible diferenciar un problema de escritura de uno conceptual (P-CE).

[P-CE; E-TP; SRIP; SEDO; SRPA] “un problema de escritura nos puede llevar a pensar que es un problema conceptual”.

En el siguiente fragmento argumenta que, puede ser que el alumno A considere otra alternativa, al notar que la primera estrategia requiere de mucho trabajo, y que al plantear el proceso algebraico, cometió un error:

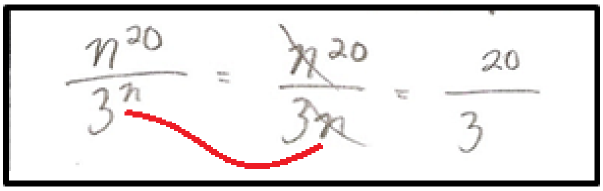


Figura 7: Detalle del cambio de 3^{n} por $3\mathrm{n}$

[O-CA; A-BS; SRPA] “aquí déjeme decirle que me atrevo a decir que fue de escritura y aquí está la escritura aquí (…) porque sabe qué significa el 20 aquí arriba y dice:

{Ao:} ¡ah, pues lo multiplico! híjole, ¿cuántas veces? pues 20;

Ya cuando vio que era mucho dijo:

{Ao:} no, mejor le busco otra forma algebraica

Y aquí fue donde cometió el error de escritura, el concepto lo tiene pero no, hubo el error acá, en esta confusión”

Cuando Raúl regresa sobre los procesos en la búsqueda de sentido (A-BS) (SRPA), tiene la posibilidad de reconsiderar su percepción del error, donde la escritura parcial del desarrollo de la potencia, que en un principio consideró error, es muestra de conocimiento, aunque no coincida con el esperado (O-CA).

CONCLUSIONES

Las dimensiones obtenidas y su aportación a la caracterización de las categorías iniciales de los saberes en acción, puesto que la literatura no da cuenta de productos en esta línea, pueden ser útiles en el proceso de definición del conocimiento práctico profesional del profesor de matemáticas.

Nuestra investigación parte de considerar el saber integral que los profesores ponen en acción al analizar los errores; así podemos resaltar la interrelación que detectamos entre las dimensiones obtenidas. Reconocemos una relación interesante, que fundamenta la necesidad de considerar al error con una concepción positiva que detone una actitud en el mismo sentido; aunque no podemos afirmar que una buena actitud pueda potenciar el desarrollo de conocimientos, sí puede detonar la decisión de ponerlos en juego.

Los saberes identificados orientan a una acción positiva; esto es, saberes positivamente intencionados en comprender. Podrían considerarse como una amalgama de concepciones y actitudes positivas con unos conocimientos flexibles; saber intencionado por considerar que vale la pena analizar con detalle, saber interesado en descubrir lo que hay detrás de un error.

Los instrumentos empleados en este estudio sugieren características de situaciones potencialmente favorables para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor en la comprensión sobre los errores.

REFERENCIAS

Astolfi, J.P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. España: Diada Editora.

Azcárate, P. (2004). Los procesos de formación: en busca de estrategias y recursos. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp.43 – 60). Coruña: SEIEM.

Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico. Contribución a un psicoanálisis del conocimiento objetivo*. México: Siglo XXI Editores.

Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. In J. Vanhamme & W. Vanhamme (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre organisée par la Commission Internationale pour l'Etude et l'Amélioration de l'Enseignement des Mathématiques* (pp. 101-117). Louvain la Neuve.

Cerdán, F. (2008). *Estudios sobre la familia de problemas aritmético- algebraicos*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia, España.

Cook, S. D. N., y Brown, J. S. (1999). Bridging epistemologies: The generative dance between organizational knowledge and organizational knowing. *Organization Science*, 10, 381-400.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En J.P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina y C. Loureiro (Eds.), *Desenvolvimento Profissional dos professores de Matemática. Que Formaçao?* (pp. 47-82). Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciencias da Educaçao.

Muñoz-Catalán, M. C. (2012). El desarrollo profesional de una maestra novel. Un estudio de caso en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las Matemáticas (Tomos I-V). Saarbrücken (Alemania): LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG.

Palarea, M. (1998). *La adquisición de lenguaje algebraico y la detección de los errores comunes cometidos en el álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Universidad de la Laguna, España.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick et al (Eds.), *Educación Matemática: Errores y dificultades de los estudiantes, Resolución de problemas, Evaluación e Historia* (pp. 69-108). Bogotá: Una Empresa Docente.

Socas, M. (2007). Dificultades y Errores en el Aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el Enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M.P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 19-52). Tenerife: SEIEM.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Revista de Didáctica de las Matemáticas NUMEROS*, vol. 77, 5-34.

Thompson, A. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of the research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

DEBILIDADES Y FORTALEZAS EN EL CONOCIMIENTO DE LOS TEMAS MATEMÁTICOS EN GEOMETRÍA DE LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Strengths and weaknesses in Geometry Knowledge of Topics (KoT) of Prospective Primary Teachers

María del Mar Liñán García[a] y Luis Carlos Contreras González[b]

[a]*Universidad de Sevilla, CEU San Pablo Andalucía,* [b]*Universidad de Huelva*

Resumen

Este trabajo resume una extensa investigación realizada para estudiar las fortalezas y debilidades de los Estudiantes para Maestro (EPM) en el ámbito de la geometría escolar. Basándonos en el modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), hemos realizado un estudio descriptivo en una muestra de EPM de las Universidades de Huelva y Sevilla y del CEU San Pablo Andalucía, utilizando un cuestionario de 17 tareas con diferentes aspectos geométricos. Los resultados muestran importantes deficiencias de los EPM en estos conocimientos pero también algunas fortalezas.

Palabras clave: *conocimiento de los temas matemáticos (KoT), conocimiento del profesor de matemáticas, formación inicial de profesores*

Abstract

This paper presents a brief summary of an extensive research about Prospective Primary Teachers (PPT) strengths as well as weaknesses in their knowledge about geometry. We have made a descriptive survey research based on the Mathematics Teachers' Specialized Knowledge model (MTSK) with University of Huelva and Seville and CEU San Pablo Andalucía students, using a multiple choice questionnaire with 17 tasks gathering different Geometry questions. The results show important weaknesses in PPT knowledge of topics in Geometry, but also some strengths in such knowledge.

Keywords: *knowledge of Mathematics topics (KoT), Mathematics teacher's knowledge, prospective teachers' training*

INTRODUCCIÓN

Estudios como los de Gutiérrez y Jaime (1996) o Blanco y Contreras (2012), en relación con el concepto de altura de un triángulo, Baturo y Nason (1996), en el concepto de área de una figura plana, o Dickson, Brown y Gibson (1991) y Liping Ma (1999), en cuanto a las relaciones entre área y perímetro, entre otros, han mostrado que el insuficiente conocimiento sobre Geometría que los EPM evidencian es un obstáculo importante en su proceso de formación.

Contreras, Carrillo, Zakaryan, Muñoz-Catalán y Climent (2012) han señalado algunas de las deficiencias de los EPM en al ámbito de la aritmética al inicio de su formación, apuntando la necesidad de mejorar los procesos de selección de los candidatos a Maestro en cuanto a sus conocimientos matemáticos básicos y asumiendo que una formación sólida en los mismos permitirá una mejor construcción de su conocimiento profesional.

Liñán García, M. M. y Contreras González, L. C. (2013). Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento de los Temas Matemáticos en Geometría de los Estudiantes para Maestro. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 337-344). Bilbao: SEIEM.

MARCO TEÓRICO

Sobre la base del *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) (Ball, Thames y Phelps, 2008), el grupo SIDM [xxiv] de la Universidad de Huelva propone un modelo analítico del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), es decir, todo el conocimiento que posee (o que sería deseable que poseyera) será especializado en tanto que le sea necesario para enseñar matemáticas. El modelo MTSK conserva la separación entre PCK y SMK de Ball ─este último renombrado como MK (Conocimiento Matemático) ─ y consta de seis subdominios, tres referentes al MK: conocimiento de los temas (KoT), incluye aspectos fenomenológicos, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tema abordado; conocimiento de la estructura matemática (KSM), que integra los conceptos en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas; y conocimiento sobre la sintaxis de las matemáticas (KPM), relativo a diferentes formas de (hacer) definir, argumentar, demostrar y pensar en matemáticas; y otros tres referentes al PCK: conocimiento de las características de aprendizaje matemático (KFLM), que incluye saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático y el conocimiento de las características de ese proceso de comprensión, así como de los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto; conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT), que supone conocer distintas estrategias de enseñanza que permitan el desarrollo de las capacidades, conocer recursos que permitan ayudar a los alumnos a construir conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar su intuición respecto de algunos conceptos y conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS), que además del conocimiento del curriculo institucional, supone conocer producciones de las distintas investigaciones en el área de didáctica de las matemáticas respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa .

A pesar de ser un modelo diseñado para analizar la práctica, MTSK será nuestro referente para determinar los componentes deseables en el conocimiento especializado de un profesor de Matemáticas, ubicando así el conocimiento a explorar en los EPM, en nuestro caso, el KoT que muestran en algunos temas geométricos.

METODOLOGÍA

Descripción y finalidad del estudio

Con frecuencia detectamos en los EPM errores conceptuales relativos a las matemáticas de la Educación Primaria que dificultan su formación. Esta investigación, como parte del Proyecto de Innovación Docente de la Universidad de Huelva "*Conocimiento para Enseñar Matemáticas de los Estudiantes para Maestro: Análisis de Dificultades"* (PIE 1101), centrada inicialmente en la identificación de esas debilidades, encontró durante su desarrollo también interesantes fortalezas (Liñán, 2012). Así, la finalidad de la misma ha sido finalmente determinar debilidades y fortalezas en Geometría de los EPM del Grado en Educación Primaria al inicio de su formación; por tanto, la pregunta de investigación a la que buscamos responder es: ¿Qué carencias y fortalezas tienen los EPM en el KoT referido a Geometría al entrar en la universidad?.

Como informantes, han participado casi 740 EPM de las universidades implicadas, de los cuales ninguno había recibido formación en Didáctica de la Matemática relativa a los temas geométricos en el grado de Primaria.

Con una metodología tipo *survey* (Colás, 1998), se trabajaron cuatro dimensiones del conocimiento geométrico[xxv]: Figuras Planas ─elementos, clasificación y resultados notables y área y perímetro─, Cuerpos Geométricos ─elementos y desarrollos planos─, Medida ─procedimientos unidimensionales-recubrimiento, descomposición-bidimensionales y Sistema Métrico Decimal y proporcionalidad geométrica– y Simetría emanados de Alsina Burgués y Fortuny (1992), Hill, Schilling y Ball (2004), Contreras *et al.* (2012), Hernández, Noda, Palarea y Socas, (2003), Moreno, Gil y Frías (2001), Zazkis y Leikin (2008), Gutiérrez y Jaime (1996), Baturo y Nason (1996) o Blanco y Contreras (2012), entre otros, y se organizaron en un cuestionario de respuesta cerrada con cuatro opciones posibles de las que solo una es correcta y, dentro de las otras tres incorrectas, hay una *respuesta esperada* inspirada en resultados de la citada literatura, cuyas preguntas resumimos a continuación.

Dentro de las Figuras Planas, los ítems sobre elementos (8 y 14) buscan su capacidad para identificar los ángulos que aparecen entre dos rectas paralelas cortadas por dos secantes entre sí y para ubicar la altura de un triángulo cualquiera. Las relacionadas con la clasificación y los resultados notables se subdividen en cuadriláteros –1, decidir cuáles de las figuras presentadas son rombos, 10 y 13, concluir qué definiciones corresponden únicamente a un cuadrado– y triángulos –2, considerar en qué tipos de triángulos se verifica el Teorema de Pitágoras. En cuanto a los relacionados con área-perímetro (3 y 11), pretenden calibrar si, dado un octógono dibujado en una cuadrícula, pueden obtener su perímetro y si, teniendo una figura construida a partir de otra dada, pueden decidir la relación entre las áreas y perímetros de ambas.

Sobre los Cuerpos Geométricos, los ítems 12 y 16 (elementos) examinan si los EPM conocen el número mínimo de caras de un poliedro y si identifican el pie de la altura de una pirámide cualquiera; en cuanto a desarrollos planos, el ítem 15 inquiere sobre su capacidad para hallar el radio de la base de un cilindro dadas las dimensiones del rectángulo que se forma en su desarrollo plano.

En cuanto a Medida con procedimientos unidimensionales (17), se indaga sobre su habilidad para decidir la relación entre las áreas de dos descomposiciones de una misma figura, mientras que en los procedimientos multidimensionales y Sistema Métrico Decimal (4 y 6) se busca su conocimiento sobre las relaciones entre distintas unidades y su habilidad para, dadas las dimensiones de una figura descompuesta en dos, obtener su área. Referido a la Proporcionalidad Geométrica (7 y 9), se quiere saber si conocen el modo en que se transmite la proporcionalidad cuando se hacen proporcionales dos o tres dimensiones en lugar de solo una.

Por último, respecto de la simetría, se pretende conocer si pueden ubicar los ejes de simetría de un romboide, si existiesen.

ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LOS RESULTADOS

Se analizaron las frecuencias de las respuestas al cuestionario globalmente (frecuencia de respuesta, línea de tendencia, tendencia del error general, porcentajes de error global *vs* acierto y error-error esperado-acierto, etc.) y de forma individual en cada pregunta (aciertos, errores y errores esperados). En un segundo estadio del análisis, se esbozaron las debilidades y las fortalezas: primero mostramos los resultados y, después, discutimos los mismos, enfocando esta discusión desde los objetivos fijados en el inicio del trabajo y teniendo como meta la respuesta a la pregunta de investigación.

Para ser concisos, hemos optado por unir en este apartado el análisis propiamente dicho con nuestra valoración del mismo.

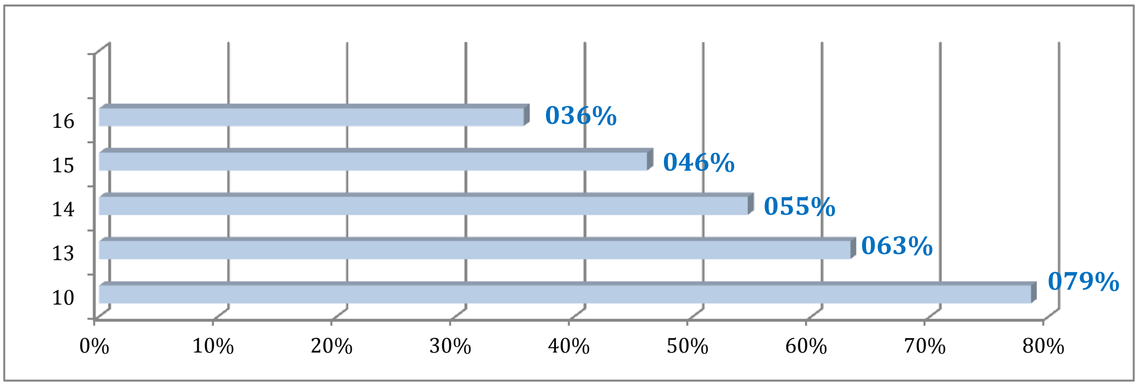


Figura 1. Frecuencia acumulada de respuesta.

En una primera observación de la frecuencia acumulada (Figura 1) vemos que más de un 50% ha contestado 14 ítems o más, porcentaje que aumenta hasta casi el 80% para los EPM que han respondido a 10 o más cuestiones; a nuestro entender, esto indica que respondieron con el interés necesario para que los datos obtenidos puedan considerarse significativos.

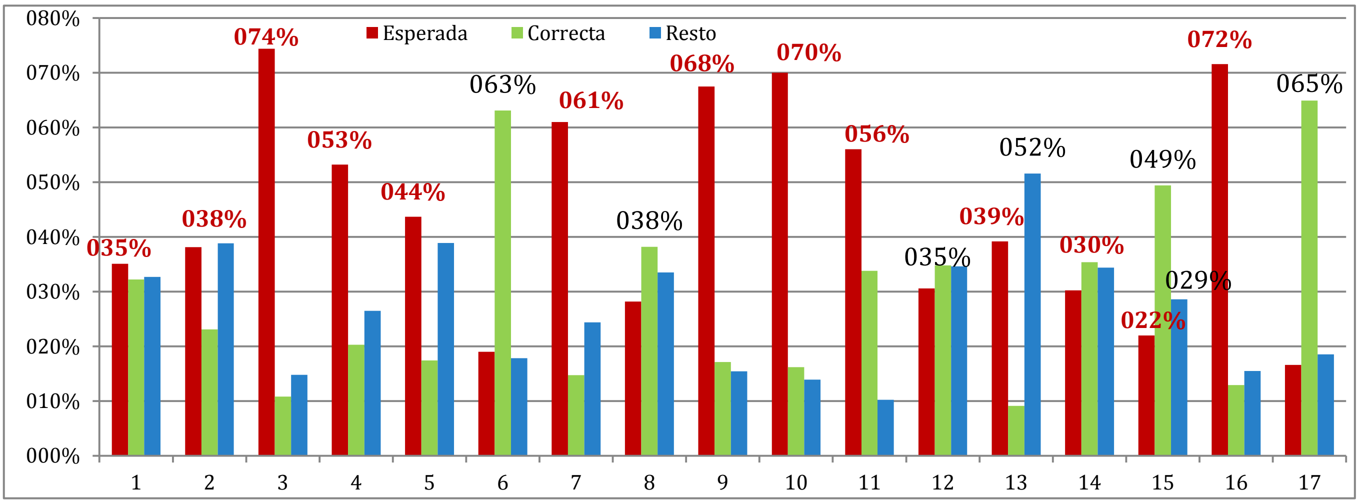


Figura 2. Distribución de respuestas: esperadas, correctas, resto

Al comparar aciertos, respuesta esperada y resto de errores, contrastando el error acumulado (suma de la respuesta esperada más el resto de opciones erróneas) con el acierto (Figura 2), conseguimos por un lado ver hasta qué punto se confirma lo que esperamos encontrar respecto de la Geometría de los EPM y, por otro, las debilidades y fortalezas de los mismos.

Mostramos a continuación los resultados agrupados por temas de las dimensiones descritas.

Figuras planas. Elementos

Los resultados de los ítems que informan sobre este tema (8 y 14) lo señalan como una debilidad en el KoT de los EPM. En cuanto a los triángulos, coincidimos con Climent (2011) sobre la tendencia de los estudiantes a identificar la base del triángulo con la horizontal y la altura con la vertical, debido seguramente a la forma habitual de mostrar un triángulo en los textos escolares con uno de sus lados paralelo a la horizontal, lo que se traduce en *"apoyado en su base"*. En el ítem 8, un error acumulado del 61,7% parece mostrar que los EPM no tienen asumido significativamente el concepto de altura de un triángulo.

En el ítem 14, sobre la cantidad de ángulos de distinta medida que se podían encontrar, el porcentaje de error acumulado superó en un 80% a los aciertos. Alsina *et al.* (1992) aluden a la importancia de la obtención de la suma de los ángulos de un ente geométrico por su interés inductivo y por sus implicaciones en el campo de validez y la iniciación a las demostraciones.

Figuras planas. Clasificación y resultados notables

Es otra de las debilidades en el KoT en geometría de nuestros EPM, tanto en lo referido a cuadriláteros como a triángulos; ya hemos citado que no tienen un conocimiento significativo de las características críticas de las figuras (Climent, 2011), lo que les genera una deficiencia en la idea clara de su clasificación.

En cuanto a cuadriláteros, los resultados del ítem 1 manifiestan la no percepción mayoritaria de las características críticas de las figuras presentadas. Posiblemente el problema reside en las imágenes estándar que los textos suelen mostrar: son escasos los materiales curriculares que tratan la clasificación inclusiva (Vecino, 2003). Por otro lado, a la luz de los resultados de los ítems 10 y 13, también parecen reflejar una carencia en el trabajo a fondo con la ejemplificación, es decir, no deteniéndose solo en esa forma o posición prototípica del cuadrado, sino definiendo cada figura de distintos modos incluso utilizando los nombres de otras figuras más generales añadiéndoles alguna característica que las particulariza. Aparece una nueva debilidad en la confusión apreciada entre el conocimiento sistemático de lo que son las diagonales, los ángulos, bisectrices de los mismos, perpendicularidad, etc. con el aprendizaje significativo de estos entes geométricos con sus relaciones y las consecuencias de exigir el cumplimiento de condiciones simultáneas, en la línea de lo descrito por Zazkis y Leikin (2008).

En lo referente a triángulos, el ítem 2 tiene una tasa de error muy superior a la de acierto; aunque la cota de error alcanzada en este tema está igualmente repartida entre el aprendizaje del Teorema de Pitágoras, la clasificación de triángulos y el concepto de ángulo, consideramos que los EPM demuestran en general tener conciencia de lo que es un ángulo pero no de las relaciones entre los que se aprecian en un ente geométrico dado, aspecto señalado por Blanco y Contreras (2012).

Figuras planas: área-perímetro

En ítem número 3 sorprende el alto porcentaje de EPM que considera la figura presentada como un octógono regular (respuesta esperada: *el perímetro mide 8 cm*).

No reconocer la desigualdad entre los lados hace que los EPM interpreten que "*ciertas regularidades"* observadas convierten la figura en regular, sin tener en cuenta que se indica *expresamente* el hecho de que el octógono está inscrito en una cuadrícula.

El ítem 11, tiene una tasa de error prácticamente doble que la de aciertos. La obtención del área y del perímetro de esta forma debería ser inmediata y, sin embargo, genera dudas relacionadas con la visión estática de la geometría (Climent, 2011). El hecho de que cortando en partes una figura se conserve el área encerrada sin que se conserve el perímetro no parece estar asumido por los EPM. Moreno *et al.* (2001) aseveran que la percepción de área y perímetro no son independientes y el que dos figuras tengan la misma área induce a creer que tienen idéntico perímetro.

Señalamos, por tanto, una nueva debilidad referida a la falta de comprensión del significado y base lógica de los temas área y perímetro. El hecho de no distinguir las características críticas de las irrelevantes es uno de los orígenes principales de la mayoría de los conocimientos erróneamente adquiridos por parte de los EPM, que ya hemos mencionado.

Autores como Dickson *et al.* (1991) mencionan la confusión frecuente en los estudiantes entre área, perímetro y las posibles relaciones entre ellos; el hecho de que no conozcan el fundamento de ambos conceptos les puede llevar a pensar que a mayor área mayor perímetro (Liping Ma, 1999).

Si bien Climent (2011) considera que uno de los objetivos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría ha de ser la observación de regularidades en las formas planas, en este caso esta observación les lleva a una conclusión errónea: no distinguen entre la detección de algunas regularidades, como el hecho de que los ángulos sean iguales y que los lados lo sean de modo alterno, con el concepto de *polígono regular*, uno de los motivos que les podría provocar un cálculo erróneo del perímetro de una figura.

Cuerpos geométricos: elementos

Los resultados obtenidos nos indican que este descriptor forma parte de las debilidades en el KoT en geometría de los EPM estudiados mostrando ausencia de un conocimiento significativo de las características críticas de las figuras y grandes carencias en la generalización de dichas características críticas.

El ítem 16, cuyo error esperado −*cae siempre en el centro de la base de la pirámide*− llega al 71,6%, de nuevo pone de manifiesto su carencia en las representaciones no estándar de cuerpos geométricos y en la identificación de la altura como el segmento contenido en la recta perpendicular al plano que contiene la base desde el vértice de la pirámide. Estas deficiencias relacionadas con las características críticas de formas y cuerpos geométricos han sido señaladas por Blanco y Contreras (2012), entre otros.

Cuerpos geométricos: desarrollos planos

Las frecuencias de acierto del ítem 15 hacen pensar en este punto como una débil fortaleza relacionada con el hecho de mostrar un dibujo sencillo ante una situación relacionada con una figura.

Medida: procedimientos unidimensionales y multidimensionales

Nos encontramos ante un tema que podría parecer una fortaleza dada la alta frecuencia de acierto detectadas (ítems 6 y 17); sin embargo, el gran porcentaje de error en otros ítems relacionados indirectamente, nos da una pista sobre el por qué de esa aparente fortaleza: la interpretación sencilla de un gráfico, apoyándose en un cálculo algebraico que les lleva a la solución. Podríamos decir, entonces, que ha emergido indirectamente una fortaleza racionada con la resolución algebraica de problemas geométricos.

Sin embargo, el alto índice de error en el ítem sobre el cambio de unidades de medida (4) nos hace señalar este tema como una debilidad. A pesar de que los EPM asumen la geometría como esa primera necesidad empírica de medir longitudes, superficies, volúmenes (Vecino, 2003), en buena medida debido a la falta de trabajo con el sistema de numeración decimal como un sistema posicional, tienen también dificultades con el Sistema Métrico Decimal. Estas dificultades se ven sobredimensionadas cuando se plantean cambios de unidades de superficie o de volumen, en los que los EPM deberían ser conscientes de la necesidad de saber lo que significa comparar, por ejemplo, un metro cuadrado con un decámetro cuadrado. Al no trabajar la medida como una comparación con una referencia dada, el paso a una medida multidimensional no es natural y, como consecuencia, no se identifica con el razonamiento subyacente.

Medida: proporcionalidad geométrica

Los EPM estudiados no parecen capaces de identificar cómo afecta a un volumen el aumento proporcional de sus tres dimensiones (ítem 7). El aprendizaje no significativo del cálculo del volumen de un ente geométrico tridimensional podría provocar el error detectado, no siendo capaces de observar el modo en que se transmite la proporcionalidad entre entes geométricos. De nuevo la medida no se está tratando como una comparación con una referencia dada.

Por otro lado, la confusión que muestran al comparar figuras (ítem 9), cuestiona no solo la capacidad de los EPM de reconocer figuras semejantes, sino también la dificultad de la inmensa mayoría al identificar, analizar y aplicar razonamientos proporcionales aplicados en este caso a la vida cotidiana (Contreras *et al.*, 2012).

Simetría

Emerge de nuevo una debilidad: el ítem 5 obtiene una alta concentración de error, lo que parece mostrar que el concepto *simétrico* se confunde con ciertas regularidades o patrones geométricos como es, en el caso del romboide, el hecho de que tenga lados iguales y paralelos dos a dos, y ángulos iguales dos a dos. Climent (2011) aprecia una gran dificultad de los EPM en la comprensión del concepto de simetría, destacando la confusión al identificar mitad de una figura con mitad simétrica, como ocurre en nuestro caso.

CODA

Los resultados corroboran los obtenidos en otros estudios y ponen de relieve las deficiencias en el KoT de los EPM. A la luz de los mismos cabe hacerse varias preguntas. En primer lugar, partiendo del modelo MTSK descrito más arriba, ¿en qué medida estas deficiencias son un obstáculo para el desarrollo de las demás componentes del conocimiento especializado del profesor de matemáticas? En nuestra opinión, los EPM deberían acreditar al comienzo de su formación un KoT que permitiera construir tanto las demás componentes de MK, como del PCK. El sistema universitario tendría que disponer de filtros más eficaces para medir el conocimiento necesario para acceder a los centros de formación de Maestros, o ¿es quizás asumible que debe ser competencia de los centros de formación inicial suplir las lagunas con que los EPM acceden? Cabría preguntarse, por otro lado, si al promover el desarrollo de las demás componentes del MTSK en los centros de formación de Maestros, podría también abordarse las deficiencias descritas anteriormente. Aunque no supone el contexto idóneo, pensamos que sí es posible. Por ejemplo, abordar con los EPM los beneficios de una clasificación inclusiva de los polígonos, analizar la riqueza de la geometría dinámica (frente a modelos estáticos y estandarizados), utilizando, como complemento, las propiedades del material manipulativo como las geotiras, o software como *GeoGebra*, permitirá incidir en elementos del KoT geométrico descritos (características críticas de las figuras, su construcción, elementos notables o simetría) a la vez que se desarrollan otros subdominios del MTSK. No obstante, si queremos apostar por un cambio importante a medio plazo en la formación matemática de nuestros EPM es preciso invertir ya en un modelo de selección y formación.

REFERENCIAS

Alsina, C., Burgués, C., y Fortuny, J.M. (1992). *Invitación a la didáctica de la geometría*. Madrid: Síntesis.

Ball, D.L., Thames, M.H., y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 399-406.

Baturo, A., y Nason, R. (1996). Student teacher’s subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics*, 31 (3), 235-268.

Blanco, L. y Contreras, L.C. (2012). Conceptualizando y ejemplificando el conocimiento matemático para la enseñanza. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 30, 101-123.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. *Paper presented at 8th CERME*. Antalya, Turkey.

Climent, N. (2011). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. Proyecto Docente y de Investigación no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.

Colás, M.P. (1998). Los métodos descriptivos. En M.P. Colás y L. Buendía (Eds.), *Investigación Educativa* (pp. 177-200). Sevilla: Alfar.

Contreras, L.C., Carrillo, J., Zakaryan, D., Muñoz-Catalán, M.C., y Climent, N. (2012). Un Estudio Exploratorio sobre las Competencias Numéricas de los Estudiantes para Maestro. *BOLEMA*, 26 (42b), 433-458.

Dickson, L., Brown, M., y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: MEC & Labor.

Gutiérrez, A., y Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares, y M.V. Sánchez (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*, (pp. 143-170). Granada: Comares.

Hernández, J., Noda, M.A., Palarea, M.M., y Socas, M.M., (2003). *Habilidades básicas en matemáticas de alumnos que inician los estudios de Magisterio* (Preprint). Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Hill, H.C., Schilling, S.G., y Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *Elementary School Journal,* 105, 11-30.

Liñán, M.M. (2012). *Debilidades y Fortalezas en el Conocimiento Matemático Común en Geometría de los Estudiantes Para Maestro*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.

Liping, M. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States*. Mahwah, NJ: Lawence Erlbaum.

Montes, M. (2011). *El conocimiento del profesor en relación con las dificultades para la comprensión del concepto de infinito.* Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva, Huelva.

Moreno, M.F., Gil, F. y Frías, A. (2001). Área y volumen. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria.* (pp. 503-532). Madrid: Síntesis.

Vecino, F. (2003). Didáctica de la Geometría en la Educación Primaria. En M.C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las matemáticas.* (pp. 301-328). Madrid: Pearson Educación.

Zazkis, R. y Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (2), 131-148.

[xxiv] Seminario de Investigación en Didáctica de la Matemática

[xxv] Asumimos que son posibles otros criterios de agrupamiento, derivados de la estructura curricular o de la investigación en educación matemática, pero consideramos que este responde a los aspectos que quisimos estudiar.

¿CÓMO INFLUYEN LAS CREENCIAS SOBRE UNO MISMO EN RELACIÓN A LAS MATEMÁTICAS? UNA APROXIMACIÓN AL PAPEL DE LA IDENTIDAD MATEMÁTICA EN FUTUROS MAESTROS

How do beliefs about ourselves influence us in relation to maths? An approach to the role of the mathematical identity in mathematics teacher training

Paula López[a] y Angel Alsina[b]

[a]Universidad de Girona, [b]Universidad de Girona

Resumen

Se presenta un estudio realizado con 141 estudiantes del Grado de Maestro de Educación Infantil y Primaria para analizar las creencias que tienen sobre uno mismo en relación a las matemáticas y el nivel de confianza que presentan como futuros maestros de matemáticas. Los resultados muestran que: a) más de la mitad de los estudiantes creen que no todas las personas tienen el mismo talento para las matemáticas; los estudiantes de Educación Primaria presentan creencias más positivas sobre uno mismo, en relación a las matemáticas, en comparación con los estudiantes de Infantil; b) un porcentaje significativo de estudiantes se muestra más inseguro para enseñar matemáticas que otras disciplinas. Estos resultados tienen implicaciones para la formación del profesorado de matemáticas.

Palabras clave: *dominio afectivo, sistema de creencias, identidad matemática, actitud hacia las matemáticas, formación de maestros de matemáticas.*

Abstract

Presents a study carried out with 141 preschool and elementary school pre-service teachers to analyse their beliefs about themselves in relation to mathematics and their level of confidence as future mathematics teachers. The results show that: a) more than half of them believe that not everyone has the same talent for mathematics: elementary school pre-service teachers have more positive beliefs about themselves, in relation to mathematics, than preschool pre-service teachers do; and b) a significant percentage of the pre-service teachers are more insecure about teaching mathematics than they are about teaching other subjects. These results have implications for the mathematics teacher training.

Keywords: *affective domain, belief system, mathematical identity, attitude towards mathematics, mathematics teacher training.*

INTRODUCCIÓN

Diversos informes que llevan a cabo evaluaciones periódicas sobre el rendimiento en matemáticas como PISA y TIMSS han mostrado unos resultados poco alentadores en nuestro país. Estas pruebas realizan comparativas según el currículum, políticas educativas, factores sociales y culturales de los estudiantes, situaciones socioeconómicas, estudios de los padres, etc. para tratar de explicar e identificar las causas de los bajos resultados obtenidos. Sin embargo, tal como señala el informe TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) estos estudios no han prestado

López, P. y Alsina, A. (2013). ¿Cómo influyen las creencias sobre uno mismo en relación a las matemáticas? Una aproximación al papel de la identidad matemática en futuros maestros. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 345-353). Bilbao: SEIEM.

suficiente atención a la formación del profesorado como elemento clave para el éxito en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Un porcentaje significativo de estudiantes presenta bloqueo, miedo y rechazo hacia las matemáticas, y piensan que no son capaces de realizar matemáticas como sus compañeros (Caballero, Blanco y Guerrero, 2008; Di Martino y Zan, 2010; entre otros). De acuerdo con Gómez-Chacón (2000) sería un error atribuirlo únicamente a un asunto intelectual, puesto la actitud juega un papel importante. Por esta razón es necesario analizar qué factores determinan que los estudiantes tengan sentimientos negativos hacia las matemáticas, sobre todo si tenemos un cuenta: a) que existe un porcentaje importante de estudiantes universitarios que empiezan el Grado de Maestro sin gustarles las matemáticas, habiendo escogido itinerarios en bachillerato sin matemáticas; b) que los estudios acerca de la visión de las matemáticas de los futuros maestros tienen un papel importante porque revelan cómo van construyendo su perfil docente; y c) que es necesario que los formadores de maestros comprendan los sentimientos negativos para promover procesos de cambio durante la formación inicial (Kaasila, Hannula y Laine, 2012).

Es desde esta perspectiva que se ha desarrollado el presente estudio con un grupo de 141 estudiantes del Grado de Maestro, en el que se analizan las creencias que tienen sobre uno mismo en relación a las matemáticas y el nivel de confianza que presentan como futuros maestros de matemáticas.

DOMINIO AFECTIVO, IDENTIDAD MATEMÁTICA Y SU PAPEL EN LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

El dominio afectivo es un ámbito de investigación de la educación matemática en constante evolución. McLeod (1992) distinguía tres constructos dentro del dominio afectivo (emociones, actitudes y creencias). DeBellis y Goldin (1999) propusieron los valores como un cuarto constructo. En el quinto Congreso de la Sociedad Europea para la Investigación en Educación Matemática (CERME5) Hannula, Op ‘t Eynde, Schlöglmann y Wedege (2007) propusieron el siguiente marco para estructurar la discusión acerca del contenido del dominio afectivo:

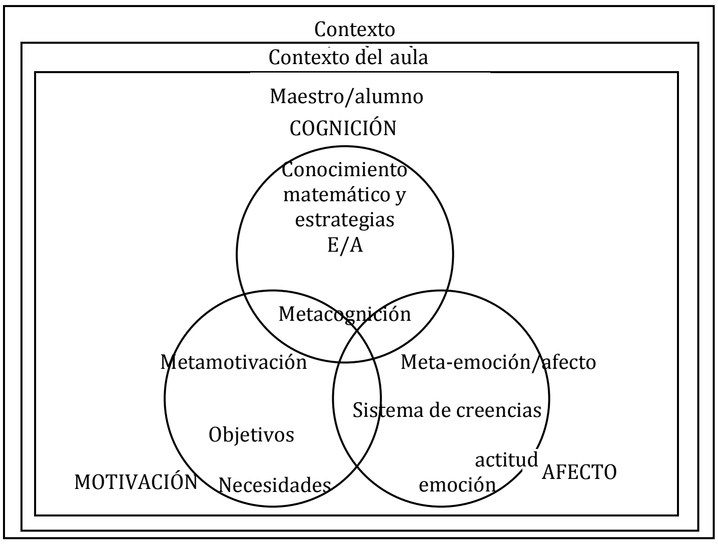


Figura 1. Marco general para constructos afectivos en la investigación en educación matemática

En relación a las creencias, asumimos la acepción de Gómez-Chacón, Op’t Eynde y De Corte (2006) según la cual una creencia nunca se sostiene con independencia de otras, por ello se suele hablar de sistemas de creencias y no de creencias aisladas. En el informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012) se señala que se trata de conocimientos subjetivos, convicciones generadas a nivel personal para explicarse y justificar decisiones y actuaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se considera que son parte del conocimiento, pertenecen al dominio cognitivo y muestran formas simples de pensamiento, integran elementos afectivos, evaluativos y sociales, y presentan una fuerte estabilidad.

McLeod (1992) estableció cuatro ejes en relación a las creencias: a) creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su aprendizaje; b) creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas; c) creencias sobre la enseñanza de las matemáticas; d) y creencias suscitadas por el contexto social. En este estudio nos centramos en el análisis de las creencias sobre uno mismo como aprendiz de matemáticas, ya que originan una determinada identidad. En este trabajo se asume la acepción de identidad de Beauchamp y Thomas (2009), que gira alrededor del discurso acerca de las relaciones que se establecen con las diversas disciplinas y las maneras de elaborarlo y darle forma.

Diversos estudios del ámbito de la educación matemática usan el término "identidad matemática" (*mathematical identity*) para referirse a los discursos que crean los futuros maestros para explicar sus relaciones con las matemáticas y su historia de vida matemática (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2008; Krzywacki y Hannula, 2010; Contreras, Penalva y Torregrosa, 2011; Lutovac y Kaasila, 2011, 2013, Chávez y Llinares, 2012). La identidad matemática, para estos autores, considera la visión de las matemáticas como conocimiento, creencias, concepciones, actitudes y emociones, y es el resultado de un proceso de interacción y de reflexión individual y social de los estudiantes como aprendices y enseñantes de matemáticas. En algunos de estos trabajos (Lutovac y Kaasila, 2013) se distingue el término "identidad matemática" del término "identidad profesional del maestro de matemáticas" (*mathematical identity work*), que se considera un proceso narrativo que incluye una interacción entre el contexto matemático individual y social y un proceso de auto-reflexión en el que la identidad matemática pasada, presente y futura entran en diálogo. Contreras, Penalva y Torregrosa (2011) exponen que las identidades profesionales en formación de estudiantes para maestro emergen cuando reflexionan sobre su propia experiencia formativa en relación con la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En este contexto, nuestras preguntas de investigación son:

- ¿Qué creencias (o sistema de creencias) sobre uno mismo tienen los futuros maestros en relación a las matemáticas?
- ¿Cómo pueden afectar estas creencias en su futura tarea como maestros de matemáticas?

Y los objetivos de nuestro estudio son: a) identificar el sistema de creencias sobre uno mismo, en relación a las matemáticas, que tienen los estudiantes del Grado de Maestro de Educación Infantil y Primaria; b) detectar el nivel de confianza que presentan para ejercer como futuros maestros de matemáticas.

MÉTODO

Participantes

La muestra está formada por 141 estudiantes de primero de los Grados de Educación Infantil (n=72) y Primaria (n=69) de la Universidad de Girona.

La edad media de los estudiantes de Infantil es de 21,2 años, y de los de Primaria de 20,3 años. El porcentaje de hombres en Infantil es del 4,35% y en Primaria del 12,04%. El 56,5% de los estudiantes de Infantil provienen del ciclo formativo de grado superior en Educación Infantil, y el 29,8% de estudiantes de Primaria provienen de ciclos formativos de grado superior. De los estudiantes que provienen de bachillerato, el 14,28% de Infantil y el 16,13% de Primaria provienen de un bachillerato científico-tecnológico. Por lo tanto, de la muestra del estudio, solo el 4,4% en Educación Infantil y el 6,8% en Primaria han cursado matemáticas en los dos últimos años antes de empezar los estudios universitarios.

Diseño y procedimiento

Los instrumentos utilizados en el estudio han sido los siguientes:

- Cuestionario con preguntas cerradas politómicas usando una escala del tipo Likert, de más o menos en descuerdo, con cinco niveles de respuesta (1 = muy en desacuerdo, 2 = algo en desacuerdo, 3 = ni acuerdo ni desacuerdo, 4 = algo de acuerdo, 5 = muy de acuerdo), para identificar las experiencias vividas y las relaciones con las matemáticas de los estudiantes durante su escolarización pre-universitaria.
- Cuestionario de dos preguntas abiertas sobre sus asignaturas preferidas como futuros maestros y sobre el grado de inseguridad frente a su tarea como futuros maestros.

Estos dos cuestionarios se administraron el mismo día del primer semestre del curso académico 2012-2013 a todos los participantes antes de haber cursado ninguna asignatura de Didáctica de las Matemáticas. Primero se les pasó el cuestionario con las dos preguntas abiertas, sin saber que era un estudio enfocado a las matemáticas, y al finalizar se recogió y se les entregó el cuestionario con las preguntas cerradas, más enfocadas a las matemáticas y su aprendizaje.

Para el análisis de los datos se han seguido tres fases: 1) vuelco de todas las respuestas obtenidas de cada individuo de la muestra en una hoja de cálculo; 2) análisis estadístico cuantitativo de estos datos, utilizando el paquete estadístico SPSS; y 3) análisis de las respuestas dadas en las dos preguntas abiertas y estudio de posibles relaciones con datos del primer cuestionario.

RESULTADOS

A continuación se muestran los resultados obtenidos de acuerdo con los objetivos del estudio:

Análisis del sistema de creencias sobre uno mismo, en relación a las matemáticas

En este apartado se exponen los resultados más significativos obtenidos en las preguntas cerradas politómicas (1 indica más en desacuerdo y 5 más de acuerdo).

a) A algunas personas se les dan mejor las matemáticas que a otras.

Tabla 1. Resultados pregunta a)

Grado	1	2	3	4	5	Total
Infantil	3	8	18	18	25	72
Primaria	4	7	17	22	19	69
Total	7	15	35	40	44	141

La mayoría de estudiantes de ambos grados creen que hay personas que se les da mejor las matemáticas que a otras.

b) Me gustan las matemáticas

Tabla 2. Resultados pregunta b)

Grado	1	2	3	4	5	Total
Infantil	19	18	10	11	14	72
Primaria	6	8	15	23	17	69
Total	25	26	25	34	31	141

Nos encontramos con diferencias entre los estudiantes de Infantil y Primaria. En el primer caso, más de la mitad reconocen que no les gustan las matemáticas, en cambio, entre los estudiantes de Primaria el porcentaje de estudiantes que rechaza la afirmación es del 20%. Aun así, es un porcentaje muy elevado de estudiantes que reconocen que no les gustan las matemáticas.

c) Yo no sirvo para las matemáticas

Tabla 3. Resultados pregunta e)

Grado	1	2	3	4	5	Total
Infantil	24	10	17	6	15	72
Primaria	26	24	12	7		69
Total	50	34	29	13	15	141

Casi una tercera parte de los estudiantes de Infantil piensa que no sirve para las matemáticas. En cambio, solo el 10% de los estudiantes de Primaria están de acuerdo en que no sirven para las matemáticas pero ninguno está completamente de acuerdo, siendo más del 70% los estudiantes que no están de acuerdo con esta afirmación.

d) En los exámenes de matemáticas lo pasaba peor que en los otros exámenes

Tabla 4. Resultados pregunta f)

Grado	1	2	3	4	5	Total
Infantil	24	11	8	17	12	72
Primaria	19	19	13	13	5	69
Total	43	30	21	30	17	141

Casi la mitad de los estudiantes encuestados de Infantil lo pasaban peor en los exámenes de matemáticas que en los otros. En el caso de Primaria, los estudiantes que están de acuerdo o muy de acuerdo con esta afirmación son la cuarta parte.

e) Cuando resuelvo problemas normalmente dudo de si está bien o mal.

Tabla 5. Resultados pregunta c)

Grado	1	2	3	4	5	Total
Infantil	2	8	22	21	19	72
Primaria	4	8	24	18	15	69
Total	6	16	46	39	34	141

El 55% de los estudiantes de Infantil (55%) y el 48% de Primaria manifiesta tener dudas cuando resuelven problemas. Sólo 2 estudiantes de Infantil (3%) y 4 de primaria (6%) se sienten seguros cuando resuelven problemas.

Análisis del nivel de confianza para ejercer como futuros maestros de matemáticas

En este apartado se presentan los resultados que se han obtenido en el segundo cuestionario que consistía en dos preguntas abiertas. Primero se muestran los resultados cuantitativos y luego se describen algunas de las respuestas abiertas que han dado los estudiantes para justificar su elección.

A) Si tuvieras que escoger ser maestro de sólo una materia, ¿cual escogerías en primer lugar y cual en último lugar?

Tabla 6. Resultados pregunta abierta A)

	Matemáticas en primer lugar	Matemáticas en último lugar	Total
Infantil	15 (21%)	40 (55%)	72
Primaria	18 (26%)	24 (35%)	69
Total	33 (23%)	64 (45%)	141

Aunque muchos estudiantes no aportan argumentos, entre los que lo hacen manifiestan que les gustaría ser profesores de matemáticas porque: les gusta la materia; se sienten seguros enseñándola; se consideran buenos en matemáticas; piensan que es una asignatura que permite usar una metodología más participativa y dinámica; o bien porque creen que para enseñar matemáticas deben gustar. También en algunos casos han manifestado que les gustaría enseñar matemáticas porque es una asignatura útil.

La escasa aptitud, el poco interés o bien la inseguridad son los argumentos que más aparecen entre los estudiantes que escogen las matemáticas en último lugar. Muchos de ellos manifiestan que no sabrían cómo explicar las matemáticas, no se ven capaces, no las dominan, no las entienden, se les dan mal, no tienen conocimientos suficientes, no les gustan, es una materia muy teórica, etc. (por ejemplo, "no podía con las mates" o "no me gustan demasiado los números"). Las malas experiencias vividas como estudiantes o la metodología son otros factores que condicionan el hecho de escoger las matemáticas en último lugar (por ejemplo, "el profesor me las hizo aburrir y odiar más no poder" o "siempre tenían la misma rutina de clase"). Otros argumentos que se mencionan con menor frecuencia son la dificultad de la asignatura, las creencias, el aburrimiento o la inutilidad de los contenidos, haciendo clara alusión a las matemáticas que les enseñaron durante su trayectoria académica.

B) *Si tuvieras que ir a una escuela, ¿con que materia te sentirías más seguro explicando y con cual menos?*

Tabla 7. Resultados pregunta abierta B)

	Matemáticas (sentimiento de seguridad)	Matemáticas (sentimiento de inseguridad)	Total
Infantil	11 (15%)	29 (40%)	72
Primaria	14 (20%)	13 (19%)	69
Total	25 (18%)	42 (30%)	141

Los argumentos más repetidos por los estudiantes que indican que las matemáticas es la asignatura con la que se sentirían más seguros son la percepción de dominio (condicionado sobre todo por el hecho de que imparten clases particulares de esta asignatura) y el interés por la materia. En algunos casos el sentimiento de seguridad también se asocia al grado de dificultad, en el sentido que se sienten seguros porque opinan que el nivel de los contenidos de matemáticas de Educación Infantil y Primaria es bajo.

La aptitud es uno de los argumentos que aparece con mayor frecuencia entre los estudiantes que mencionan las matemáticas como asignatura con la que se sentirían menos seguros si tuvieran que ir ahora a una escuela (por ejemplo, "no las entiendo y sería incapaz de explicar alguna cosa sobre la materia" o "nunca se me han dado bien y no podría enseñar cómo se debe a mis alumnos"). El escaso interés por la materia o la experiencia como estudiantes son factores que también han influido en las respuestas de algunos estudiantes (por ejemplo, "es una materia muy pesada y con esta idea me costaría mucho transmitir una idea positiva de lo que estoy enseñando" o "nunca me las han enseñado bien de tal manera que me gustaran").

Análisis correlacional

Para poder ver posibles relaciones entre las variables del estudio se ha usado la prueba ANOVA para comparar las medias en la pregunta "me gustan las matemáticas" según el acceso al grado y ver si en algún caso era superior a otros accesos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla 7. Medias obtenidas en la pregunta b) según el acceso a la unviersidad

d) Me gustan las matemáticas					Intervalo de confianza para la media al 95%			
Acceso	N	Media	Desviación típica	Error típico	Límite inferior	Límite superior	Mínimo	Máximo
10 (bachillerato científico)	33	3,73	1,353	,235	3,25	4,21	1	5
11 (bachillerato letras)	44	3,09	1,444	,218	2,65	3,53	1	5
12 (licenciados)	4	3,50	1,291	,645	1,45	5,55	2	5
14 (CFGS)	44	2,66	1,311	,198	2,26	3,06	1	5
15 (otros)	16	3,31	1,448	,362	2,54	4,08	1	5
Total	141	3,14	1,417	,119	2,91	3,38	1	5

Un 67% del alumnado procedente de un bachillerato científico (cursando por tanto el último año la asignatura de matemáticas) ha contestado que está de acuerdo o muy de acuerdo con la afirmación "me gustan las matemáticas" y solo el 18% no está de acuerdo. En cambio, los alumnos procedentes del bachillerato de letras, y sobre todo los estudiantes que proceden de un ciclo formativo de grado superior, han mostrado mayor desacuerdo con esta afirmación (en este último grupo, el 55% está muy en desacuerdo o en desacuerdo con esta afirmación). Entre estos dos grupos de población se ha obtenido un p-valor de 0,009 (<0,05), por lo tanto la diferencia de medias es significativa.

Tabla 8. Tabla de contingencia entre la pregunta cerrada b) y la pregunta abierta B)

		d) Me gustan las matemáticas					
		1	2	3	4	5	Total
B) matemáticas más seguro	no	25	26	23	28	14	116
		21,6%	22,4%	19,8%	24,1%	12,1%	100,0%
	si	0	0	2	6	17	25
		,0%	,0%	8,0%	24,0%	**68,0%**	100,0%
B) matemáticas menos seguro	no	6	12	22	29	31	100
		6,0%	12,0%	22,0%	29,0%	31,0%	100,0%
	si	19	14	3	5	0	41
		46,3%	**34,1%**	7,3%	12,2%	,0%	100,0%

Por último, se pretendía estudiar las posibles relaciones entre la seguridad que presentan los estudiantes como futuros maestros de matemáticas, y la pregunta politómica "me gustan las matemáticas". Al aplicar la prueba de Chi-Cuadrado hemos obtenido un p-valor de 0,000 (<0,05) por lo que podemos afirmar que estas dos variables no son independientes, es decir, existe una fuerte relación entre los estudiantes a los que les gustan las matemáticas y los que se sienten seguros como futuros maestros de matemáticas, así como entre los que no les gustan las matemáticas y los que creen que se sienten poco seguros como futuros maestros de matemáticas.

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Los resultados obtenidos han permitido realizar una aproximación a las creencias (sistema de creencias) sobre uno mismo que tienen los estudiantes del Grado de Maestro en relación a las matemáticas, y el nivel de confianza que presentan para ejercer como futuros maestros de matemáticas antes de haber cursado asignaturas de Didáctica de las Matemáticas.

En relación a las creencias sobre uno mismo, los resultados de nuestro estudio han puesto de manifiesto que la mayoría de los futuros maestros creen que a algunas personas se les dan mejor las matemáticas que a otras. Este dato coincide con los resultados del informe español del TEDS-M 2008 (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2012), en el que se concluye que los futuros maestros creen mayoritariamente que el rendimiento en matemáticas depende de una capacidad natural del alumno. En nuestro estudio, casi una tercera parte de los estudiantes de Infantil piensan que no sirven para las matemáticas, mientras que en Primaria son el 10% los estudiantes que tienen esta visión negativa. Y en relación al interés por la materia, más de la mitad de los estudiantes de Infantil y el 20% de Primaria manifiestan que no les gustan las matemáticas. Estos datos coinciden con los obtenidos por Kaasila, Hannula y Laine (2012), y confirman que existe un porcentaje elevado de futuros maestros que inician sus estudios universitarios sin gustarles ni interesarles las matemáticas.

En relación al miedo hacia las matemáticas, más de la mitad de los participantes de nuestro estudio de Infantil y la cuarta parte de Primaria han indicado que lo pasaban peor en los exámenes de matemáticas que en los de otras materias. Isiksal, Curran, Koc y Askun (2009) relacionan estos aspectos con la ansiedad matemática, y exponen que algunas de las causas son la inseguridad y la menor confianza en sus habilidades matemáticas.

Un dato especialmente interesante es que hemos encontrado diferencias estadísticamente significativas en función de los estudios previos: mientras que el 67% de los estudiantes procedentes de un bachillerato científico manifiesta que está de acuerdo o muy de acuerdo con la afirmación "me gustan las matemáticas", los que proceden de un bachillerato de letras o de un ciclo formativo de grado superior han mostrado mayor desacuerdo con esta afirmación. Este dato confirma que la identidad matemática en general y los sentimientos negativos hacia las matemáticas en particular se van construyendo paulatinamente como resultado de un proceso de interacción y de reflexión individual y social de los estudiantes (Kaasila, Hannula, Laine y Pehkonen, 2008; Lutovac y Kaasila, 2011, 2013).

En relación al nivel de confianza, nuestros resultados indican que el 55% de estudiantes de Infantil y el 35% de Primaria escogerían las matemáticas en último lugar para ejercer de maestros; y en relación al sentimiento de seguridad, el 40% de los estudiantes de Infantil y el 19% en Primaria han expuesto que la asignatura con la que se sentirían más inseguros como maestros serían las matemáticas. Algunos de los argumentos señalados son la escasa aptitud, el poco interés y otros rasgos asociados a una visión de víctima ante las matemáticas como por ejemplo que no sabrían como explicar las matemáticas, no se ven capaces, no las dominan o no las entienden, de acuerdo con Caballero, Blanco y Guerrero (2008) y Di Martino y Zan (2010), entre otros. En nuestro estudio, además, se confirma que existe una relación estadísticamente significativa entre los estudiantes a los que les gustan las matemáticas y los que se sienten seguros como futuros maestros de matemáticas, así como entre los que no les gustan y los que se sienten poco seguros. Estos resultados constituyen una evidencia que las expectativas de logro relacionadas con el placer y gusto por aprender matemáticas ejercen una influencia en la construcción de la identidad profesional de los futuros maestros de matemáticas.

Los resultados obtenidos son de interés para los formadores de futuros maestros ya que ponen de manifiesto diversas creencias que pueden constituir un obstáculo para la construcción de un perfil docente como maestros de matemáticas (Chávez y Llinares, 2012). Por este motivo, diversos autores (Di Martino y Zan, 2010; Lutovac y Kaasila, 2011; Kaasila, Hannula y Laine, 2012) destacan la importancia de que durante su formación inicial, los futuros maestros sean conscientes de su identidad matemática y reflexionen sobre ella como parte del conocimiento didáctico. Por este motivo, serán necesarios nuevos estudios que permitan indagar con mayor profundidad en los factores que dan lugar a una actitud negativa hacia las matemáticas, para poder diseñar estrategias didácticas que faciliten su transformación durante la formación inicial de maestros.

Referencias

Beauchamp, C. y Thomas, L. (2009). Understanding techeer identity: an overview of issues in the literature and implications for teacher education. *Cambridge Journal of Education, 39*(2), 175-189.

Caballero, A., Blanco, L.J. y Guerrero, E. (2008). El dominio afectivo en futuros maestros de matemáticas en la Universidad de Extremadura. *PARADIGMA, XXIX* (2), 157-171.

Chávez, Y. y Llinares, S. (2012). La identidad como producto del aprendizaje en la práctica de enseñar matemáticas en profesores de primaria. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 187 -196). Jaén: SEIEM

Contreras, P., Penalva, M.C. y Torregrosa, G. (2011). Identidad profesional y conocimiento matemático para la enseñanza de maestros en formación. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV*. pp. 329-338. Ciudad Real: SEIEM.

DeBellis, V. A. y Goldin, G. A. (1999). Aspects of affect: Mathematical intimacy, mathematical integrity. En O. Zaslovsky (Ed.), *Proceedings of the 23th of the International Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 249-256). Haifa: PME.

Di Martino, P. y Zan, R. (2010). “Me and maths”: towards a definition of attitude grounded on students’ narratives. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), pp.27-48.

Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea.

Gómez-Chacón, I.M., Op’t Eynde, P. y De Corte, E. (2006). Creencias de los estudiantes de matemáticas. La influencia del contexto de clase. *Enseñanza de las ciencias, 24*(3), 309- 324.

Hannula, M.S., Op’t Eynde, P., Schlöglmann, W. y Wedege, T. (2007). Affect and matehamtical thinking. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *European Research in Mathematics Education V; Proocedings of the Fifht Congress of The European Society for Research in Matehematics Education* (pp. 202-208). Nicosia: University of Cyprus.

Isiksal, M., Curran, J.M., Koc, Y. y Askun, C. S. (2009). Mathematics anxiety and mathematical self-concept: considerations in preparing elementary-school teachers. *Social Behavior and Personality, 37*(5), 631-643.

Kaasila, R., Hannula, M., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socio-emotional orientations and teacher change. *Educational Studies in Mathematics*, *67*, 111-123.

Kaasila, R., Hannula, M.S., y Laine, A. (2012). "My personal relationship towards mathematics has necessarily not changed but…" Analyzing pre-service teachers’ mathematical identity talk. *International Journal of Science and Mathematics Education 10*, 975-995.

Krzywacki, H. y Hannula, M. S. (2010). Tension between present and ideal state of teacher identity in the core of professional development. En M.M.F. Pinto y T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 267-271). Belo Horizonte: PME.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2011). Beginning a pre-service teacher’s mathematical identity work through narrative rehabilitation and bibliotherapy. *Teaching in Higher Education, 16*(2), 225–236.

Lutovac, S. y Kaasila, R. (2013). Pre-service teacher's possible mathematical identities. Recuperado el 15 de abril de 2013, de http://blogs.helsinki.fi/mavi-2012/files/2012/09/LutovacKaasila_MAVI-2012_revised-for-the-web2.doc.

McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics learning and teaching* (pp. 575-596). Nueva York: McMillan.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2012). *TEDS-M. Informe español. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros.* Madrid: Secretaría General Técnica. Subdirección General de Documentación y Publicaciones.

SIGNIFICADOS DE LAS RELACIONES "SER MÚLTIPLO" Y "SER DIVISOR" MOSTRADAS POR MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN

Understandings of relationships "being multiple of" and "being divisor of" shown by training primary teachers

Ángel López[a,b], Encarnación Castro[b] y María C. Cañadas[b]

[a]Universidad de Carabobo, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación en desarrollo sobre divisibilidad, como conocimiento matemático, de maestros de educación primaria en formación. Presentamos algunos resultados sobre dos relaciones consideradas: "ser múltiplo" y "ser divisor". Analizamos las producciones de 104 futuros maestros en una prueba escrita, para delimitar diferentes significados que ponen de manifiesto de estas relaciones. Mostramos ejemplos de los diferentes significados. Los futuros maestros no utilizaron el término "relación" en sus respuestas. Mayoritariamente, se basaron en operaciones aritméticas, con predominio de producto y división.

Palabras clave: *conocimiento matemático, divisibilidad, divisor, futuros maestros, múltiplo.*

Abstract

This work is part of an ongoing study on divisibility, as mathematical knowledge, of training primary teachers. We present some results about two relationships considered: "being multiple of" and "being divisor of". We analyze the production of the 104 prospective teachers in a written questionnaire, to identify different understanding of these relationships. We present examples of the different understandings. Prospective teachers do not use the term "relationship" in their answers. Mostly, they based on arithmetic computations, with predominance of the product and division.

Keywords: *mathematical knowledge, divisibility, divisor, future teachers, multiple.*

López, A., Castro, E. y Cañadas, M.C. (2013). Significados de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La teoría de números es una rama de la matemática que ha despertado interés por su belleza y "sencillez" desde la antigüedad. Una "sencillez" que se reduce al planteamiento de problemas aparentemente muy sencillos pero que su resolución, en algunos casos, puede ser muy compleja, incluso algunos son todavía problemas sin resolver.

En teoría elemental de números se ubican los problemas numéricos que implican relaciones entre números, la divisibilidad es una de estas relaciones (Sinclair, Zazkis y Lidljedahl, 2003).Hay diversas recomendaciones sobre la necesidad de que los futuros maestros trabajen conocimientos relacionados con esta teoría. Por ejemplo, el NCTM (1989) considera que el estudio de la teoría elemental de números proporciona a los maestros de educación primaria una comprensión conceptual profunda de las propiedades y estructuras numéricas. Además, destaca el papel importante de dicha teoría para realizar razonamientos numéricos y resolver problemas no rutinarios (NCTM, 2000). El informe de la *Conference Board of the Mathematical Sciences*(CBMS, 2001) incide en la misma recomendación sobre el interés de la teoría elemental de números en la formación de los maestros porque les permite entender y tratar ideas fundamentales de dicha teoría en las aulas.

El currículo de educación primaria español (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) muestra que los maestros de educación primaria han de trabajar en sus aulas conceptos relacionados con la estructura multiplicativa, algunos de ellos relacionados con la divisibilidad. Los maestros deben profundizar en el conocimiento de los números y sus relaciones (Castro y Molina 2011). La divisibilidad es una relación multiplicativa entre números y, como el producto y la división exacta son operaciones inversas, la relación de divisibilidad responde también a la idea de división exacta.

En nuestra investigación distinguimos la relación de divisibilidad dela operación de división. Por ejemplo, cuando se escribe 6+3, 2x3, 6/3, se hace una clara referencia a una operación. En cada caso, se obtiene un resultado numérico de la expresión. Sin embargo, cuando se escribe seis es mayor que tres, se expresa una relación entre esos dos números. En general, podemos decir que para cualquier par de números "*a*" y "*b*", $a>b$ puede ser verdadera o falsa y no un número. De forma análoga sucede con la división y la divisibilidad: se dice: $a|b$, y se lee "*a* divide a *b*", si existe un número entero "*c*" tal que $b=a\text{x}c$. En la Figura 1 presentamos un mapa conceptual de la estructura conceptual de la divisibilidad y destacamos las relaciones de orden que se identifican entre diferentes elementos involucrados.

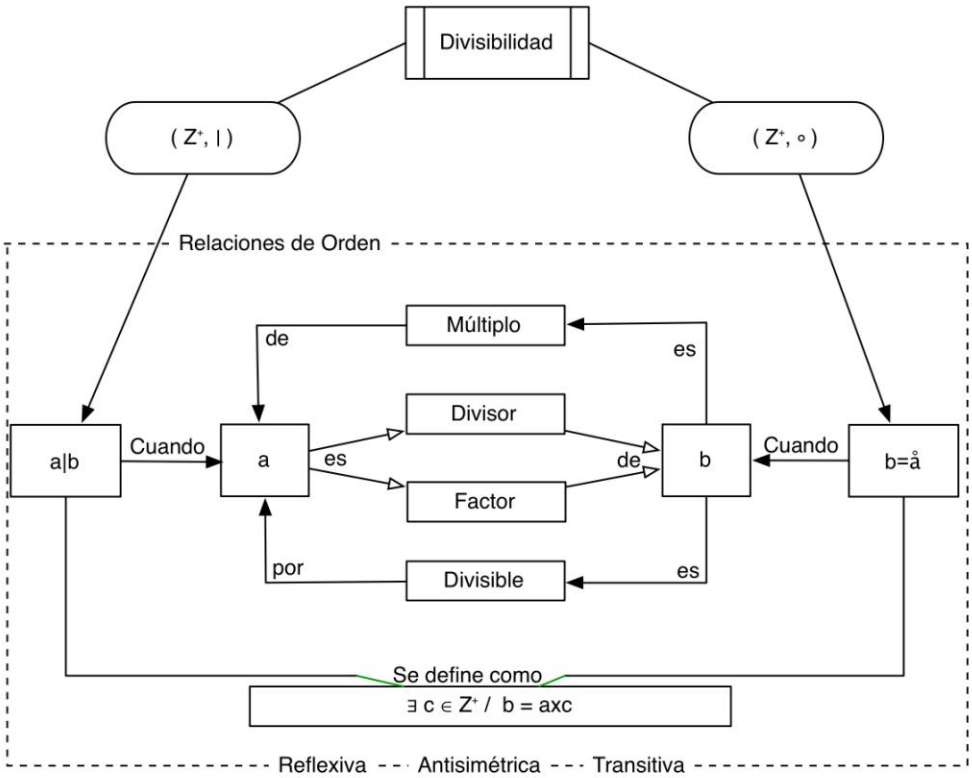


Figura1. Estructura conceptual de divisibilidad

En educación primaria, la divisibilidad se trabaja después de la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Esta situación está reforzada en algunos libros de texto, cuando se asocia la relación ser divisor con la realización de la operación división exacta; y la relación ser múltiplo con la realización de la operación multiplicación; no interpretándola en términos de la relación entre los números.

Algunas dificultades están asociadas al vocabulario propio de la divisibilidad. Se usan expresiones que, en algunos casos, son equivalentes y, en otras, indican la relación opuesta, en virtud de que se tome el producto o la división como operación que sustenta la relación(ver figura 1). Por ejemplo: *divisor de, factor de, divisible por*, *múltiplo de*. A su vez, la expresión *divisor* en la operación de dividir representa uno de los términos de tal operación y en la divisibilidad hace referencia a un número que divide a otro (es divisor de otro). Utilizar el primer significado de divisor por mucho tiempo puede impedir la percepción del segundo significado.

Otras dificultades con la divisibilidad están relacionadas con el teorema fundamental de la aritmética. Por ejemplo, Zazkis y Campbell (1996) constatan que muchos futuros maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema, pueden enunciar y explicar su significado, pero no lo aplican en diferentes situaciones de resolución de problemas.

Investigaciones recientes sobre la teoría elemental de números y maestros en formación insisten en la necesidad de estudios en este campo (Brown, Thomas y Tolias, 2002; Campbell, 2006; Ginat, 2006; Kieran y Guzmán, 2006; Lavy, 2006; Leinkin, 2006; Mason, 2006; Smith 2006). En este trabajo, ampliamos el estudio hecho en (López, Castro y Cañadas,2013). Nos centramos en indagar sobre la comprensión de las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor” que muestran un grupo de maestros de primaria en formación.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1. Determinar los significados que muestra el grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación ser múltiplo.
2. Determinar los significados que muestra el grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación ser divisor.

MÉTODO

En este trabajo nos centramos en las respuestas de los futuros profesores a 8 ítems, referidos a las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor”. Los futuros profesores pertenecían a dos grupos (A y B, con 55 y 49 futuros profesores, respectivamente), tomados intencionalmente, y que cursaban la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada en el curso 2011-2012.Para que pudieran trabajarla en una sesión de clase, utilizamos 4 ítems para el grupo Ay 4 ítems para el grupo B, lo cual nos llevó a repartir los ítems en dos pruebas una para cada grupo y para aplicarla en su horario correspondiente.

Los ítems para el grupo A fueron:

- A1: Indica si la expresión 24 es múltiplo de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
- A2: Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro.
- A3: Indica si la expresión 24 es divisor de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
- A4: Considera el número 3^3x5^2x7 y responde razonadamente a la pregunta. ¿Es 15 un divisor del número dado?

Y para el grupo B:

- B1: Indica si la expresión 6 es múltiplo de 24 es verdadera. Explica tu respuesta.
- B2: Dado el número 3^3x5^2x7, responde razonadamente la pregunta: ¿es múltiplo de 21?
- B3: Indica si la expresión 6 es divisor de 24 es verdadera. Explica tu respuesta.
- B4: Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea divisor de otro.

Estos ítems buscan indagar sobre qué entienden los futuros maestros sobre las relaciones “ser múltiplo” y “ser divisor” en tres situaciones particulares: (a) una afirmación (ítems A1,A3, B1 y B3), (b) una consideración personal de múltiplo y de divisor (ítemsA2 y B4, respectivamente) y (c) una situación que pretende generar una respuesta en función de la interpretación que haga el futuro maestro sobre la tarea (ítemsA4 y B2).

Analizamos las respuestas de los futuros maestros atendiendo a los significados mostrados cuando responden. Para la relación “ser múltiplo” consideramos tres categorías: el múltiplo como producto, el múltiplo como factor y el múltiplo como dividendo en una división exacta. Para la relación “ser divisor” consideramos dos categorías: divisor como elemento que participa en una división (rol de divisor) y divisor como resultado de una división exacta. Hemos excluidos aquellos casos donde no hay respuesta al ítem porque no aportan ninguna información relevante para nuestro estudio.

RESULTADOS

Recogemos los resultados correspondientes a las relaciones ser múltiplo y ser divisor.

Relación ser múltiplo

En la Tabla 1 resumimos los resultados (en porcentajes) de la relación ser múltiplo, de los futuros maestros que respondieron en cada uno de los ítems.

Tabla 5. Significados de la relación ser múltiplo para los grupos A y B

Ítem	MP	MF	MD	O
		Grupo A		
A1	72,9	8,3	6,3	12,5
A2	59,2	20,4	12,2	8,2
		Grupo B		
B1	20,4	61,4	11,4	6,8
B2	18,5	7,4	59,3	14,8

Nota. MP = múltiplo como producto; MF = múltiplo como factor; MD = múltiplo como dividendo; O=otro.

En el ítem A1, independientemente de su consideración en la respuesta sobre la expresión “24 es múltiplo de 6”, los futuros maestros justificaron mayoritariamente con la operación de multiplicación. Destaca el significado de múltiplo como producto. Por ejemplo, Jerónimo[xxvi] (Figura 2) toma la decisión sobre el múltiplo, basándose en la condición de ser resultado de la tabla de multiplicar, es decir, múltiplo como producto.

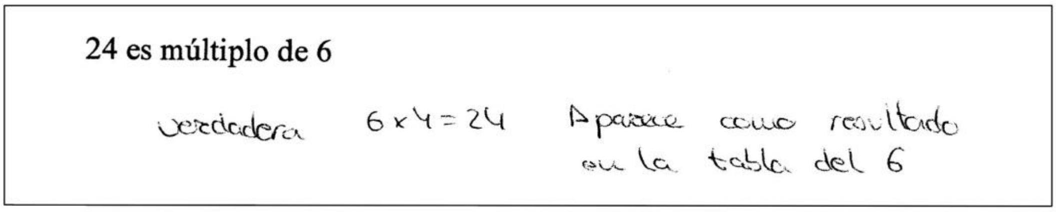


Figura 2. Respuesta de Jerónimo al ítem A1

En el ítem A2, señalamos la marcada tendencia operacional mostrada por los futuros maestros cuando describieron con sus propias palabras lo que significa que un número sea múltiplo de otro. Mayoritariamente usaron la multiplicación. En el uso de esta operación se diferencian dos aspectos, determinados por el papel que juega cada número en la multiplicación: como *factor* y como *producto*.

Múltiplo como sinónimo de factor: la estructura multiplicativa exige una terna de valores (a,c,b) que cumplen la relación axc=b. En este producto, “a” (primera componente) se denomina multiplicando, a “c” (segunda componente) multiplicador (si bien pueden intercambiarse en virtud de la propiedad conmutativa del producto) y “b” (tercera componente) resultado o producto. En el caso de la divisibilidad, a la terna (a,c,b), se le suele denominar a la primera y segunda componente de la misma manera, se puede decir que son los factores en esa estructura multiplicativa. La tercera componente se le llama producto. En ese sentido, aproximadamente una quinta parte de los futuros maestros utilizaron el concepto de factor en la multiplicación para definir múltiplo. En la Figura 3 se observa la respuesta de Cristina, quien se refiere al múltiplo como el número que ocupa el lugar de factor en una multiplicación.

Múltiplo de otro, cuando ese número multiplicado
por otro cualquiera, de cómo resultado el nº
que estamos tratando.
Por ejemplo 5 es múltiplo de 10.
porque 5 multiplicado por (2) dá como
resultado 10.

Figura 3. Respuesta de Cristina al ítem A2

Múltiplo como sinónimo de producto: al resultado de la multiplicación como operación se le suele llamar producto. En este caso, más de la mitad de los futuros maestros definieron múltiplo como resultado de la operación de multiplicación. Raquel (ver Figura 4), asocia múltiplo con resultado de multiplicación, afirmando que "se obtiene multiplicando". Ella trata de hacer esta afirmación en términos generales, para cualquier número entero. Sin embargo, las expresiones "se obtiene multiplicando" y "se obtiene otro" son claros indicios de la operación multiplicación y su asociación con sus elementos intervinientes: factores y producto.

Un numero entero es multiplo de otro cuando se
obtiene multiplicando, osea multiplicando algún
numero entero al segundo se obtiene otro

Figura 4. Respuesta de Raquel al ítem A2

En el ítem B1, destacamos que más de la mitad de los futuros maestros respondieron de forma incorrecta: consideraron que "6 es múltiplo de 24" (múltiplo como factor).Una posible conjetura es que, al poder escribir la estructura multiplicativa como 24=6x4y sus distintas formas de conmutatividad, a los futuros maestros les parece condición suficiente para afirmar y justificar la cuestión. Consideramos que conseguir un resultado en el producto prima sobre el significado propiamente dicho de la relación ser múltiplo. La operación de multiplicación agrupa a la mayoría de las justificaciones dadas, en los dos sentidos descritos anteriormente.

En el ítem B2, La operación que más utilizaron los futuros maestros cuando justificaron su respuesta fue la división. Además, consideraron mayoritariamente el múltiplo como el dividendo en una división exacta.

En el ejemplo mostramos la respuesta dada por Mercedes (Figura 5). Transforma el número dado para dividir y como la operación le da exacta, concluye que si es múltiplo de 21.

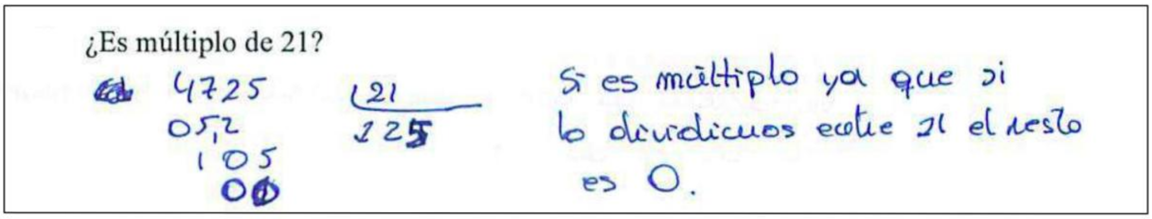


Figura 5. Respuesta de Mercedes al ítem B2

Relación ser divisor

En la Tabla 2 resumimos los resultados (en porcentajes) de la relación ser divisor, de los futuros maestros que respondieron en cada uno de los ítems.

Tabla 6. Significados de la relación ser divisor para los grupos A y B

Ítem	ED	D	O
Grupo A			
A3	10	82,5	7,5
A4	8,6	65,7	25,7
Grupo B			
B3	2,3	84,1	13,6
B4	26,1	63	10,9

Nota. ED = rol divisor; D = divisor como resultado de una división exacta; O = otro.

En el ítem A3, el 92,5% de los futuros maestros utilizaron la operación de división. La mayoría asociaron divisor en el sentido de hacer la división y que esta dé exacta.

Rosa (Figura 6)afirma que 24 es divisor de 6 y utiliza la operación de división entera para justificar su respuesta. Identifica el rol de divisor y el de dividendo en la división. Para ella, el divisor representa el número que divide en una división (rol divisor).

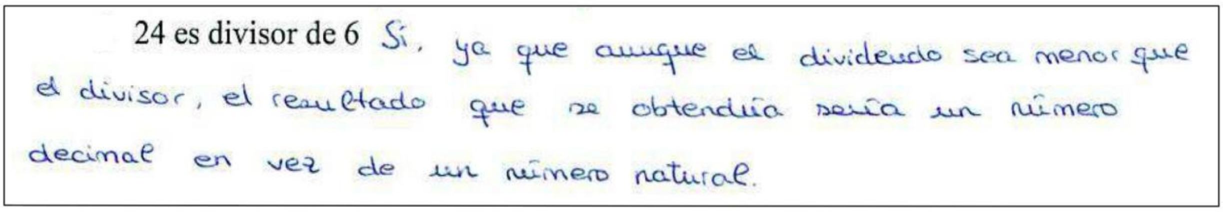
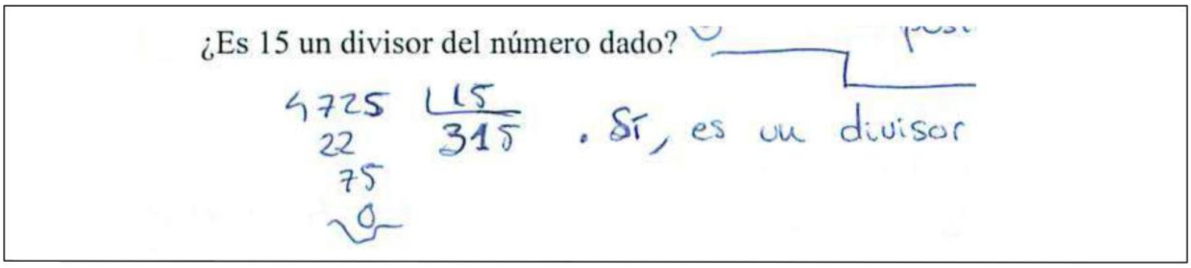


Figura 6. Respuesta de Rosa al ítem A3

En el ítem A4, la mayoría de los estudiantes realizaron la tarea transformando el número dado (escrito por la descomposición canónica del número) en el equivalente escrito en su representación decimal para luego hacer la división.

Jorge (Figura 7) efectúa la división, que es exacta y concluye que 15 es divisor.


¿Es 15 un divisor del número dado?

4725 | 15
22 315 . Sí, es un divisor
75
0

Figura 7. Respuesta de Jorge al ítem A4

En el ítem B3, el 86,4% de los futuros maestros justificaron su respuesta con la operación de división exacta. En el caso de Miguel (Figura 8),asocia el término divisor al cociente de la división exacta.

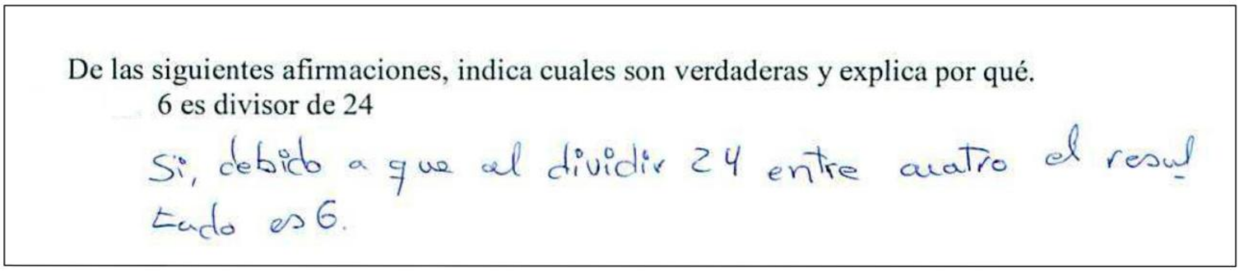

De las siguientes afirmaciones, indica cuales son verdaderas y explica por qué.
6 es divisor de 24
Si, debido a que al dividir 24 entre cuatro el resul-
tado es 6.

Figura 8. Respuesta de Miguel al ítem B3

En el ítem B4, más del 60% de los futuros maestros consideraron *divisor como consecuencia de una división exacta* y el 26,1% de ellos lo hicieron asociando divisor con el rol del número que divide en la división (*rol de divisor*).

Divisor como elemento que participa en una división, rol de divisor: cuando se efectúa una división de dos números enteros, hay cuatro números que guardan una relación y cada uno de esos números, a su vez, ocupan un lugar en la división y tienen asignado un rol específico: dividendo, divisor, cociente y residuo.

En el caso de Ana (Figura 9) distingue al divisor como las veces que vamos a dividir, o las partes en las que vamos a dividir.

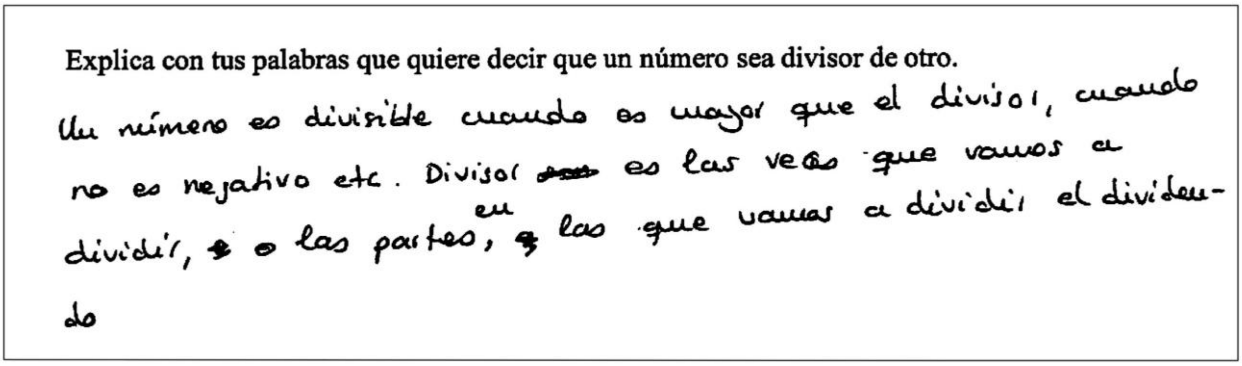
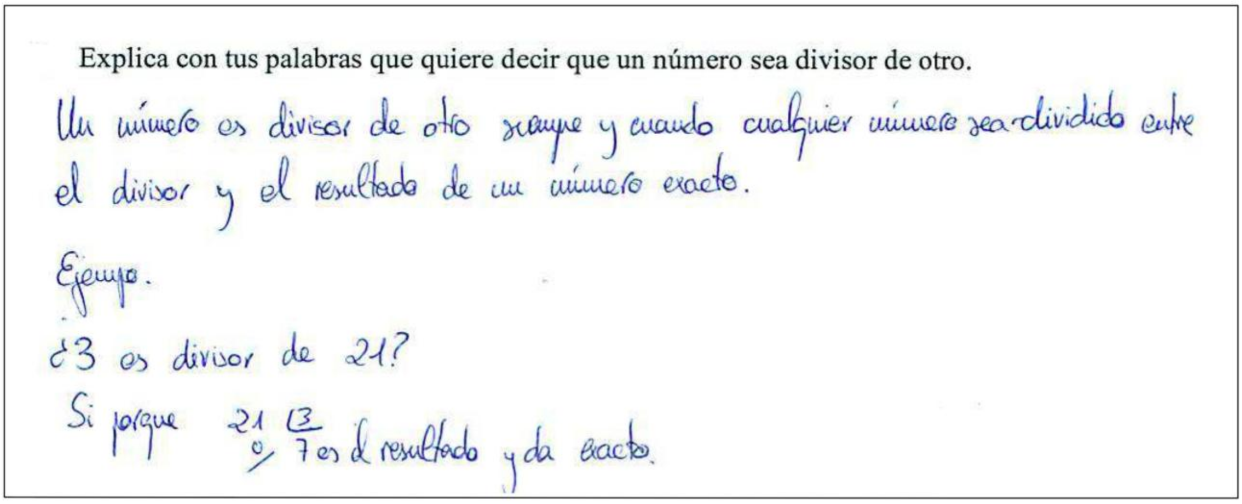

Explica con tus palabras que quiere decir que un número sea divisor de otro.
Un número es divisible cuando es mayor que el divisor, cuando
no es negativo etc. Divisor es las veces que vamos a
dividir, o las partes, en las que vamos a dividir el dividen-
do

Figura 9. Respuesta de Ana al ítem B4

Divisor como consecuencia de una división exacta: este significado fue asignado por más de la mitad de los futuros maestros. Cuando definieron divisor en estos términos, establecieron de alguna manera la relación entre números, sin embargo, esta relación estuvo muy marcada por la operación aritmética en si misma.

En el caso de Pablo (Figura 10), hace referencia explícita a la acción de dividir los números y que dé exacto.


Explica con tus palabras que quiere decir que un número sea divisor de otro.

Un número es divisor de otro siempre y cuando cualquier número sea dividido entre el divisor y el resultado de un número exacto.

Ejemplo.

¿3 es divisor de 21?

Si porque 21 |3 0 7 es el resultado y da exacto.

Figura 10. Respuesta de Pablo al ítem B4

CONCLUSIONES

En cuanto a los resultados, destacamos que ningún estudiante señaló explícitamente que ser múltiplo o ser divisor se refiera a una relación entre números, que exige una cierta condición. La mayor parte de los 104 maestros de primaria en formación que participan en el estudio, asocian “ser múltiplo” con una operación aritmética, mayoritariamente la multiplicación y “ser divisor” con la operación aritmética división.

En el caso de la relación “ser múltiplo”, la mayoría lo asocia con el resultado de la operación de multiplicación y, en otros casos, con el de factor, como un elemento que interviene en la multiplicación. Este resultado coincide con el de Zazkis (2001).Esta situación se pone de manifiesto para justificar que entre los números dados, uno es múltiplo del otro y cuando escriben qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro con sus propias palabras. Cuando realizan la operación de los factores en que está descompuesto un número para comprobar (haciendo la división entre uno de los factores) si la división es o no exacta, lo consideraron desde la operación de división.

Entendemos que la transformación del número como producto de factores primos a la forma de escritura como expresión decimal que hicieron los futuros maestros está basada en la necesidad que sienten de hacer alguna operación aritmética conocida. Esto les llevaa no considerar la representación del número como producto de factores primos, a pesar que esta representación favorecía la respuesta de manera más rápida. No identificaron la relación de “ser múltiplo” en estas expresiones.

En general, sus actuaciones y respuestas se enmarcan en una percepción operacional de la noción “ser múltiplo”. Dentro de esta percepción operacional, el significado que asignan estos futuros maestros a “ser múltiplo”, presenta tres acepciones, dos asociadas a la multiplicación y una a la división.

- Múltiplo como resultado de un producto.
- Múltiplo como factor de un producto.
- Múltiplo como dividendo de una división exacta.

En el caso de la relación “ser divisor”, la mayoría de los futuros maestros manifestó la necesidad de utilizar la operación de división para responder y justificar las cuestiones planteadas. En esta consideración mayoritaria, operacional, sobre la relación ser divisor, mostrada por los futuros maestros, el significado divisor como consecuencia de una división exacta fue el más utilizado. Aunque esta consideración está muy cerca de la definición de divisor como una relación entre números, la forma como fue expresada por los futuros maestros estuvo marcada por la necesidad de realizar la operación de división entre números, es decir, conocer el resultado de la división. Alejándose así de la posibilidad de hacer la consideración en términos generales y no dependientes de los resultados de una división específica de manera explícita.

Otro aspecto a considerar es la transformación del número, escrito en su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética, a un número escrito en su representación decimal para responder y justificar. La mayoría de los futuros maestros cuando transformaron el número para responder sobre divisor fue para tratar de conseguir el resultado de la división y no la relación entre los números. Algunos de ellos utilizaron la escritura del número en su forma canónica para responder, sin embargo, no todos fueron capaces de identificar los factores no explícitos en la descomposición canónica del número.

En general, al igual que en la relación "ser múltiplo", los futuros maestros muestran una percepción operacional de la noción "ser divisor". El significado mostrado a la relación "ser divisor" por los futuros maestros está ligado a la operación de división en dos sentidos:

- Divisor como elemento que participa en una división, rol de divisor.
- Divisor como resultado de una división exacta.

Referencias

Brown, A., Thomas, K., y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S.R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 19-40). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E., y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid: Pirámide.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (CBMS, 2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Ginat, D. (2006). Overlooking number patterns in algorithmic problem. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 223-247). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., y Guzmán, J. (2006). The number-theoretic experience of 12 - to 15- year-olds in a calculator environment: the intertwining coemergence of technique and theory. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 173-200). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 201-221). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 115-140). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación. *Epsilon. Revista de educación matemática, 84*.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 41-68). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria (Vol. BOE Nº 173, pp. 31487-31566). Madrid.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Sinclair, N., Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2003). Number worlds: Visual and experimental access to elementary number theory concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *8*(3), 235-263.

Smith, J. C. (2006). Revisiting algebra in a number theoretical setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 249-283). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 63-92.

Zazkis, R., y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 207-218.

[xxvi] Los nombres utilizados son ficticios

VALIDACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA LA CALIFICACIÓN DE EXÁMENES DE MATEMÁTICAS

Testing an instrument for the marking of mathematical exams

Elena Mengual, Núria Gorgorió y Lluís Albarracín

Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En este trabajo probamos empíricamente el modelo teórico propuesto por Gairín, Muñoz y Oller (2012) para la calificación de la prueba de matemáticas en las PAU. Concretamos el modelo en una guía para la corrección de dos problemas que entregamos a 4 profesores para que calificasen las respuestas a dichos problemas elaboradas por los alumnos. A partir del análisis de las respuestas de los alumnos que generan variabilidad en las calificaciones recogidas sugerimos criterios que permiten una reducción de la variabilidad de las calificaciones, identificando distintos factores a considerar para refinar el modelo.

***Palabras clave**: evaluación, pruebas de acceso a la universidad, calificación, matemáticas.*

Abstract

In the following study we empirically test the theoretical model proposed by Gairín, Muñoz and Oller (2012) for grading the mathematics tests in university entrance exams. We specify this model in a guide to marking two problems, which were handed to 4 teachers to correct the answers submitted by the students. Based on the analysis of the students' answers, which give rise to a wide range in grades, we suggest criteria which may allow to reduce the variability of the final marks, by identifying different factors to refine our model.

***Keywords**: assessment, university entrance examination, marking, mathematics.*

Mengual, E., Gorgorió, N. y Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 367-381). Bilbao: SEIEM.

JUSTIFICACIÓN

El acceso a los estudios universitarios en España depende de la superación de las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU en adelante), comúnmente llamadas selectividad. En este contexto, en ocasiones un estudiante accede a una plaza de estudio deseada por tener unas centésimas más que otro aspirante (Escudero y Bueno, 1994). Dada su relevancia para determinar el futuro de los estudiantes sería deseable que las calificaciones obtenidas fueran consistentes con su nivel de aprendizaje. Sin embargo diferentes estudios han coincidido en la existencia de diferencias entre correctores y en la necesidad de mejorar el sistema de corrección para aumentar la fiabilidad de las pruebas (Escudero y Bueno, 1994; Grau, Cuxart y Martí-Recober, 2002).

La prueba de matemáticas de las PAU constituye una evaluación sumativa, dado que es la comprobación del grado en que el alumno ha alcanzado los conocimientos, destrezas y habilidades matemáticas al final de una etapa educativa. Estamos ante una evaluación nomotética criterial, ya que la valoración del sujeto viene dada por unos criterios de corrección que elaboran los armonizadores de las PAU, externos al entorno educativo del alumno. Además, este alumno es anónimo, lo que conlleva a que el corrector desconozca sus capacidades y sus posibilidades de desarrollo. Los criterios de evaluación deberían permitir valorar al alumnado de forma homogénea y determinar en qué medida ha desarrollado aprendizaje. Sin embargo, en el caso concreto de las pruebas de matemáticas de las PAU, la corrección y calificación no son tareas triviales, en particular, se ha constatado que los correctores no corrigen igual la primera que la última prueba (Casanova, 1998).

Este hecho influye en la variabilidad de las calificaciones que un mismo corrector asigna a respuestas equivalentes de diferentes alumnos a un mismo ejercicio, como han comprobado Gairín, Muñoz y Oller (2012). Además, estos autores, han constatado que distintos correctores califican de forma diferente soluciones equivalentes dadas por los alumnos. Desde esta perspectiva, presentan un modelo para la elaboración de unos criterios de corrección que debería permitir una reducción en la variabilidad de las calificaciones otorgadas por los correctores.

En este artículo presentamos una concreción del modelo teórico propuesto por dichos autores, lo concretamos en una guía para la corrección de unos problemas de las PAU y analizamos hasta qué punto dicha concreción permite una reducción de la variabilidad de las calificaciones.

EL MODELO DE GAIRÍN, MUÑOZ Y OLLER

El estudio de Gairín, Muñoz y Oller (2012) tiene como objetivo reducir el grado de subjetividad propio de la evaluación mediante la elaboración de un marco que permita definir unos criterios de evaluación más precisos y claros para la calificación de los exámenes de matemáticas de las PAU. Inicialmente, identifican diversos fenómenos no deseables en la corrección de esta prueba, como son: distintos correctores penalizan de forma diferente un mismo error; se penalizan los errores con independencia de las exigencias de enunciado del problema; o el corrector considera un error como muy grave y da por finalizada la corrección. A la vista de estos fenómenos, Gairín, Muñoz y Oller (2012) afirman que los correctores podrían evaluar en base a su experiencia y, por tanto, hacen una valoración de lo que el alumno logra en el ejercicio distinta de la que pueda hacer otro corrector.

Estos autores afirman que no se debe penalizar tareas que no se solicitan explícitamente en el ejercicio y que para poder determinar un valor numérico de la penalización de un error se necesita una jerarquización de las tareas que se llevan a cabo en la resolución del problema. Distinguen las tareas necesarias para resolver un ejercicio en principales, auxiliares específicas (en las que aparecen contenidos específicos de los contenidos a evaluar) y auxiliares generales (basadas en los conocimientos trabajados a lo largo de su formación matemática). En particular, determinan que existen dos tipos de preguntas en la prueba de matemáticas de las PAU en función de las tareas que se realizan para resolverlos –preguntas de categoría C1 y de categoría C2. Las de categoría C1 son aquellas cuyo objetivo principal es el dominio de una técnica de cálculo; para resolver este tipo de pregunta se necesita realizar tareas principales y auxiliares generales. En las preguntas de categoría C2, el objetivo principal es el dominio de un concepto matemático; para resolver este tipo de cuestiones se necesita realizar tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales.

Gairín, Muñoz y Oller (2012) proponen el siguiente modelo de penalización de errores al que denominan "modelo de tercios":

TAREAS AUXILIARES GENERALES
Conjunto de errores ≤ 1/3 de la puntuación
Continuar proceso calificación

TAREAS AUXILIARES ESPECÍFICAS
Conjunto de errores ≤ 2/3 de la puntuación
Continuar proceso calificación

TAREAS PRINCIPALES
Conjunto de errores ≤ total puntuación
Puede finalizar el proceso de calificación

Este modelo permite que los errores cometidos en las tareas auxiliares no eclipsen el conocimiento matemático presente en la resolución, ya que el proceso de calificación debe continuar y el corrector debe estimar en qué grado el alumno ha alcanzado el objetivo principal de la pregunta. Ahora bien, si el error está relacionado con el objetivo principal, el corrector puede penalizar el ejercicio hasta con el total de la puntuación otorgada a ese problema. Si la resolución del problema lleva implícitos más de un objetivo principal es necesario asignar puntuaciones independientes a cada objetivo para poder jerarquizar las tareas en cada objetivo y aplicar el modelo.

La aplicación de este modelo debería ayudar a disminuir la variabilidad existente entre dos correcciones de un mismo ejercicio ya que, al poner estos límites el corrector debe dejar a un lado sus propios criterios. Estudios como los de Cuxart, Martí-Recober y Ferrer (1997) y Grau, Cuxart y Martí-Recober (2002), afirman que con unos criterios de corrección más fiables se obtiene una menor variabilidad en la las notas de matemáticas de las PAU. Estos estudios además concretan que los coordinadores deberían comunicar a los correctores qué es lo que quieren valorar en el examen y en cada pregunta en concreto (Cuxart, et al., 1997), algo que recoge el modelo de Gairín, Muñoz y Oller (2012).

OBJETIVOS DEL ESTUDIO

Partiendo del modelo de Gairín, Muñoz y Oller –en adelante modelo GMO–, en este trabajo pretendemos, a partir del la concreción de una guía de corrección basada en el modelo GMO

- Contrastar si la utilización de dicho instrumento por profesores con las características necesarias para ser corrector de la prueba de matemáticas de las PAU reduce la variabilidad de las calificaciones que asignan los correctores, comparada con la variabilidad mostrada en Gairín, Muñoz y Oller (2012).

- Identificar posibles causas que contribuyen a que se produzca variabilidad entre las calificaciones que otorgan distintos profesores a una misma pregunta.

Los resultados de este estudio permitirían refinar los criterios de calificación GMO y establecer el proceso por el cual, dada un ejercicio de matemáticas se establece la guía práctica para su corrección.

METODOLOGÍA

Presentamos un estudio experimental [3] de tipo interpretativo en el que en el que analizamos cuantitativa y cualitativamente las correcciones de 4 profesores que imparten clases en centros de secundaria y bachillerato, con distinto grados de experiencia, a las respuestas de pruebas de matemáticas de las PAU siguiendo el modelo de calificación GMO. Queremos ver de qué forma los profesores aplican el modelo, estudiar la variabilidad en las calificaciones obtenidas y comprobar las limitaciones de la concreción utilizada del modelo.

Disponemos de 76 exámenes de matemáticas de las PAU de Zaragoza de Septiembre del 2010. De las dos opciones, A y B, que se presentan al alumno para elegir tomamos las pruebas correspondientes a la opción A, dado que 67 la prefieren a la opción B que fue escogida sólo por 9. Cada opción contiene 4 preguntas y para nuestro estudio elegimos A3 y A4, ambas con varios apartados, que contienen preguntas tanto de categoría C1 como de categoría C2. Es decir, cada profesor corrige medio examen (5 puntos) y consideramos como datos sus correcciones y utilizamos las calificaciones de cada uno de los diferentes apartados.

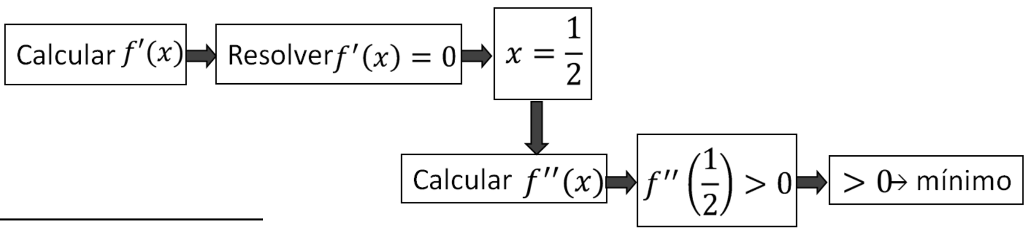
Instrumento para la recogida de datos

Una vez seleccionadas las preguntas a corregir se elabora la guía que concreta los criterios de corrección propuestos en el modelo GMO. A continuación, de los dos apartados que tiene la pregunta A3, mostramos el proceso de desarrollo de la guía para el apartado a).Este apartado es de categoría C2, lo cual implica que para su resolución se necesita el dominio de un concepto matemático y el desarrollo de tareas principales, auxiliares específicas y auxiliares generales. El resto de criterios para los demás ejercicios se desarrollan de forma análoga.

A3. Sea la función $f(x) = xlnx + (1-x)\ln(1-x) \;\; x\epsilon(0,1)$

a) Calcular sus extremos relativos. (1,5 puntos)

El objetivo principal de A3 a) es evidenciar el dominio de un concepto matemático, en este caso de punto relativo y su clasificación, es decir, determinar si es máximo o mínimo. Antes de definir las tareas que requiere dar respuesta a esta pregunta, identificamos los pasos que el alumno podría seguir hasta la solución, que quedan recogidos en el siguiente diagrama:



[3] Este estudio se corresponde con la fase inicial de la investigación que la primera autora está realizando en el marco del Máster de Investigación en Didáctica de las Matemáticas y las Ciencias de la Universitat Autònoma de Barcelona.

A partir de estos pasos, proponemos unos criterios de evaluación para este ejercicio que, una vez revisados por expertos, son los que se muestran a continuación:

TAREAS PRINCIPALES:
- Concepto:
  + Extremo relativo
  + Clasificación del extremo relativo
- Procedimentales: Procedimiento para el cálculo de extremos relativos.

TAREAS AUXILIARES:
- Específicas:
  + Cálculo de derivadas: f'(x) y f''(x)
  + Sustituir un punto en una función f''(x)
- Generales:
  + De tipo algebraico: al simplificar las derivadas, al resolver ecuaciones y/o inecuaciones.
  + De tipo aritmético: al sustituir el punto en la función.

PENALIZACIÓN (el apartado A3 a) vale 1,5 puntos):
- Como mucho 0.5 puntos de penalización por el CONJUNTO de los errores en tareas auxiliares generales.
- Como mucho 1 punto por el CONJUNTO de errores en tareas auxiliares generales y específicas.
- Se puede penalizar con la totalidad por errores en tareas principales.

Criterios de corrección para A3 a)

El resto de criterios correspondientes al resto de preguntas se desarrollaron de forma análoga y son los que se proporciona a los profesores participantes para que realice las correcciones.

ANÁLISIS DE DATOS

Análisis global de los datos

Una vez elaborados estos criterios de corrección para los ejercicios A3 y A4, los 4 profesores corrigieron en base a ellos las respuestas de los 67 alumnos. En la siguiente tabla se muestran la nota media que otorga cada uno de los correctores, considerando únicamente los dos ejercicios que estamos teniendo en cuenta.

Tabla 1. Nota media por prueba (M)

	M en media prueba
Corrector 1	1,8641791
Corrector 2	2,1380597
Corrector 3	1,95835821

Corrector 4	2,017164179

Vemos que cuando tenemos en cuenta sólo A3 y A4, la máxima diferencia entre los cuatro correctores es de 0,27 puntos aproximadamente. Gairín, Muñoz y Oller (2012) constataron un diferencia máxima entre dos correctores de aproximadamente dos puntos, en nuestro estudio, en medio examen la máxima diferencia entre los cuatro es 0,27. A pesar de lo incipiente de nuestro estudio, comparando nuestros resultados con los de estos autores, podemos pensar que la concreción y entrega de la guía para la corrección puede reducir considerablemente la variabilidad, ya que 0,27 sobre 5 es menor que 2 sobre 10. De manera análoga, para cada uno de los ejercicios, A3 y A4, a partir de las correcciones que los 4 profesores asignan a cada estudiante se calculan la media y la desviación típica de las puntuaciones de los alumnos en cada apartado de las preguntas. Viendo las diferencias entre los correctores decidimos considerar como lindar de lo aceptable una desviación típica del 15% de la puntuación total de cada apartado de A3 y A4. Hemos elegido el 15% en cada apartado porque de esta forma la desviación máxima entre correctores que consideramos adecuada para la nota final del examen no debería exceder de 1,5 puntos que es menor que los 2 puntos de variación recogidos por Gairín, Muñoz y Oller (2012). Si consideramos las posibles compensaciones entre las calificaciones de los diversos apartados, la desviación total debería ser considerablemente menor. Al respecto de lindar, no existe un valor consensuado para este margen, con lo que en esta primera aproximación escogemos el 15% para cada apartado porque esperamos que en todo el examen sea menor. Las tablas recogen estos resultados.

Tabla 2. Desviación típica (*DT*)

A3	Coinciden las notas al 100%	*DT* de las notas de < 15% puntuación ejercicio y ≠ 0	*DT* de las notas de > 15% puntuación ejercicio y ≠ 0	Desviación máxima
a)	40’37%	53’22%	2’41%	0,3129
b)	40’99%	54’09%	4’92%	0,3142

Tabla 3. Desviación típica (*DT*)

A4	Coinciden las notas al 100%	*DT* de las notas de < 15% puntuación ejercicio y ≠ 0	*DT* de las notas de > 15% puntuación ejercicio y ≠ 0	Desviación máxima
a)	73’33%	18’33%	8’33%	0,3714
b)	70’21%	23’41%	6’38%	0,3247
c)	74’58%	5’08%	20’34%	0,3247

Observamos que, los casos en que la desviación típica es superior a la que hemos definido como aceptable –el 15% de la puntuación total del ejercicio– varían entre un 2,41% en el caso de A3.a) y un 20,34% en el caso de A4.c). Para comprender las diferencias en las correcciones que generan dichos márgenes de variabilidad, hemos analizado las correcciones de los ejercicios. El análisis de dichas correcciones tiene como propósito estudiar si es posible detallar más los criterios de corrección para que disminuya la variabilidad.

Análisis detallado de las respuestas que generan variabilidad

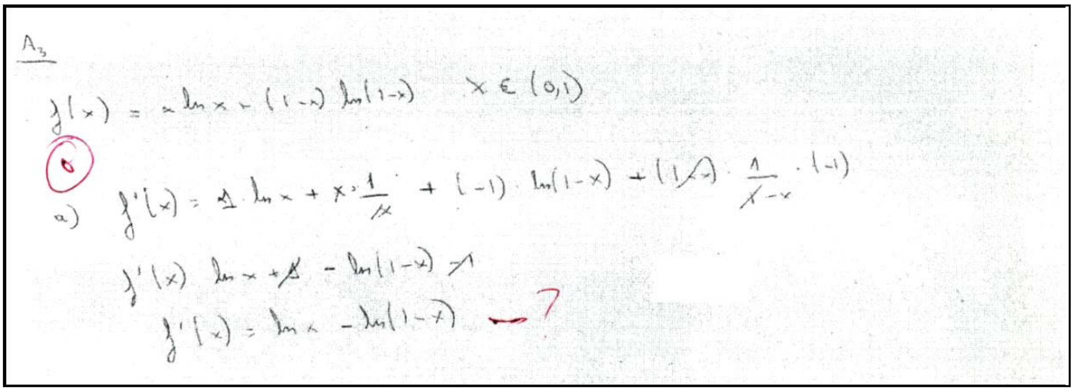
A continuación, mostramos qué sucede en los distintos apartados de las preguntas A3 y A4 y algunas dificultades que los correctores han puesto de manifiesto al calificar estas preguntas.

Apartado A3 a)

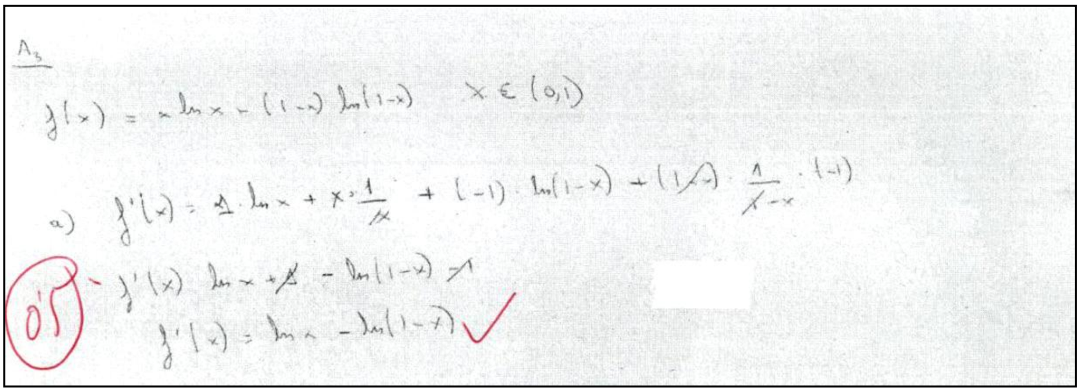
Su objetivo es ver si el alumno domina el concepto de extremo relativo (categoría C2). Las diferencias en la calificación de estos ejercicios se deben principalmente a que los alumnos no consiguen terminar el ejercicio, lo que implica que cada corrector debe tomar decisiones que no aparecen explícitas en los criterios de evaluación. El modelo GMO indica la máxima penalización posible en cada tarea en el caso de acabar el ejercicio. Sin embargo, no establece cómo puntuar una pregunta no terminada. El modelo GMO tampoco establece cómo se debe calificar al alumno que resuelve bien el problema pero que se equivoque al redactar las conclusiones.

Vemos, por ejemplo, que los correctores han calificado de forma distinta que el alumno sea capaz de calcular f'(x) y/o f''(x) cuando el alumno no ha completado la resolución del ejercicio:

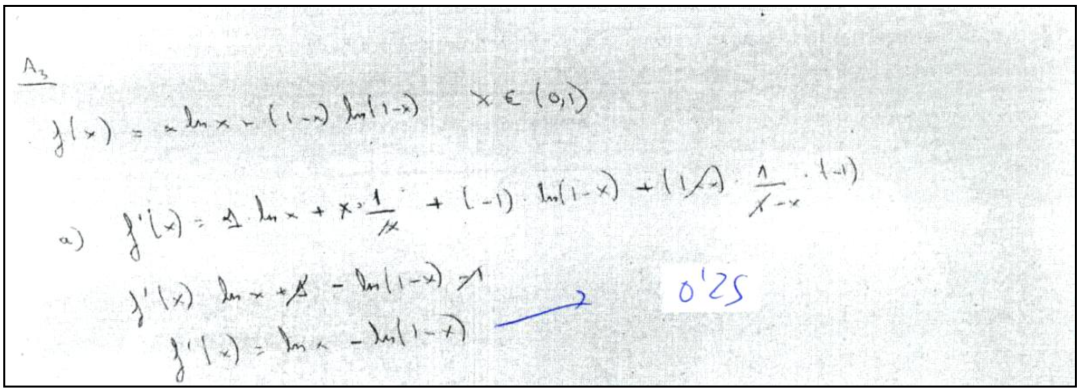
CORRECTOR 1



CORRECTOR 2



CORRECTOR 3



A_3

$f(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x) \quad x \in (0,1)$

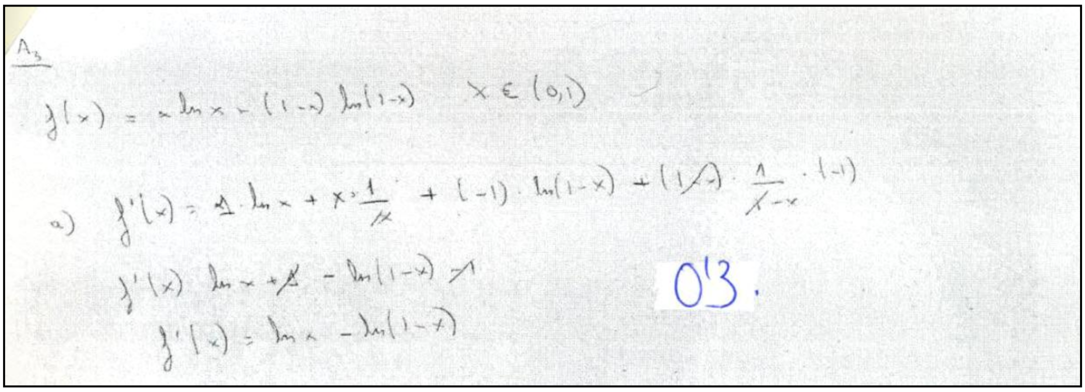
a) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + (-1) \cdot \ln(1-x) + (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$

$f'(x) \ \ln x + \cancel{1} - \ln(1-x) \cancel{-1}$

$f'(x) = \ln x - \ln(1-x)$

0'25

CORRECTOR 4



A_3

$f(x) = x \ln x + (1-x)\ln(1-x) \quad x \in (0,1)$

a) $f'(x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} + (-1) \cdot \ln(1-x) + (1-x) \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$

$f'(x) \ \ln x + \cancel{1} - \ln(1-x) \cancel{-1}$

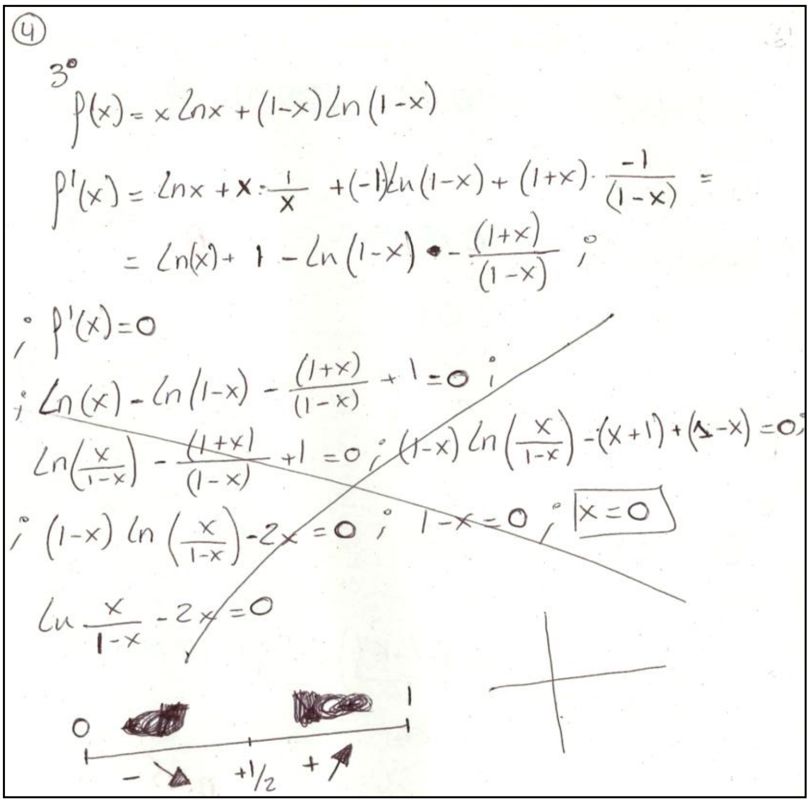
$f'(x) = \ln x - \ln(1-x)$

0'3.

Apartado A3 b)

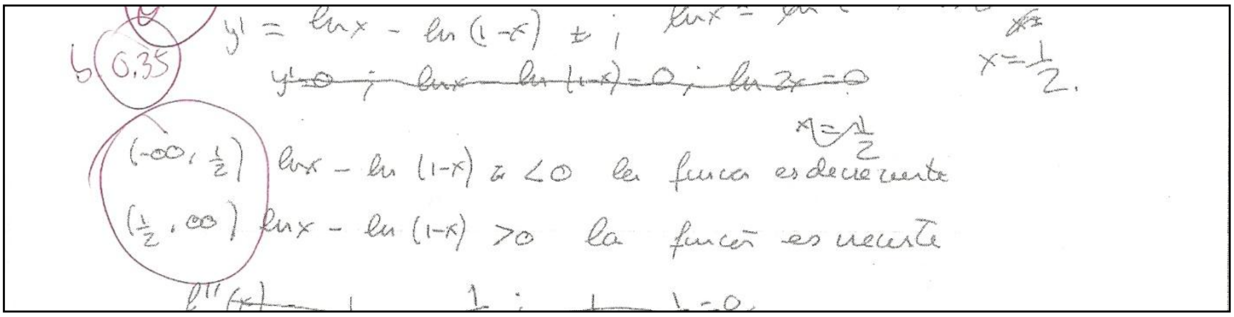
En este ejercicio los alumnos deben ser capaces de dar respuesta a dos tareas, calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento y calcular los puntos de inflexión (categoría C2). Algunas de las diferencias entre los correctores son consecuencia de que los alumnos no muestran el resultado de sustituir el punto en f'(x), hecho que genera dudas a los correctores acerca del cómo obtienen esa conclusión.

Otras veces, el alumno se limita a poner un dibujo pero sin justificar donde se ha apoyado para hacerlo:

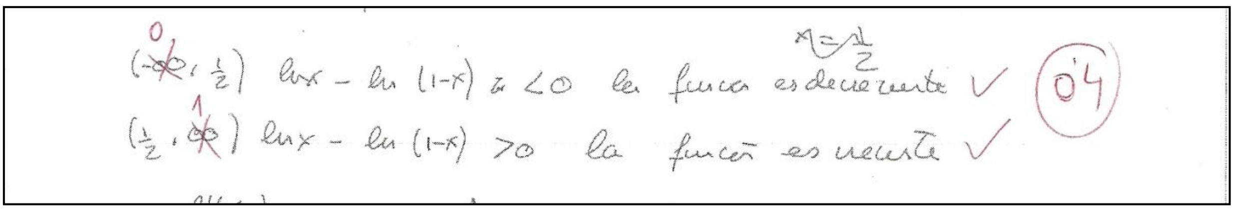


Los correctores también han calificado de forma distinta que los alumnos escriban los intervalos fuera del dominio en el que está definida la función. f(x) está definida en el intervalo (0,1) y algunos alumnos escriben los intervalos (-∞,½) y (½,∞) en vez de (0,½) y (½,1).

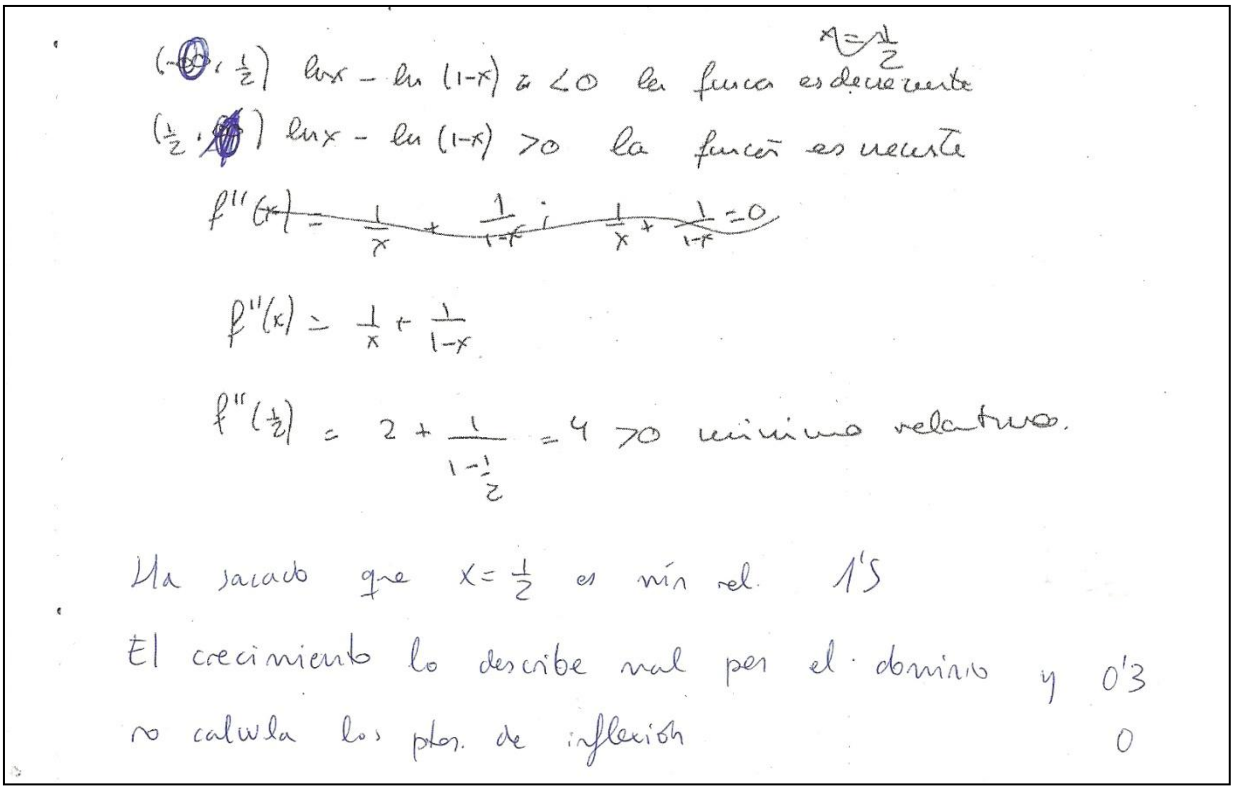
CORRECTOR 1



CORRECTOR 2



CORRECTOR 3


$x = \frac{1}{2}$

$(-\infty, \frac{1}{2})$ $\ln x - \ln(1-x) < 0$ la funcion es decreciente

$(\frac{1}{2}, \infty)$ $\ln x - \ln(1-x) > 0$ la funcion es creciente

$\cancel{f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x};\ \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = 0}$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$

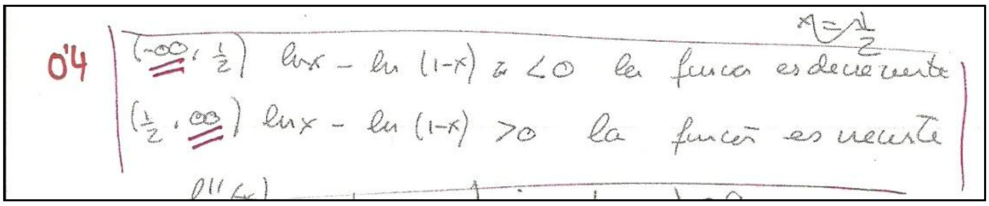
$f''(\frac{1}{2}) = 2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 4 > 0$ mínimo relativo.

Ha sacado que $x = \frac{1}{2}$ es mín rel. 1'5

El crecimiento lo describe mal per el dominio y 0'3

no calcula los ptos. de inflexión 0

CORRECTOR 4


0'4

$x = \frac{1}{2}$

$(-\infty, \frac{1}{2})$ $\ln x - \ln(1-x) < 0$ la funcion es decreciente

$(\frac{1}{2}, \infty)$ $\ln x - \ln(1-x) > 0$ la funcion es creciente

Apartado A4 a)

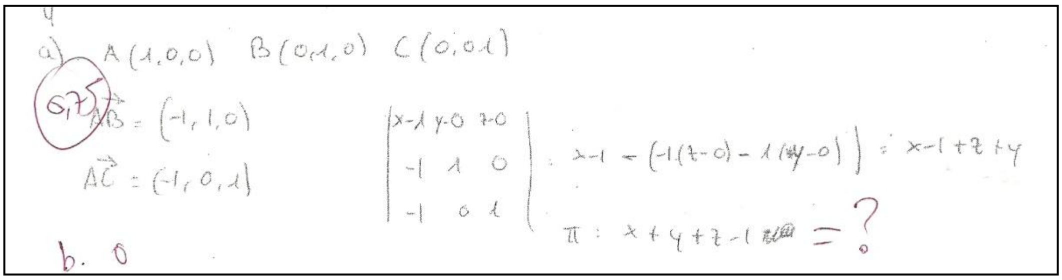
En este apartado se pide al alumno que defina cuál es el plano determinado por tres puntos(categoría C2). Los correctores tienen en cuenta cuando el alumno sabe que esto se consigue con un punto y dos vectores linealmente independientes determinados por estos tres puntos. La solución a este ejercicio es:

$$\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$$

La mayor discrepancia en la puntuación se origina cuando el alumno resuelve bien el ejercicio pero no escribe la igualdad a cero. Nuestros datos muestran que no sólo los correctores dan un peso distinto sino que, además, dos de los correctores califica de distinta manera en distintos ejercicios este mismo error:

EXAMEN 1

CORRECTOR 1


4

a) A(1,0,0) B(0,1,0) C(0,0,1)

0,75

$\vec{AB} = (-1,1,0)$

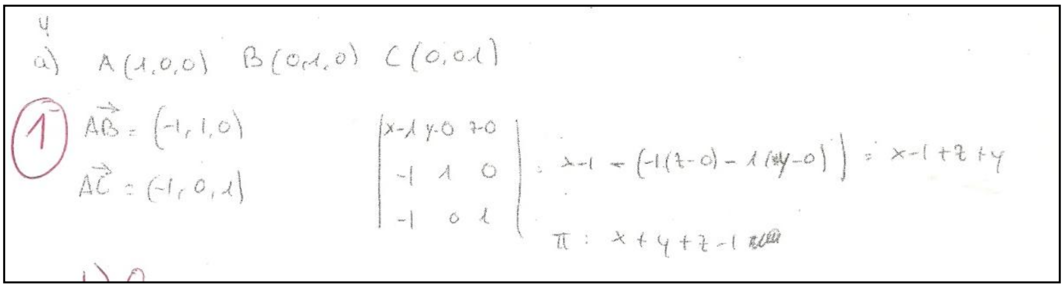
$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1 - (-1(z-0) - 1(y-0)) = x-1+z+y$

$\pi: x+y+z-1 = ?$

b. 0

CORRECTOR 2


4

a) A(1,0,0) B(0,1,0) C(0,0,1)

1

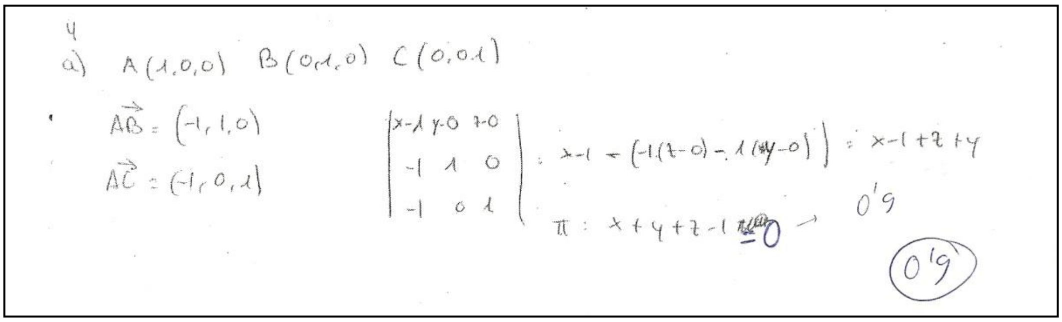
$\vec{AB} = (-1,1,0)$

$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1 - (-1(z-0) - 1(y-0)) = x-1+z+y$

$\pi: x+y+z-1$

CORRECTOR 3


4

a) A(1,0,0) B(0,1,0) C(0,0,1)

$\vec{AB} = (-1,1,0)$

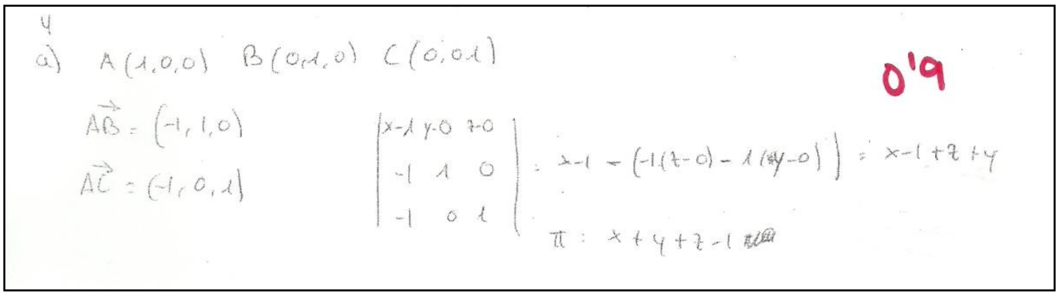
$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1 - (-1(z-0) - 1(y-0)) = x-1+z+y$

$\pi: x+y+z-1 = 0 \rightarrow$ 0'9

0'9

CORRECTOR 4


4

a) A(1,0,0) B(0,1,0) C(0,0,1)

0'9

$\vec{AB} = (-1,1,0)$

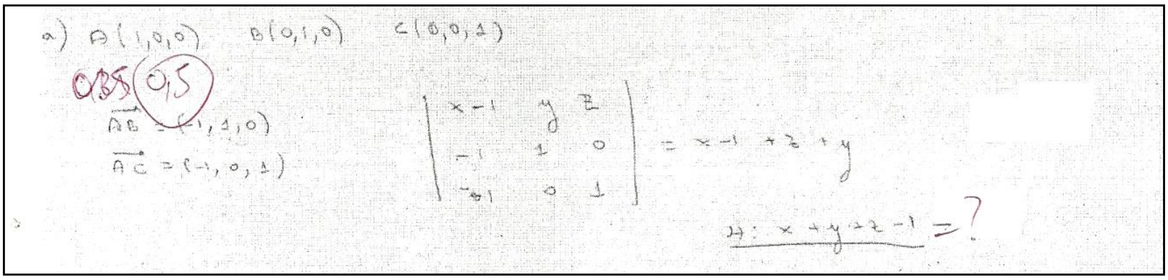
$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1 - (-1(z-0) - 1(y-0)) = x-1+z+y$

$\pi: x+y+z-1$

EXAMEN 2

CORRECTOR 1


a) $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

0,35 (0,5)

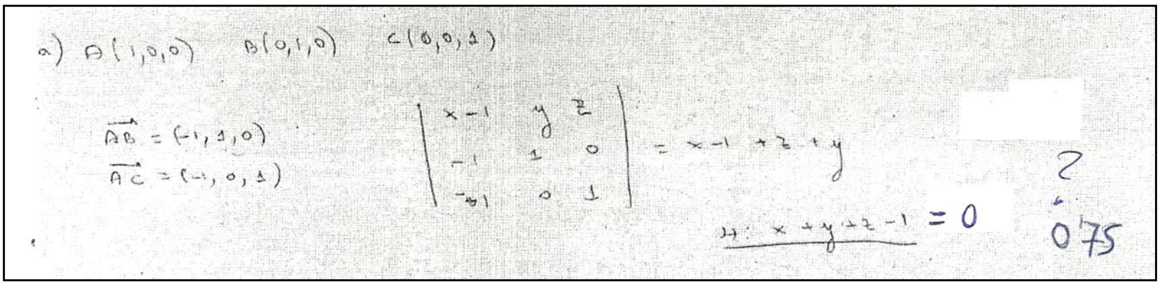
$\vec{AB} = (-1,1,0)$

$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1+z+y$$

$\pi: x+y+z-1 = ?$

CORRECTOR 3


a) $A(1,0,0)$ $B(0,1,0)$ $C(0,0,1)$

$\vec{AB} = (-1,1,0)$

$\vec{AC} = (-1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x-1+z+y$$

$\pi: x+y+z-1 = 0$

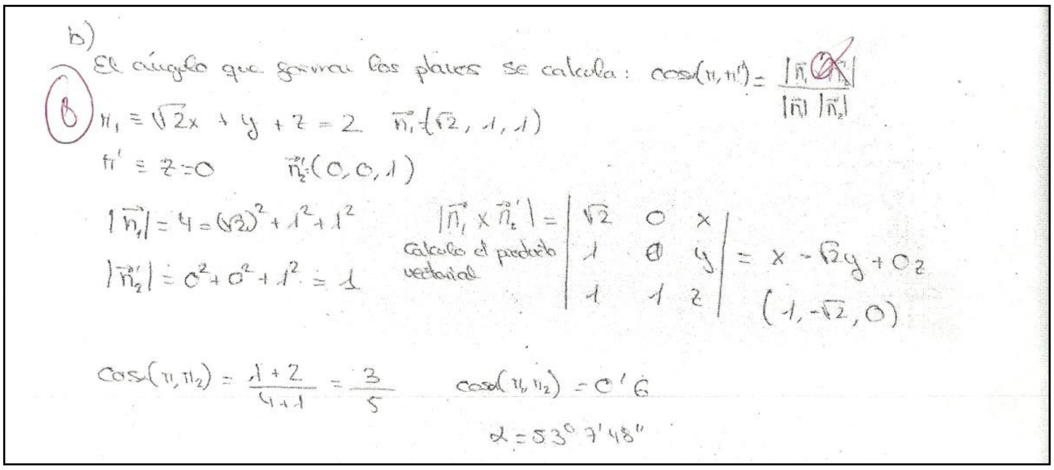
2

0'75

Apartado A4 b)

El objetivo principal de esta pregunta es verificar si el alumno domina la técnica para el cálculo del ángulo que determinan dos planos. Las diferencias entre las calificaciones se deben a que unos correctores tienen en cuenta cuando el alumno sabe que para calcular este ángulo necesita los vectores normales a dichos planos y los calculen bien. En esta ocasión, el alumno no es capaz de resolver el problema con éxito pero al menos sabe que para resolver esta pregunta necesita conocer cuáles son los vectores normales, dato que aparece en las tareas auxiliares.

CORRECTOR 1


b) El ángulo que forman los planos se calcula: $\cos(\pi,\pi') = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}$

0

$\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ $\vec{n}_1 = (\sqrt{2}, 1, 1)$

$\pi' \equiv z = 0$ $\vec{n}_2'(0,0,1)$

$|\vec{n}_1| = 4 = (\sqrt{2})^2+1^2+1^2$

$|\vec{n}_2'| = 0^2+0^2+1^2 = 1$

$$|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2'| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = x - \sqrt{2}y + 0z$$

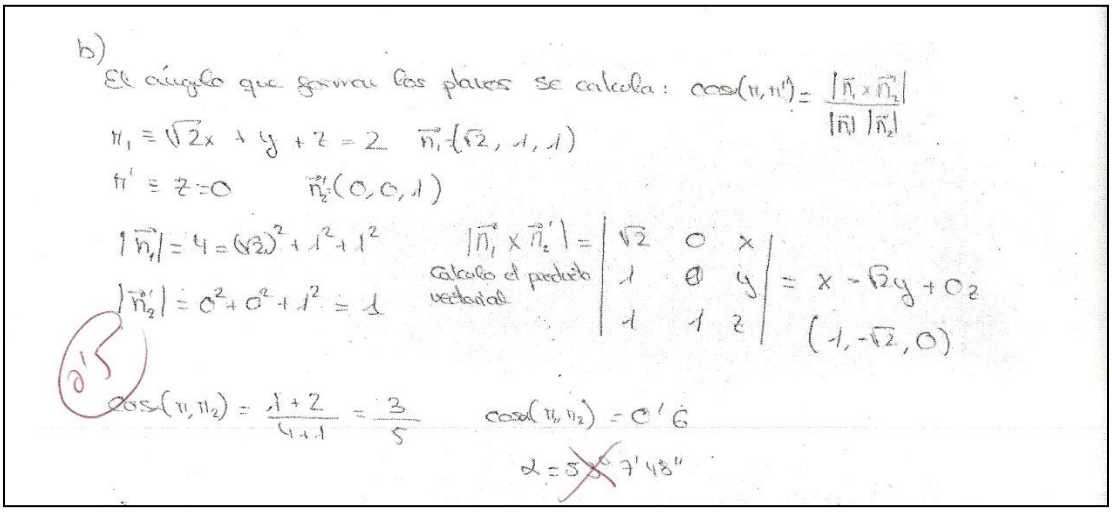
Calculo el producto vectorial

$(1,-\sqrt{2},0)$

$\cos(\pi,\pi_2) = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$ $\cos(\pi,\pi_2) = 0'6$

$\alpha = 53^\circ 7' 48''$

CORRECTOR 2



b)

El ángulo que forman los planos se calcula: $\cos(\pi,\pi') = \frac{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$

$\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ $\quad \vec{n}_1(\sqrt{2}, 1, 1)$

$\pi' \equiv z = 0$ $\quad \vec{n}_2'(0, 0, 1)$

$|\vec{n}_1| = 4 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2$

$|\vec{n}_2'| = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$

Calculo el producto vectorial $|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2'| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = x - \sqrt{2}y + 0z$

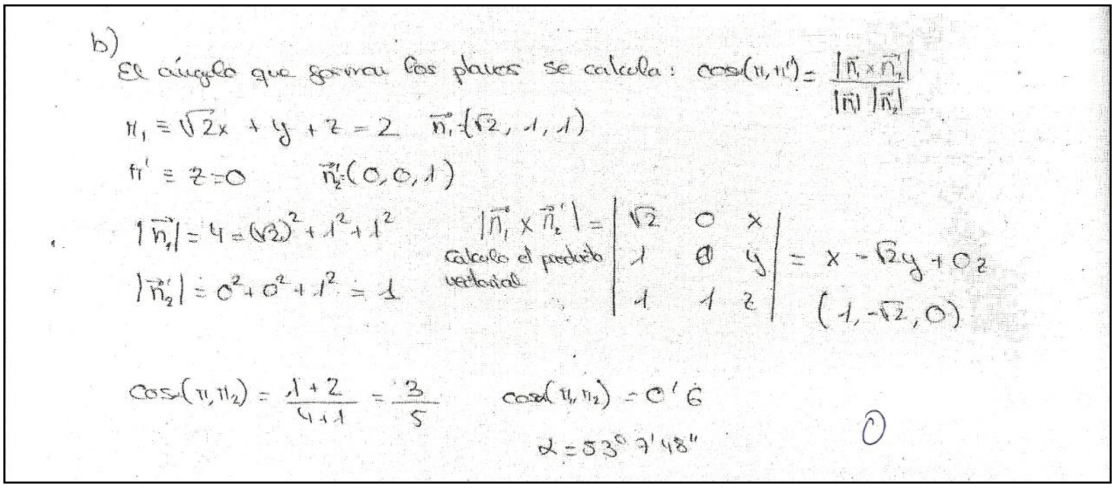
$(1, -\sqrt{2}, 0)$

0'5

$\cos(\pi,\pi_2) = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$ $\quad \cos(\pi_1,\pi_2) = 0'6$

$\alpha = 5\cancel{3}^\circ 7' 48''$

CORRECTOR 3



b)

El ángulo que forman los planos se calcula: $\cos(\pi,\pi') = \frac{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$

$\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ $\quad \vec{n}_1(\sqrt{2}, 1, 1)$

$\pi' \equiv z = 0$ $\quad \vec{n}_2'(0, 0, 1)$

$|\vec{n}_1| = 4 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2$

$|\vec{n}_2'| = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$

Calculo el producto vectorial $|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2'| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = x - \sqrt{2}y + 0z$

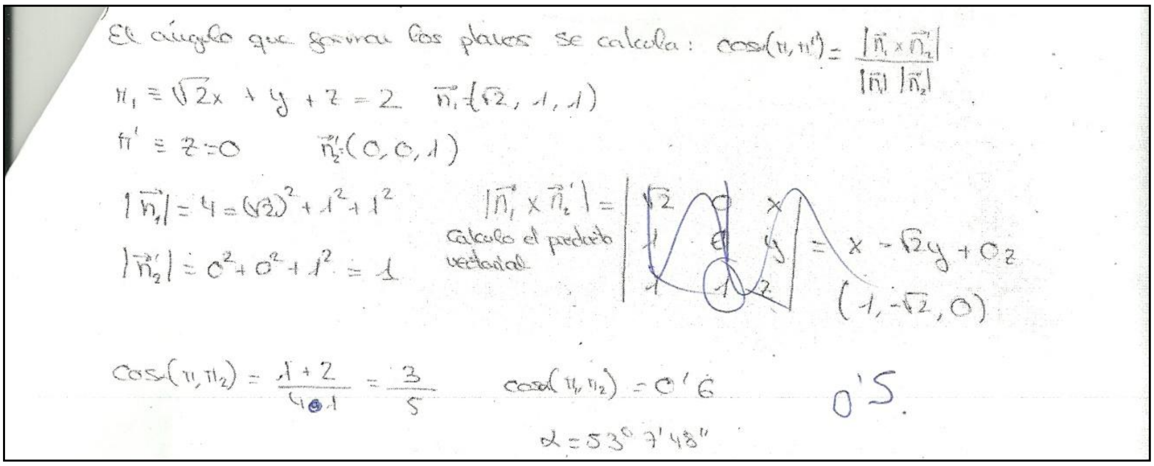
$(1, -\sqrt{2}, 0)$

$\cos(\pi,\pi_2) = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$ $\quad \cos(\pi_1,\pi_2) = 0'6$

$\alpha = 53^\circ 7' 48''$

0

CORRECTOR 4



El ángulo que forman los planos se calcula: $\cos(\pi,\pi') = \frac{|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$

$\pi_1 \equiv \sqrt{2}x + y + z = 2$ $\quad \vec{n}_1(\sqrt{2}, 1, 1)$

$\pi' \equiv z = 0$ $\quad \vec{n}_2'(0, 0, 1)$

$|\vec{n}_1| = 4 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2$

$|\vec{n}_2'| = 0^2 + 0^2 + 1^2 = 1$

Calculo el producto vectorial $|\vec{n}_1 \times \vec{n}_2'| = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix} = x - \sqrt{2}y + 0z$

$(1, -\sqrt{2}, 0)$

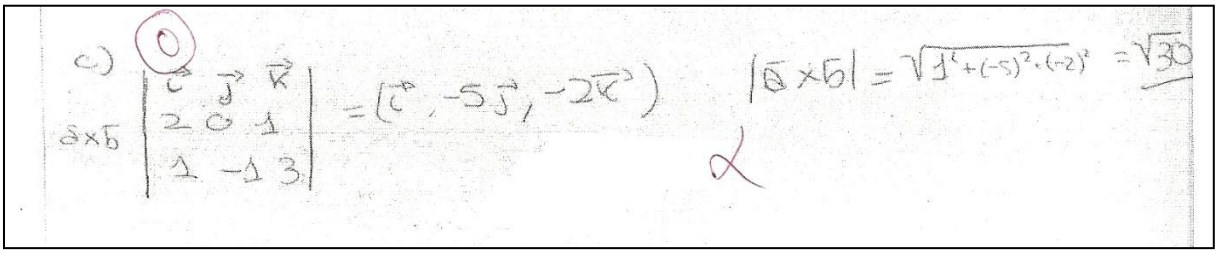
$\cos(\pi,\pi_2) = \frac{1+2}{4+1} = \frac{3}{5}$ $\quad \cos(\pi_1,\pi_2) = 0'6$ $\quad$ 0'5.

$\alpha = 53^\circ 7' 48''$

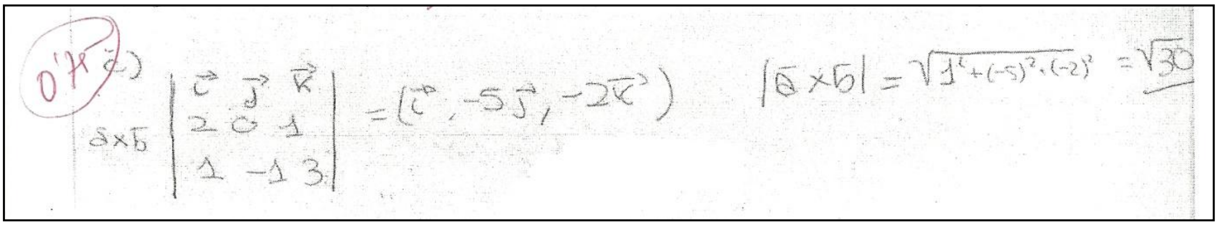
Apartado A4 c)

En este apartado el alumno solo debe realizar un cálculo, el de un producto vectorial (categoría C1). Sin embargo, hay más diferencias en este apartado que en los anteriores (a y b), debido a que el alumno utiliza una mala notación o se equivoca en la cuenta y los correctores aplican de distinta manera los criterios de corrección:

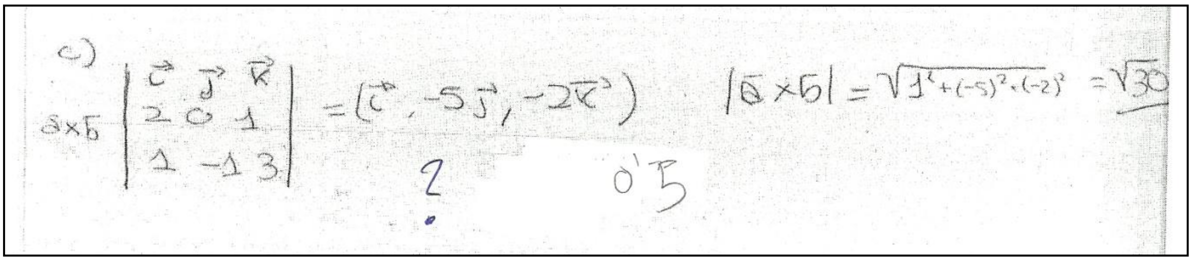
CORRECTOR 1



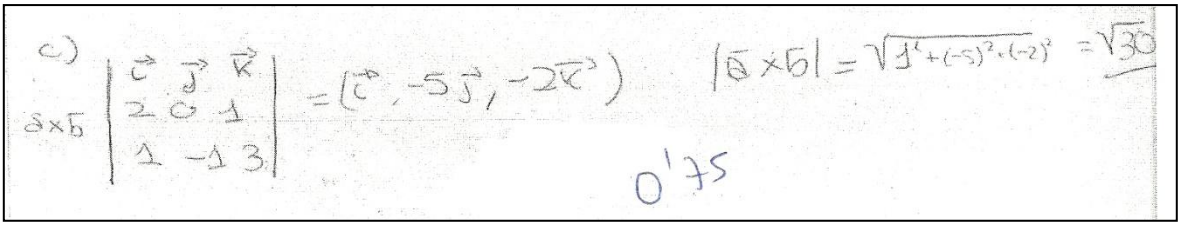
CORRECTOR 2



CORRECTOR 3



CORRECTOR 4



DISCUSIÓN, CONCLUSIONES Y PROSPECTIVA

En nuestro estudio concretamos el modelo de Gairín, Muñoz y Oller (2012) para la corrección y calificación de dos preguntas de la prueba de selectividad de Zaragoza en 2010. A partir del modelo teórico que proponen, generamos una guía de corrección que entregamos a 4 profesores para que califiquen dichas preguntas. A partir del análisis de las respuestas de los alumnos que generan variabilidad en las calificaciones recogidas identificamos los siguientes factores a considerar para la mejora del modelo GMO:

1. El alumno interrumpe la respuesta de una pregunta de clase C2 en cualquier punto del proceso de resolución.
2. Mala justificación de una solución o una mala expresión final de ésta.
3. Resultados de cálculos no justificados.

4. Errores conceptuales que no afectan a la resolución pero que muestran un determinado desconocimiento.

El análisis de las respuestas de los alumnos que los correctores calificaban de forma discrepante nos ha permitido observar factores no incluidos en el modelo GMO, como la valoración de una pregunta a medio contestar o los cálculos no justificados, que permiten todavía una variabilidad no deseada en las correcciones. Consideramos que el modelo ha demostrado su pertinencia y potencialidad y que la inclusión de soluciones que incorporen las problemáticas detectadas puede hacer ganar en robustez al modelo.

Gairín, Muñoz y Oller (2012) detectan casos en que distintos correctores asignan puntuaciones medias con diferencias que representan un 20% del total. En nuestro estudio comprobamos que una amplia mayoría de las calificaciones se sitúan por debajo del 15% del total. De esta forma, consideramos que la corrección a partir de la guía que proponemos como concreción del modelo muestra indicios de fiabilidad mayores que la corrección a partir de los criterios utilizados en la prueba real. Sin embargo, somos conscientes que no podemos aventurarnos todavía a realizar una afirmación contundente ya que el número de correctores participantes en la prueba no es suficiente para otorgar a los datos fiabilidad estadística. Por ello, nuestro estudio debería ampliarse abriendo la participación a un mayor número de correctores, centrándonos en aquellas respuestas de los alumnos que generan mayor variabilidad. En este punto, siguiendo a Muñiz y Fonseca-Pedrero (2008) deberíamos conseguir un instrumento en el cual los criterios de corrección no fuesen ni demasiado escuetos ni excesivamente precisos.

Dado un ejercicio de las PAU, consideramos que la forma en la que se explicitan los criterios requiere de un conocimiento profundo no sólo de los contenidos tratados, sino también de los errores que pueden cometer los alumnos. Asimismo, esta tarea no debe relegarse a correctores no expertos, dado que la concreción del modelo requiere que quien elabore la guía para la corrección separe claramente las diferentes tareas que debe realizar el alumno. Por ello, la elaboración de la guía requiere un nivel de análisis que no debe exigirse a una persona que no haya corregido previamente exámenes de matemáticas del nivel tratado. Por otra parte, resulta claro que la corrección de cualquier prueba tiene una componente de variación de error atribuible al evaluador y no al estudiante, debido a que en la corrección existen variables difíciles de medir.

Referencias

Álvarez Méndez, J. M. (2000*). Evaluar para aprender, examinar para excluir*. Madrid: Morata.

Casanova, M. A. (1998). Evaluación, concepto, tipología y objetivos. En M.A. Casanova. *La evaluación educativa*. México: SEP-Muralla (Cap. 3, pp. 67-102). Disponible en http://www.reformasecundaria.sep.gob.mx/espanol/pdf/evaluacion/casanova/casanova3.pdf

Cuxart, A., Martí, M., y Ferrer, F. (1997). Algunos factores que inciden en el rendimiento y la evaluación en los alumnos de las Pruebas de Aptitud de Acceso a la Universidad. *Revista de Educación, 314*, 63-88

Escudero, T., y Bueno, C. (1994). Investigaciones y Experiencias: Examen de Selectividad. El estudio de un tribunal paralelo. *Revista de Educación, 304*, 281-298

Gairín, J.M., Muñoz, J.M., y Oller, A.M. (2012). Propuesta de un modelo para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 261-274).

Grau, R. Cuxart, A., y Martí-Recober, M. (2002). La calidad en el proceso de corrección de pruebas de acceso a la universidad: variabilidad y factores. *Revista de Investigación Educativa*, *20*(1), 209-223

Muñiz, J., y Fonseca-Pedrero, E. (2009). Construcción de instrumentos de medida para la evaluación universitaria. *Revista de Investigación en Educación, 5*, 13-25.

ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR ALUMNOS DE PRIMARIA EN UNA TAREA DE GENERALIZACIÓN BASADA EN UN EJEMPLO GENÉRICO

Strategies used by fifth grade students in a generalization task based on a generic example

Eduardo Merino, María C. Cañadas y Marta Molina

Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo indagamos en la capacidad de generalización de estudiantes de quinto de educación primaria por medio del análisis de las estrategias que utilizan cuando abordan una tarea escrita de generalización, basada en un ejemplo genérico. Nos centramos aquí en las respuestas de estos alumnos a las cuestiones de dicha tarea relativas a relaciones funcionales inversas entre dos variables. Destacamos el uso de diferentes patrones como estrategia más frecuente y las evidencias obtenidas de la capacidad de generalización de los alumnos de quinto de educación primaria.

Palabras clave: *Educación primaria, ejemplo genérico, estrategia, generalización, patrón, relación funcional.*

Abstract

In this work we explore the generalization capacity of fifth grade students by analysing the strategies used in a generalization task based on a generic example. Here we focus on their answers to the questions of the task that refer to inverse functional relations between two variables. We highlight the use of different patterns as the most frequent strategy and the evidence obtained about the fifth grade students' generalization ability.

Keywords: *Functional relationship, generalization, generic example, pattern, primary education, strategy.*

INTRODUCCIÓN

Este estudio se enmarca en las investigaciones que vienen indagando en la propuesta *early algebra*. Esta propuesta consiste en la "algebrización del currículo" (Blanton y Kaput, 2005) y sugiere promover en las aulas el estudio de patrones, relaciones y propiedades matemáticas en un ambiente escolar en el que se valore que los alumnos de edades tempranas exploren, modelicen, hagan predicciones, discutan y argumenten (Molina, 2009). Nos centramos aquí en una de las aproximaciones al álgebra escolar recomendada para estos alumnos: la introducción de las relaciones funcionales (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011). Dentro de esta, la generalización y las representaciones se consideran elementos fundamentales (Warren, Cooper y Lamb, 2006).

En esta línea de investigación, estudios previos realizados a nivel internacional (e.g., Mason, Stephens y Watson, 2009; Warren, 2005), ponen de manifiesto la capacidad de estudiantes de educación primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos conjuntos de datos. Carraher, Martínez y Schliemann (2007) señalan cierta tendencia de los estudiantes de 8 años a pensar recursivamente sobre relaciones funcionales en tareas con figuras geométricas. Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (en prensa) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383-392). Bilbao: SEIEM.

lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras, para representar con fluidez variables y cantidades generalizadas. En relación con el desarrollo de esta capacidad, estudios como los de Radford (2011) y Rivera (2010) llaman la atención sobre la importancia de conectar estructuras espaciales y numéricas, y sobre el papel de los gestos, el discurso, la percepción, y la imaginación en el desarrollo de dicha conexión, en particular, y del desarrollo conceptual del niño, en general.

Con este documento pretendemos contribuir a la investigación sobre la capacidad de generalización de estudiantes de educación primaria, centrándonos en el análisis de las estrategias que ponen de manifiesto alumnos de 5º de educación primaria españoles al abordar una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Con este estudio, damos continuidad a trabajos que se han realizado en nuestro grupo de investigación sobre patrones y generalización (e.g., Cañadas, Castro y Castro, 2008; Castro, 1995; Castro, Cañadas y Molina, 2010), y contribuimos a la línea de trabajos que se viene desarrollando en el grupo de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM (Barrera, 2004; García y Martinón, 1999; Ortiz, 1997). A diferencia de la mayoría de los trabajos realizados hasta el momento en España, nuestro interés se centra en la educación primaria. Otro elemento que lo diferencia de la mayoría de los trabajos aquí citados es el tipo de tarea de generalización considerada, que incorpora un ejemplo genérico, en vez de una secuencia de casos particulares.

MARCO CONCEPTUAL

Centramos el marco conceptual de este trabajo en las nociones de generalización y patrones. La idea de patrón surge de la repetición de una situación con regularidad (Castro, 1995). Pólya (1966) señala que el reconocimiento de patrones es esencial en la habilidad para generalizar ya que, a partir de una regularidad observada, se busca un patrón que sea válido para más casos. La generalización se considera clave para la generación de conocimiento (Lakatos, 1978) y, en particular, del conocimiento matemático (Hermite, véase Pólya, 1962-65). Stacey (1989) distingue entre generalización cercana, que implica encontrar un patrón para elementos próximos o elementos que pueden ser hallados por conteo, dibujando o haciendo una tabla; y generalización lejana, en la que encontrar un patrón requiere identificar la regla general.

Desde la Educación Matemática, autores como Neubert y Binko (1992) o McGarvey (2012) destacan la necesidad de introducir más tareas que permitan a los alumnos iniciarse en la identificación de patrones y el reconocimiento de la generalización de las que habitualmente se proponen. Las tareas de generalización radican en obtener, a partir de casos particulares conocidos, nuevos casos particulares o el término general. Por tanto, requieren de la identificación de una pauta o patrón de comportamiento de los casos particulares. Las tareas de ejemplo genérico son un tipo de tarea de generalización que parten de un ejemplo que, si bien es particular, actúa como representante de su clase (Balacheff, 2000). En ese ejemplo se puede observar una regularidad que permite extraer conclusiones sobre el resto de casos particulares de su misma clase, no siendo necesario disponer de más casos particulares. Dicho ejemplo es el único caso particular conocido en la tarea y, a partir de él, se trata de llegar a la generalización.

La identificación y el uso de patrones es una de las estrategias para resolver una tarea de generalización, entendiendo la noción de estrategia como un “procedimiento o regla de acción que permite obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de relaciones y conceptos, generales o específicos de una determinada estructura conceptual” (Rico, 1997, p. 31).

Desde la perspectiva del contenido matemático, nos centramos en las funciones lineales con dos variables, cuyos conjuntos dominio e imagen son los números naturales. En este contexto, contemplamos dos tipos de relaciones entre las variables. La relación directa hace referencia a situaciones en las que se conoce el valor de la variable independiente y se desconoce la variable dependiente. La relación inversa se da cuando la variable desconocida es la variable independiente.

OBJETIVO

Nuestro objetivo de investigación en este trabajo es identificar y describir las estrategias utilizadas por alumnos de 5º de educación primaria en una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico.

MÉTODO

La investigación es de carácter exploratorio y descriptivo. Recogimos datos en el curso 2011-2012, con una muestra intencional de 20 alumnos de 5º curso de educación primaria (10-11 años), de un colegio privado de Málaga (España). La maestra de dicho grupo de alumnos informó que no habían trabajado tareas de generalización en ese curso académico ni anteriormente.

Instrumento de recogida de información y aplicación

Diseñamos unan prueba individual escrita como instrumento de recogida de información. Los alumnos la resolvieron en la hora y lugar habituales de clase de matemáticas. El primer autor de este trabajo presentó la tarea y resolvió las dudas a los alumnos, insistiendo en la importancia de justificar las respuestas.

La tarea contiene 10 cuestiones[4] que involucran relaciones de dependencia entre dos variables en una función lineal, que se introducen con la información presentada en la figura 1.

Sara celebra su cumpleaños en casa, y quiere invitar a sus amigos a merendar tarta. Para que sus amigos se sienten, su madre junta algunas mesas cuadradas, y coloca a los niños sentados como puedes ver en la imagen.

Las mesas se unen formando una fila como la que observas en la figura anterior. Cada niño tiene que ocupar un lado de una mesa, no pueden ponerse en las esquinas. En todos los lados de las mesas que no están pegados a otras debe haber un niño sentado.

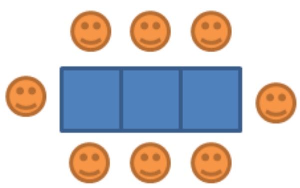


Figura 1. Texto e imagen presentados en la tarea

Las relaciones directa o inversa para esta tarea quedaron definidas del siguiente modo:

- Relación directa: se conoce el número de mesas y se desconoce el número de niños.
- Relación inversa: se conoce el número de niños y se desconoce el número de mesas.

En este trabajo nos centramos en las producciones de los alumnos a las tres cuestiones que se refieren a la relación inversa entre las variables[5], las cuales presentamos a continuación.

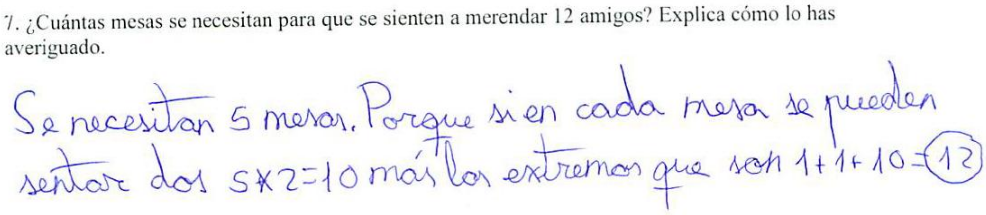
[4] Las 10 cuestiones pueden consultarse en el trabajo completo de Merino (2012)

- Cuestión 7[6]. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
- Cuestión 8. ¿Y para que se sienten a merendar 58 amigos? Explica cómo lo has averiguado.
- Cuestión 9. Si sabes el número de amigos que van merendar, ¿de qué forma explicarías a alguien cómo averiguar el número de mesas que se necesitan para que puedan sentarse? Explica cómo lo has pensado.

Categorías de análisis y proceso de codificación

Definimos las categorías de análisis con base en el marco conceptual, los antecedentes y un análisis preliminar de las respuestas de los alumnos, siguiendo la teoría fundamentada (*grounded theory*) de Corbin y Strauss (1990). Las categorías utilizadas para distinguir los tipos de estrategias identificados son las siguientes: (a) conteo (sobre los casos particulares), (b) uso de patrón (completo/incompleto y apropiado/inapropiado), (c) operación sin uso de patrón (utiliza operaciones que no podemos relacionar con un patrón), (d) estrategia previa (hace referencia a la estrategia utilizada en al menos una cuestión anterior), (e) casos particulares anteriores (hace referencia a los valores de las variables correspondientes a casos particulares conocidos), y (f) repetición de enunciado.

Por ejemplo, en la respuesta a la Cuestión 7 que se muestra en la figura 2, identificamos el uso del patrón, en este caso, el que responde a M×2+1+1 (siendo M un número concreto).


7. ¿Cuántas mesas se necesitan para que se sienten a merendar 12 amigos? Explica cómo lo has averiguado.

Se necesitan 5 mesas. Porque si en cada mesa se pueden sentar dos 5x2=10 más los extremos que son 1+1+10=12

Figura 2. Respuesta de A10 a la Cuestión 7

DATOS Y RESULTADOS

Resumimos las estrategias utilizadas por cada alumno en cada una de las cuestiones en la tabla 1. Distribuimos los alumnos por filas y las cuestiones por columnas (ver Tabla 1). Para referirnos a los alumnos, utilizamos la letra A junto con el número que asignamos aleatoriamente a cada uno. En el caso de la estrategia uso de patrones, explicitamos la estructura de cada patrón usando las letras M y N para denotar a un número concreto relativo al número de mesas y/o niños, respectivamente.

Tabla 1. Resumen de resultados

	Estrategias		
Alumnos	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9[7]
A1	Conteo	M:3*	Repite enunciado
A2	Conteo*	-	Estrategia previa
A3	M×2+2	N:2-1	2:M

[5] El estudio de las cuestiones que involucran la relación directa entre variables se presenta en Merino, Cañadas y Molina (2013).

[6] Mantenemos la numeración original de las cuestiones en la tarea.

[7] No se analiza la corrección o incorrección en la Cuestión 9, debido a que la mayoría de las respuestas no pueden considerarse como correctas ni incorrectas.

Alumnos	Estrategias		
	Cuestión 7	Cuestión 8	Cuestión 9[7]
A4	N:3*	N:3 / N:8*	Opera “sumando”
A5	M×2+2/Caso anterior	(N:2)×2×2*	M×2+2
A6	2+2+2+2+2+2	N:2*	N:M
A7	Estrategia previa	N:8*	Estrategia previa
A8	M+M+2	N:2*	M×2+2
A9	Opera “dividiendo”	-	M×2+2
A10	M×2+1+1	Estrategia previa	N:2+2
A11	Respuesta directa*	Nx3*	Opera 58×3
A12	Estrategia previa / Caso anterior	N:2-2*	(N-2):2
A13	N:2-2*	N:2-2*	N:2-1
A14	Respuesta directa*	-	Conteo
A15	Conteo	N:2*	-
A16	Opera 10+2	N:2+2	N:2+2
A17	M+M+2	N-2*	N-2
A18	(N-2):2	-	Conteo
A19	Respuesta directa	Conteo	-
A20	M×2+2	(N-2):2	(N-2):2

Nota. Repite enunciado = repetición de instrucciones ofrecidas en el enunciado. Estrategia previa = alusión a la estrategia usada en, al menos, una cuestión anterior. Caso anterior = referencia a casos particulares hallados en cuestiones anteriores. Opera = operación sin uso de patrón, en la que los alumnos ofrecen cálculos concretos, o solo aluden verbalmente al tipo de operación usada “dividiendo” o “sumando”. * = Respuesta incorrecta

Destacamos algunos resultados atendiendo, en primer lugar, de forma global, a cada una de las cuestiones; y, en segundo lugar, a la actuación de cada alumno en el conjunto de las cuestiones objeto de análisis.

Los alumnos respondieron mediante estrategias variadas a la Cuestión 7. Las estrategias más usadas fueron el conteo y el uso del patrón M×2+2. Se dieron otros patrones apropiados (es decir, patrones que conducen a una respuesta correcta) como M×2+1+1 (ver figura 2), M+M+2, y (N-2):2 (ver figura 3). También encontramos un patrón incompleto, N-2, así como patrones inapropiados (conducen a una respuesta incorrecta): N:3 y N:2-2 (ver figura 4).

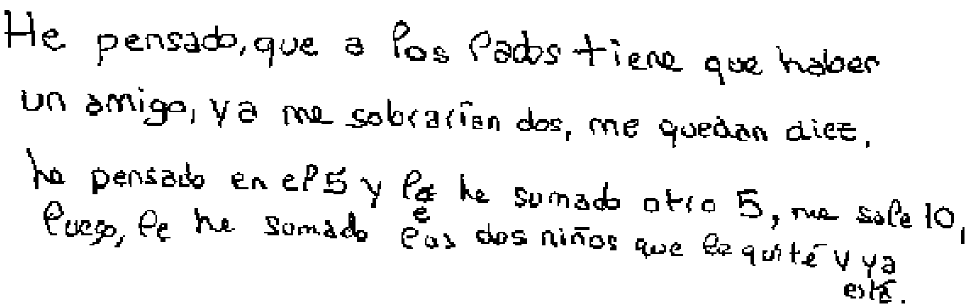


Figura 3. Respuesta de A18 a la Cuestión 7

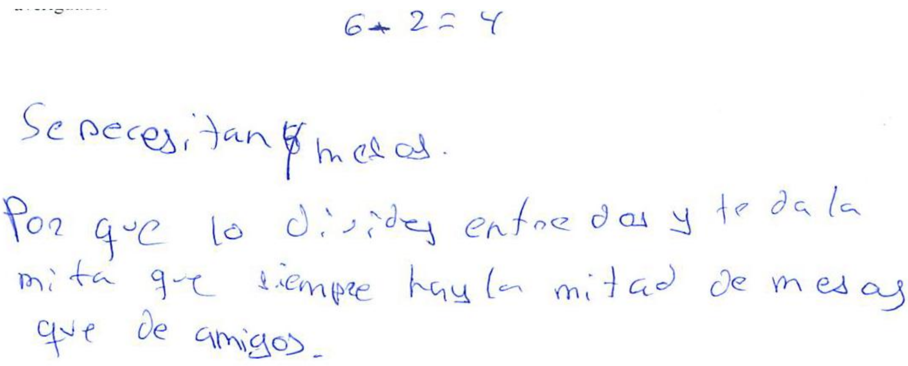


Figura 4. Respuesta de A13 a la Cuestión 7

En general, las respuestas erróneas a esta cuestión fueron asociadas al uso de patrones inapropiados y a respuestas directas que no nos permiten tener evidencia de la estrategia empleada.

Entre los 16 alumnos que respondieron a la Cuestión 8, la estrategia más utilizada fue el uso de algún patrón. Utilizaron patrones apropiados como Mx2+2, N:2-1 y (N-2):2; patrones incompletos como N-2 y N:2; y cinco patrones inapropiados (7 alumnos). Solo un alumno utilizó el conteo como estrategia (ver figura 5).

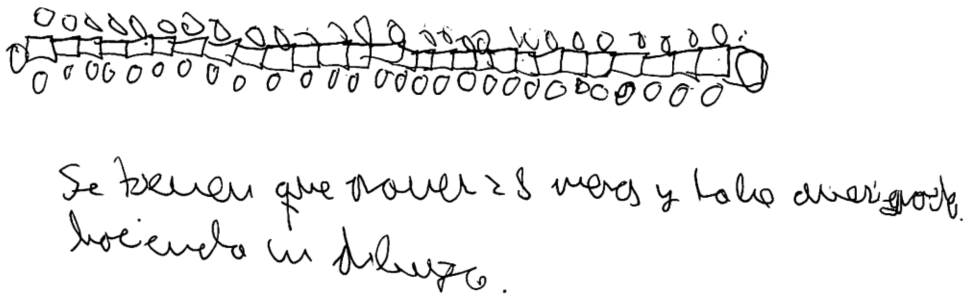


Figura 5. Respuesta de A19 a la Cuestión 8

En la Cuestión 8, la mayoría de los alumnos que dieron respuestas erróneas, utilizaron operaciones que no incluyeron el uso de ningún patrón.

A la Cuestión 9 respondieron 18 alumnos, pudiéndose identificar patrones apropiados (Mx2+2, (N-2):2 y N:2-1), un patrón incompleto (N-2) (ver figura 6), y patrones inapropiados (N:M, N:2+2 y 2:M). Dos alumnos utilizaron operaciones que no implicaron el uso de patrones. Un alumno repitió las instrucciones dadas en el enunciado y otros dos hicieron alusión a la estrategia usada en una cuestión anterior (ver figura 7).

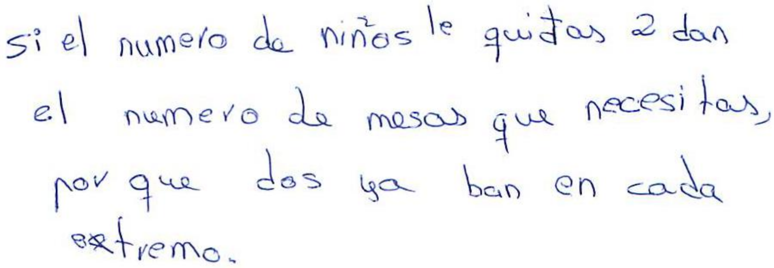


Figura 6. Respuesta de A17 a la Cuestión 9

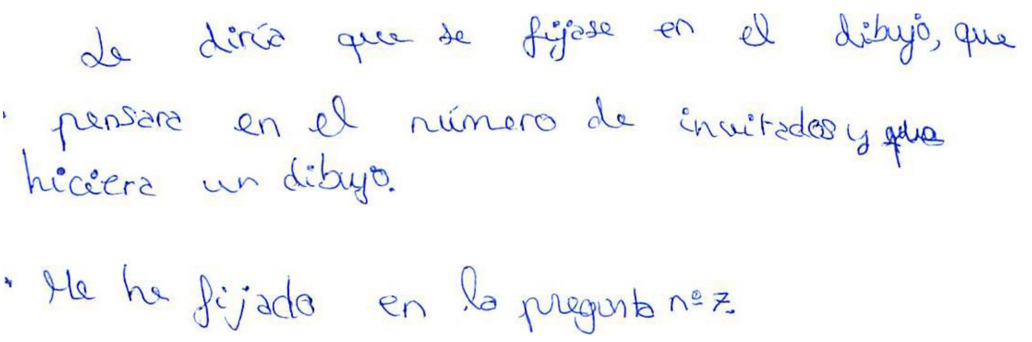


Figura 7. Respuesta de A2 a la Cuestión 9

El análisis global de las respuestas de los estudiantes a estas tres cuestiones muestra el uso de una amplia variedad de patrones, llegándose a registrar hasta 18 patrones distintos, aunque la mayoría conducen a una respuesta errónea. Los alumnos que utilizaron patrones en su respuesta, generalmente lo hicieron a lo largo de las 3 cuestiones, siendo el más utilizado M×2+2. Otros patrones apropiados utilizados fueron M×2+1+1, o M+M+2. Estos tres patrones parten del número de mesas para averiguar el número de niños, es decir, son propios de la relación directa. Junto a M×2+2, el patrón apropiado más usado a lo largo de las cuestiones fue (N-2):2, que junto a N:2-1 o N:2+2 forma el grupo de patrones apropiados que parten del número de niños para averiguar el número de mesas, siendo un patrón propio de la relación inversa entre variables. Entre los patrones erróneos utilizados, destacan los que usaron los alumnos que dividieron el número de niños entre otra cifra (2, 3 u 8), o el patrón N-2, utilizados con más frecuencia que el resto.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En la Cuestión 7, los tipos de respuesta más frecuentes fueron las que se basan en el conteo o las respuestas directas, probablemente debido a la posibilidad de resolverla con cálculo mental por involucrar números pequeños. Sin embargo, en las cuestiones 8 y 9 se dio un mayor uso de patrones y de operaciones, lo que pudo deberse a un aumento de la complejidad de la cuestión (cifras mayores y pregunta por un caso general) que hizo que los alumnos no pudieran acudir al cálculo mental.

Resulta llamativo que el patrón apropiado más usado sea propio de la relación directa (Mx2+2). Esto puede deberse a que esta era la relación con la que habían trabajado en las cuestiones previas. Observamos cómo, a medida que fueron avanzando las cuestiones, los alumnos tomaron como referencia el número de niños (N) para proponer patrones. Entre los patrones que llevaron a una respuesta correcta distinguimos: M+M+2, M×2+2, N:2-1, N:2+2 y (N-2):2.

Por otra parte, es reseñable que la mayoría de los alumnos que utilizó algún patrón apropiado en su respuesta, no mantuvo el uso de un patrón propio de un tipo de relación durante las tres cuestiones. Este cambio de estrategia pudo deberse a la dificultad creciente en los enunciados que hizo que el alumno debiera investigar nuevas vías para ofrecer su respuesta.

El uso de estrategias estuvo, en cierto modo, condicionado por las cantidades de niños o mesas propuestas en los enunciados a las cuestiones. Las estrategias de conteo y las respuestas directas fueron más utilizadas cuando en cuestiones de generalización cercana (Cuestión 7); mientras que en las cuestiones de generalización lejana (Cuestión 8, con 58 alumnos y 28 mesas), la tendencia generalizada fue utilizar el cálculo y recurrir al uso de diferentes patrones. Así mismo, observamos que el uso de patrones al abordar la cuestión relativa a valores pequeños de la variable mesas condujo a un mayor éxito al abordar la cuestión relativa a números más grandes o la cuestión sobre la expresión general de la relación entre las variables. También es reseñable que en la Cuestión 9 se dé un incremento del número de respuestas que aluden a estrategias usadas en cuestiones anteriores, lo que sugiere dificultades para expresar verbal o simbólicamente las relaciones apreciadas.

Entre las estrategias que condujeron a respuestas erróneas destacan la multiplicación y la división. Esto puede deberse a una incorrecta comprensión del enunciado o a la utilización, por parte de los alumnos, de una operación multiplicativa al reconocer cierta reiteración de una cantidad en el contexto presentado.

Destacamos algunos alumnos, como A13, quien usó el patrón inapropiado N:2-2 para las cuestiones 7 y 8, y cambia a N:2-1(apropiado) en la Cuestión 9. Su error en las primeras cuestiones se pudo deber a que identificó la cantidad que debía restar con el número de niños. También destacamos a A16, que utilizó el patrón apropiado N:2-1 pero, sin embargo, explicó que lo que había hecho era dividir el número de niños por dos para obtener el número de mesas, y sumar 2 a ese número. Este alumno intercambió de manera eficaz el papel de las variables, ya que su respuesta finalmente fue correcta.

En cuanto a la relación entre estrategia usada y corrección de las respuestas, la gran mayoría de respuestas incorrectas (14 de 18) fueron precedidas del uso de un patrón inapropiado. Solo en 4 ocasiones, los alumnos usaron una estrategia distinta y su respuesta fue errónea: respuesta directa (2 veces), conteo y operación (suma). Además, una vez se hubo incurrido en un error los alumnos no volvieron a dar una respuesta correcta. Los 7 alumnos que fallaron en la Cuestión 7 también lo hicieron en la Cuestión 8 o no respondieron a ella.

CONCLUSIONES

En este trabajo atendemos a las estrategias empleadas en cuestiones relativas a la relación inversa entre variables en una tarea de generalización a partir de un ejemplo genérico. Hemos identificado una gran variedad de estrategias utilizadas por los alumnos, siendo la más frecuente el uso de patrones. La variedad de patrones que son capaces de identificar los alumnos de quinto de educación primaria destaca por su numerosidad, a pesar de no estar acostumbrados a este tipo de tareas, según la información aportada por la maestra. Esta riqueza está, al menos en parte, justificada por la tendencia de los alumnos a buscar nuevas estrategias en diferentes cuestiones aunque se refieren a la misma relación entre las variables. Destacamos este hecho para abordarlo en estudios posteriores. Este estudio coincide con otros realizados a nivel internacional al dar evidencias de la capacidad de generalización de algunos alumnos españoles de estas edades, en este caso a partir de la identificación de regularidades en un ejemplo genérico. No obstante se evidencia la necesidad de abordar este tipo de tareas en la enseñanza de forma explícita, dada la alta presencia de patrones inapropiados en las estrategias de los alumnos.

Observamos que aquellos estudiantes que utilizan patrones en las cuestiones relativas a números pequeños, son más exitosos en el resto de cuestiones. Estos resultados, junto con una tendencia similar observada en las respuestas de los alumnos a las cuestiones en las que se da una relación directa, nos conduce a proponer a los docentes que promuevan el uso de este tipo de estrategias cuando aborden cuestiones relativas a relaciones entre variables, en detrimento de estrategias de conteo.

Los resultados presentados contribuyen a la investigación sobre el desarrollo del pensamiento algebraico en el marco de la propuesta *early algebra*, centrándonos en el uso de patrones y la generalización en educación primaria. La incorporación del ejemplo genérico destaca como elemento novedoso en esta investigación aportando resultados complementarios a los de estudios previos.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: una Empresa Docente.

Barrera, V. J. (2004). *Trabajo con razonamiento inductivo por profesores de educación primaria en formación*. Trabajo de Investigación Tutelada. Granada: Universidad de Granada.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Brizuela, B. M., y Martinez, M. V. (en prensa). Aprendiendo acerca de la comparación de funciones lineales. En J. A. Castorina, M. Carretero y A. Barreiro (Eds.), *Desarrollo cognitivo y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Paidós.

Cañadas, M. C., Castro, E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA*, *2*(3), 137-151.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 3-22.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales.* Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO*, *54*, 55-67.

Corbin, J. y Strauss, S. (1990). Grounded theory research: procedures, canons, and evaluative criteria. *Qualitative Sociology*, *13*(1), 3-21.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

García, J. A. y Martinón, A. (1999). Estrategia visual en la generalización de pautas lineales. *Enseñanza de las Ciencias*, *17*(1), 31-43

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, science and epistemology. Philosophical Papers*. vol. 2. Cambridge: University Press. (Traducción al castellano: D. Ribes, 1981, Matemáticas, ciencia y epistemología. Madrid: Alianza.)

Mason, J., Stephens, M y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, *21*(2), 10-32

Merino, E. (2012). Patrones y representaciones de alumnos de 5º de primaria en una tarea de generalización. Trabajo fin de máster. Universidad de Granada: Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Merino, E., Cañadas, M. C., y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

McGarvey L. M. (2012). What is a pattern? Criteria used by teachers and young children. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*(4), 310-337.

Neubert, G. A. y Binko, J. B. (1992). *Inductive reasoning in the secondary classroom*. Washington, D. C.: National Education Association.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Pólya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery.* 2 vols. New York: John Wiley and Sons.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 17-24). Ankara, Turkey: PME.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-59). Barcelona: Horsori.

Rivera, F. D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En Pinto, M.F. y Kawasaki, T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 81-88). Belo Horizonte, Brazil: PME

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, *20*, 147-164.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En Chick, H.L., y Vincent, J.L. (Eds.). *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 305-312). Melbourne: PME.

Warren E. A., Cooper T. J. y Lamb J. T. (2006). Investigating functional thinking in the elementary classroom: Foundations of early algebraic reasoning. *The Journal of Mathematical Behavior, 25*(3), 208-223.

TRABAJANDO LA METACOGNICIÓN EN UNA TAREA DE RAZÓN Y PROPORCIÓN[xxvii]

Working metacognition in a ratio and proportion task

Javier Monje[a], Patricia Pérez-Tyteca[b] y Bernardo Gómez[b]

[a]Universidad de Alicante, [b]Universidad de Valencia

Resumen

Se describen los resultados de una investigación que trata del diseño e implementación de una propuesta de enseñanza dirigida a futuros maestros sobre "la relatividad" (Freudenthal, 2001) en tareas de razón y proporción. Esta propuesta se basa en el uso de las prácticas metacognitivas y en los principios de la Mayéutica Socrática, y ha sido experimentada en un grupo de estudiantes de tercer curso del grado de Maestro en Educación Primaria.

Palabras clave: *razón y proporción, metacognición, mayéutica, futuros maestros.*

Abstract

Our research focuses on the design and implementation of a teaching proposal aimed at pre-service teachers about the relativity (Freudenthal, 2001) in ratio and proportion task. This proposal is based on metacognitive practices, taking Socratic Maieutic principles. We have implemented this proposal with a group of third year pre-service teachers and the results obtained are told in this paper.

Keywords: *ratio and proportion, metacognition, maieutic, pre-service teachers.*

Monje, J., Pérez-Tyteca, P. y Gómez, B. (2013). Trabajando la metacognición en una tarea de razón y proporción. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 393-401). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

En la educación matemática son frecuentes los estudios que se ocupan por separado de alguna de las tres componentes principales de la actividad docente: el contenido disciplinar, el aprendizaje y la enseñanza. En el sistema educativo estas tres componentes están interconectadas, como los tres vértices de un triángulo, por lo que, en nuestro trabajo, optamos por un abordaje simultáneo de las mismas.

Este abordaje se apoya en investigaciones precedentes llevadas a cabo por nuestro grupo (Fernández, Figueras, Gómez, Monzó y Puig, 2009; Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, 2013) en relación con el contenido: los conceptos de razón y proporción, el aprendizaje, basado en las prácticas metacognitivas (Rigo, Páez y Gómez, 2010), y la enseñanza, mediante el método de la mayéutica socrática (Rigo, 2011; Rigo y Gómez, 2012) (Figura 1).

Figura 1. Triángulo docente abordado

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

El propósito de esta comunicación es dar cuenta del diseño e implementación de un protocolo de instrucción dirigido a futuros maestros, cuyos fundamentos teóricos son los siguientes.

Contenido

Los conceptos de razón y proporción aparecen en el currículo desde edades tempranas, y constituyen un soporte fundamental para una gran variedad de temas de las matemáticas, las ciencias, e incluso de la vida real. El buen manejo de situaciones relacionadas con precios por unidad, porcentajes, velocidades, densidades, o escalas entre otros, forman parte de las competencias mínimas que un futuro maestro debe poseer.

Razón y proporción están entre los temas “más difíciles de enseñar, de mayor complejidad matemática, de mayor desafío cognitivo, y más esencial para el éxito al avanzar en matemáticas y ciencias” (Lamon 2007, p, 629).

Abundando en esto, diversos trabajos de investigación han puesto en evidencia las dificultades que tienen los profesores de la escuela primaria y secundaria en relación con la comprensión y la enseñanza de estos temas (Ben-Chaim, Ilany, y Keret, 2002; Berk et al., 2009; Keret, 1999, citados en Ben-Chaim, Kerety Ilany, 2012), por lo que parece necesario desarrollar nuevas propuestas que contribuyan a remediar esta situación.

En particular, fijamos nuestra atención en la compresión y enseñanza del tipo de situaciones que Freudenthal (2001), en su fenomenología didáctica, considera que son aplicaciones que conservan la razón en las cuales está implícita la palabra “relativamente”, como por ejemplo: “una pulga puede saltar – relativamente- más alto que un hombre” (p. 124).

Concretamente hemos escogido una tarea basada en una situación real de compra en la que se muestran diferentes ofertas (véase figura 2) extraídas de folletos comerciales y se pregunta qué descuento es mejor.

Figura 2. Descuentos mostrados a los estudiantes

La dificultad de esta tarea radica en dos componentes críticas. La primera de ellas es percibir que la pregunta no es sobre la magnitud del descuento (no se trata de ordenar de mayor a menor la cantidad que se descuenta) sino de entender que las ordenaciones (de los descuentos: mayor, menor) son relativas; es decir, “en relación con”.

La segunda componente crítica hace referencia a que, para comparar, es necesario construir una unidad de referencia común e interpretar la situación en términos de esa unidad (*unitizing,* en el sentido de Lamon, 1996. En lo sucesivo hablaremos de unitizar y unitización para referirnos a este proceso).

Aprendizaje

En relación con el aprendizaje seguimos las ideas de Lester, (1985), Schoenfeld (1985)o Lester y Kroll (1990) que destacan la importancia de potenciar la metacognición en los estudiantes, referida a las reflexiones (o interpretaciones) que hace un sujeto de sus procesos cognitivos (Schoenfeld, 1985; 1987; 1992), o más específicamente al

> “conocimiento o conciencia que uno tiene sobre sus propios procesos y productos cognitivos […] hace referencia, entre otras cosas, a la supervisión activa y la consecuente regulación y orquestación de estos procesos en relación con los objetos o datos cognitivos sobre los cuales actúan” (Flavell, 1976, p. 232).

Partiendo de la idea de que el profesor representa un modelo a seguir para sus alumnos, desde la comunidad investigadora se defiende la implementación de técnicas metacognitivas durante la instrucción en el aula (Rigo, Páez, y Gómez, 2010). A pesar de ello “los maestros todavía ponen poca atención en la enseñanza explícita de la metacognición” (Desoete, 2007, p. 709).

Por este motivo consideramos fundamental trabajar prácticas metacognitivas con los maestros en formación para que en un futuro sean capaces de aplicarlas en su aula.

Un modelo teórico bajo el cual poder valorar los procesos metacognitivos que se ponen en juego en la educación matemática es el de Lester (1985). Este es un modelo que considera la componente metacognitiva como un constructo tridimensional en el que entran en juego variables que hacen referencia al propio sujeto (variables de persona), a la tarea que debe resolver (variables de tarea) y a las estrategias de que dispone para ello (variables de estrategia).

Enseñanza

En cuanto a la enseñanza, un método que se perfila potente para trabajar la metacognición en el aula es la mayéutica socrática, método pedagógico cuyo rasgo distintivo, como indica Rigo (2011), consiste en propiciar en el alumno un aprendizaje a partir del auto-reconocimiento de su ignorancia. Este método se desarrolla en tres momentos: construcción, de-construcción y re-construcción (Rigo, 2011; Rigo y Gómez, 2012).

En el momento de construcción, el docente plantea una tarea de la que sabe de antemano sus dificultades o los problemas que va a ocasionar en sus alumnos. Éstos resuelven la tarea en muchos casos insatisfactoriamente. Se les pide que realicen reflexiones metacognitivas sobre las variables de persona (confianza en su respuesta, cómo se han sentido antes y después de la resolución) y de tarea (qué contenidos están implicados en la tarea, qué opinión les merece su enunciado, qué grado de dificultad le otorgan, cómo justifican su resolución).

En el momento de de-construcción, el docente rebate las resoluciones efectuadas por los estudiantes enfrentándolos a su error, haciéndoles conscientes de la existencia de un conflicto cognitivo y propiciando que reflexionen sobre las estrategias adoptadas en la resolución de la tarea (variable de estrategia).

Por último, en el momento de re-construcción, el docente guía a los alumnos hacia lo que hasta ahora desconocían en relación a la tarea propuesta, hasta que el alumno reformula su resolución.

Patrones de respuesta

Para que el proceso mayéutico sea efectivo es necesario conocer de antemano los patrones de respuestas de los estudiantes a las tareas y haber tipificado sus dificultades sobresalientes, que posteriormente se aprovechan como oportunidades de aprendizaje en las fases de de-construcción y re-construcción.

A tal fin, para conocer los patrones de respuesta de los estudiantes, hemos desarrollado un esquema de clasificación en categorías, subcategorías, clases y subclases, como resultado de la aplicación de la tarea a un colectivo de 314 estudiantes de magisterio durante el curso 2011-2012, en su ambiente natural de clase (Para más información véase Gómez, et. al. 2013).

El primer criterio para agrupar las respuestas es si los estudiantes perciben la relatividad de la tarea o no. Esto determina dos clases: los que se fijan en que los datos (3×2, segunda unidad a mitad de precio, y 70% en la segunda unidad) son razones, y los que se fijan en elementos específicos y superficiales de las ofertas.

Dentro de la primera categoría encontramos dos subcategorías:

A.1. Comparan cantidades comparables: Estos estudiantes unitizan con éxito, usando las estrategias *parte-todo*, *valor unitario* y *construcción progresiva*.

A.2. Comparan cantidades no comparables: Estos sujetos se enfrentan con dificultades al unitizar. Se dividen en dos clases:

A.2.1. Razón unitaria parcial. Los sujetos toman diferentes unidades de referencia, calculan cuál es el porcentaje aplicado a cada unidad en el caso del 3x2 (33%) y lo comparan con el porcentaje que en los otros dos casos se aplica a la unidad rebajada (50% y 70%).

En este caso, los sujetos tienen problemas a la hora de unitizar ya que si bien cada uno de estos descuentos hace referencia a una botella, la unidad de referencia es diferente en el caso del 3x2 (cada una de las botellas) y en los otros dos casos (sólo la botella rebajada).

A.2.2.Construcción progresiva fallida. Los sujetos escogen comparar el coste o ahorro total al comprar el mismo número de botellas en los tres casos partiendo de un precio común. El problema es que la elección de la unidad de referencia es inadecuada, ya que si no se compran un número de unidades que sea múltiplo de 3en la primera oferta, o de dos en la segunda y tercera oferta, no es posible acogerse al descuento.

En la segunda categoría se agrupan las respuestas que no tienen en cuenta la relatividad del descuento y dentro de ella se distinguen dos subcategorías: B.1 con respuestas cualitativas, y B.2 con respuestas cuantitativas, que corresponden a sujetos que anclan su resolución a los datos concretos que aparecen en los folletos (precios dados en cada caso, número de botellas implicados en la oferta).

Esta subcategoría es la más significativa, y agrupa dos clases:

B.2.1. Operatividad. Los alumnos *c*alculan el coste o ahorro total utilizando los datos ofrecidos por el anuncio (diferentes precios y/o diferente número de unidades mostradas) y los comparan sin ponerlo en relación con el coste o compra total.

B.2.2.Numerosidad. En este caso los alumnos centran su respuesta en el número de unidades que el consumidor desee llevarse, considerando que la calidad del descuento depende principalmente de este factor.

METODOLOGÍA

Estructura del protocolo mayéutico

Teniendo en cuenta lo anteriormente expuesto, y ya conocidos los patrones de respuesta, se ha diseñado elprotocolo mayéutico de modo que en la misma sesión de clase de cualquiera que sea el grupo de futuros maestros, se puedan trabajar los tres momentos de la mayéutica de un modo no improvisado, con la siguiente secuencia:

Proceso autónomo

Este proceso corresponde al momento de construcción, donde se administra el cuestionario que contiene la tarea y las preguntas metacognitivas relacionadas con la tarea y la persona (¿has entendido la pregunta, te parece ambigua, cómo te has sentido, es difícil, crees que te faltan conocimientos matemáticos para resolverla?).

Proceso guiado por el profesor

Este proceso corresponde a los momentos de de-construcción, donde se presenta a los estudiantes del grupo los patrones de respuestas fallidos más significativos: B.2.1.yA.2.2; seguido del momento de re-construcción, donde se muestran ejemplos de resoluciones eficientes de los estudiantes de la prueba del 2011-2012.

El proceso se basa en la discusión y reflexión sobre las diferentes estrategias empleadas para resolver la tarea. El profesor/investigador formula las preguntas “mayéuticas” en cada momento para hacer aflorar los conflictos cognitivos subyacentes relacionados con cada una de las estrategias mostradas. Así, con las preguntas: ¿te convence cómo se ha resuelto?, ¿de qué depende el descuento? o ¿qué valoración le das a esa resolución?, se confronta a los estudiantes con sus nociones intuitivas haciéndoles conscientes de las limitaciones de sus ideas acerca de los conceptos involucrados. Además, se consigue que los alumnos expliquen sus razonamientos y escuchen y comprendan otras soluciones basadas en la relatividad del descuento y en la equivalencia entre las estrategias que resultan ser más efectivas.

Aquí finaliza el proceso guiado por el profesor.

Muestra, aplicación y codificación

El protocolo mayéutico se implementó en una sesión ordinaria de clase de la asignatura Didáctica de la Aritmética y la Resolución de Problemas correspondiente al tercer curso del grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Valencia. Los alumnos que participaron son los que acudieron ese día a clase; un total de 36 estudiantes. La experiencia se llevó a cabo en el mes de febrero de 2013.

La sesión de clase fue llevada a cabo por uno de los investigadores y duró aproximadamente una 1 hora y 45 minutos. La sesión fue grabada en vídeo para su posterior análisis. Para comprobar el impacto que el protocolo mayéutico produjo en los estudiantes, una semana después se les pidió que volvieran a resolver la tarea.

Los datos obtenidos fueron codificados de manera cuantitativa (haciendo uso del esquema de clasificación de los patrones respuestas anteriormente realizado).

RESULTADOS

Resultados relativos al proceso autónomo

Los resultados de las preguntas que hacen referencia a la variable de tarea, mostrados en la tabla 1, indican que para todos los estudiantes la tarea es familiar y prácticamente la mayoría afirma entender lo que se les pide en ella. Aun así, para casi la mitad de ellos el enunciado es ambiguo porque los productos, cantidades ofertadas y precios son diferentes.

Casi la mitad de los alumnos cree que le faltan conocimientos matemáticos para afrontar la tarea. Además, algo más de la mitad consideran que la tarea es fácil antes de resolverla, aunque la mayoría de los que lo hacen (7/36) la resuelven insatisfactoriamente.

Tabla 1. Frecuencias relativas de las respuestas al cuestionario

La comprenden	Es ambigua	Es familiar	Faltan conocimiento	Fácil (antes)
34/36	16/36	36/37	17/36	20/36

Con respecto a las cuestiones relacionadas con la variable de persona, los resultados indican que al resolver la tarea 26/36de los sujetos se sienten regular o mal. Este sentimiento predomina entre aquellos estudiantes que tienen dificultad para resolver la tarea.

Una vez resuelta la mayoría afirma que se siente un poco mejor (la hayan resuelto correcta o incorrectamente) aunque casi nadie se siente 100% seguro de su respuesta. En los sujetos que no han sabido terminar la tarea predominan los sentimientos de impotencia.

En cuanto a la variable de estrategia, casi la mitad de los alumnos responden al perfil de *operatividad* (B.2.1.). Estos estudiantes están anclados a la información numérica superficial ofrecida en los folletos.

El número de botellas que desea comprar el consumidor no ha tenido influencia significativa en las respuestas observadas (B.2.2.).

Más de la quinta parte (8/36) tienen problemas al unitizar ya que comparan cantidades no comparables.

El resto de estudiantes se reparten del siguiente modo: 4 no terminan la tarea y 7 han empleado una estrategia eficiente (A.1.).

Resultados relativos al proceso guiado

El proceso guiado de discusión grupal ha permitido observar cambios, reflexiones y procesos de autorregulación por parte de los alumnos que pasamos a describir.

El grupo de estudiantes que ha resuelto la tarea comparando los descuentos como magnitudes sin relativizar ha ido cambiando su punto de vista a medida que el profesor mostraba las resoluciones que relativizaban y unitizaban. Se han dado cuenta, pues, de que su resolución no era correcta.

La mayoría de los estudiantes muestran en sus resoluciones estar anclados a los precios del anuncio y los consideran esenciales para resolver la tarea. Durante el proceso guiado muchos de ellos quedan convencidos de la conveniencia de asignar un precio inicial común en las tres ofertas para, a partir de él, realizar los cálculos. De este modo observan cómo, el caso de la oferta de la segunda unidad al 70% (que no tiene un precio concreto asociado) ya no constituye ningún problema. Así pues, en este momento observamos que se produce un "desanclaje" de los precios de los folletos. Algunos, muy pocos, tuvieron claro desde el inicio que el precio es irrelevante para dar respuesta a la pregunta de la tarea.

En cuanto a los alumnos que tenían problemas al unitizar (A.2.1.), tomaron consciencia inmediatamente de su fallo al ver una resolución en la que se unitizaba de manera correcta.

Por medio de la discusión en torno a la estrategia A.2.2., algunos estudiantes llegaron a la conclusión de que para poder comparar hay que tomar un múltiplo común de las cantidades ofertadas, pero otros alegan que el consumidor puede elegir qué cantidad comprar y que, dependiendo de ello, será más conveniente una u otra oferta. Los que alegan esto, aunque son un grupo reducido de sujetos, defienden con energía su argumento, que parece convencer a algunos de sus compañeros.

La sesión continúa con la presentación de las estrategias eficientes (A.1.). De la discusión asociada inferimos que, aunque la gran mayoría de los estudiantes admiten su eficiencia y le otorgan una nota alta, existe una creencia extendida (condicionada por el argumento que ha surgido anteriormente) de que esto no contesta a la pregunta.

Para ellos, el mejor descuento no es el relativamente mayor, sino el que más convenga al consumidor, por lo que está condicionado por el número de productos que desee llevarse.

En este momento, el profesor decide mostrar una nueva tarea. Consiste en la imagen de una caja con 6 CD que cuesta 39 euros y otra con 7 CD que cuesta 40, y pregunta cuál conviene comprar. Ante este ejemplo, la totalidad de la clase está de acuerdo en que hay que calcular el precio unitario para poder comparar. En esta tarea nadie considera que es necesario tener en cuenta el número de productos que nos llevamos.

A la vista de esto, el profesor pregunta por qué ahora ya no es relevante el número de unidades y antes sí (en la tarea del descuento). Los estudiantes, incapaces de proporcionar una respuesta, se quedaron pensando, y aquí terminó el proceso guiado por el profesor.

Posteriormente, al cabo de una semana, se pidió al mismo grupo de alumnos que volvieran a resolver la tarea del descuento para averiguar el impacto de la sesión mayéutica.

Los resultados obtenidos de esta segunda resolución muestran un incremento significativo en el número de estudiantes que descartan de inicio la oferta de la segunda unidad a mitad de precio, porque ahora son conscientes de que el "70% en la segunda" y "segunda unidad a mitad de precio" son directamente comparables.

Creemos que esta conducta es un producto de la sesión mayéutica, ya que anteriormente no apareció en ningún caso.

La mitad de los estudiantes que tenían problemas para unitizar y empleaban la estrategia A.2.1., ahora resuelven de manera eficiente, superando así sus obstáculos iniciales.

Se observa, además, un "desanclaje" generalizado de los precios del anuncio. Ahora prácticamente no aparece la estrategia B.2.1. Los estudiantes han comprendido que no son necesarios para resolver la tarea.

Sorprendentemente, ha aumentado ligeramente el número de estudiantes que consideran que el número de botellas que desea llevarse el consumidor es determinante para contestar a la tarea.

CONCLUSIONES

Los resultados muestran que el protocolo de enseñanza ha ayudado a que los estudiantes se den cuenta de la relatividad del descuento, superando el anclaje inicial que tenían hacia los precios dados en el anuncio y el problema que esto les suponía para manejar el caso del 70%, comprendiendo que se puede responder directamente sin usar precios.

También se ha logrado que una mejora significativa en los problemas de unitización. Ahora los estudiantes unitizan el segundo y tercer descuento al 35% y al 25%por unidad y de este modo comparan cantidades comparables.

Sin embargo, aunque el conjunto de estudiantes ha aceptado de manera general la efectividad de las respuestas mostradas en el momento de re-construcción, en algunos de ellos persiste la idea de que por encima de todo, la calidad del descuento depende de las preferencias del consumidor

Como se puede observar es muy débil el dominio que tienen los estudiantes de los conceptos de razón, en particular de una de sus características fundamentales, la invariabilidad de la razón, que es lo que explica que todas las estrategias eficientes observadas son equivalentes.

REFERENCIAS

Ben-Chaim, D., Keret, B. S. e Ilany, Y. (2012). *Ratio and Proportion. Research and Teaching in Mathematics Teachers' Education (Pre- and In-Service Mathematics Teachers of Elementary and Middle School Classes)*. Rotterdam: Sense Publishers.

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 5*(3), 705–730.

Fernández, A., Figueras, O., Gómez, B., Monzó, O., y Puig, L. (2009). *Competencias en razón y proporción en la escuela primaria*. Valencia: Universitat de València.

Flavell, J. H. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. En L. B. Resnick (Ed.). The nature of intelligence (pp. 231–235). Hillsdale, N.J.: Lawrence ErlbaumAssociates.

Freudhental, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados*. Traducción Luis Puig. México: Cinvestav I.P.N. Departamento de Matemática Educativa.

Gómez, B.; Monje, J.; Pérez-Tyteca, P. y Rigo, M. (2013). Performance in ratio realistic discount task. *CERME 8 - Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Pre-congress publication. Papers in the website of the congress: Research Report. Working Group 2 Arithmetic and number systems. ERME (European Society for Research in Mathematics Education).* Middle East Technical University. Manavgat-side/Antalya. Turquía.

Lamon, S. (1996) Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the learning of mathematics* (pp. 89-120). Albany, N. Y.: Sunny Press.

Lamon, S.J. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. In F.K. Lester, Jr. (Ed.), *Second*

Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 629-667). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41–69). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. K., y Kroll, D. L. (1990). Teaching students to be reflective: A study of two grade seven classes. In G. Booker, P. Cobb & T. N. Mendicuti (Eds.), *Proceedings fourteenth PME Conference for the Psychology of Mathematics Education, with the North American Chapter twelfth PME-NA Conference* (Vol. 1, pp. 151–158). México: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Rigo, M. (2011). La Mayéutica y su aplicación a un cuestionario dirigido a docentes. En M. Rodríguez, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 523–532). Ciudad Real, España: SEIEM, Universidad de Castilla-La Mancha.

Rigo, M., y Gómez, B. (2012). "The maieutical doggy": A workshop for teachers. In T.Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 11-18). Taipei, Taiwan: PME.

Rigo, M., Páez, D., y Gómez, B. (2010). Prácticas metacognitivas que el profesor de nivel básico promueve en sus clases ordinarias de matemáticas. Un marco interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*, *28*(3), 405–416.

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). New Jersey: Erlbaum.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334–370). New York: MacMillan.

[xxvii]Este trabajo se ha realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2012-35638

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: ENFOQUES DEL MKT Y DEL MTSK[xxviii]

Knowledge of the Mathematics' Teacher: Approaches of MKT and MTSK

Miguel A. Montes, Luis C. Contreras y José Carrillo
Universidad de Huelva

Resumen

Se presenta en este documento el análisis de un episodio real, bajo los modelos de Conocimiento Matemático para la Enseñanza (*MKT*) *propuesto por Ball, Thames, y Phelps* (*2008*)*, y Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (*MTSK*)*, propuesto por Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán (2013). Este ejemplo, contextualizado en el tema de representación de funciones en Bachillerato, permitirá mostrar las diferencias entre MKT y MTSK, a través de la comparación de ambos análisis.*

Palabras Clave: MKT, MTSK, conocimiento profesional

Abstract

We present in this paper, a real class episode analyzed through MKT model proposed by Ball, Thames, & Phelps (2008) and through MTSK model proposed by Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán (2013). This example, contextualized in functions representation in a pre-university course, will allow us to show the differences between MKT and MTSK, through the comparison between both analysis.

Keywords: MKT, MTSK, Professional Knowledge

CONTEXTUALIZACIÓN TEÓRICA

El conocimiento para la enseñanza es un foco de atención en auge para la comunidad de investigadores en didáctica de las matemáticas. En Ball, Thames y Phelps (2008), encontramos una evolución de los subdominios descritos por Shulman (1986), el conocimiento de la materia (*SMK*) y el conocimiento didáctico del contenido (*PCK*), en su propuesta de modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT, de sus siglas en inglés [Ver nota 1]), en el que define seis subdominios diferentes, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), Conocimiento del Horizonte (HCK), Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y Conocimiento del Currículo (KCC); los tres primeros dentro del SMK de Shulman, y los otros tres dentro de su PCK.

La idea de conocimiento especializado del contenido está reconocida como una de las grandes aportaciones del modelo MKT, tanto por sus propios autores, como por la comunidad internacional (e. g. Flores, Escudero, y Carrillo, 2013; Carreño, y Climent, 2009; Hill, Ball, y Schilling, 2008). El conocimiento especializado del contenido es entendido como aquel que es exclusivo del profesor de matemáticas para desarrollar su profesión, frente al conocimiento común del contenido, aquel que puede poseer cualquier usuario de la matemática en su labor profesional, como pudiera ser un

Montes, M. A., Contreras, L. C. y Carrillo., J. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 403-410). Bilbao: SEIEM.

ingeniero, físico, o biólogo. Sin embargo, este subdominio ha sido objeto de discusión entre los propios investigadores en educación matemática, debido a los problemas de delimitación con el KCS o el CCK (Flores, *et al*., 2013), o incluso con el HCK (Jakobsen, Thames y Ribeiro, 2013).

Recientemente, el grupo de investigación de la Universidad de Huelva ha propuesto un modelo (en construcción) de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK), basado en la idea de que la especialización del conocimiento del profesor de matemáticas deriva de su profesión, es decir, el conocimiento que posee será especializado en tanto le sea necesario para desarrollar su labor como profesor de matemáticas. Este modelo, generado tras una redefinición de la noción de especialización, y un enfoque en el que la matemática está muy presente en toda su génesis, se aplicará en esta comunicación al análisis de episodios de clase. Pensando en las diferencias y similitudes que pudieran encontrarse entre los modelos, es necesario aclarar que ambos consideran el mismo objeto de estudio, el conocimiento que necesita el profesor de matemáticas y que es propio de su profesión.

El MTSK conserva la separación entre PCK y SMK, aunque este último es renombrado como MK (del inglés, Conocimiento Matemático), para ser coherentes con la idea de ser un modelo elaborado con la vista exclusivamente puesta en el profesor de matemáticas. Este modelo consta de seis subdominios (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013), tres referentes al MK: conocimiento de los temas (KoT), conocimiento de la estructura matemática (KSM) y conocimiento de la práctica de la matemática (KPM); y otros tres referentes al PCK: conocimiento de las características de aprendizaje de matemáticas (KFLM), conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) y conocimiento de los estándares de aprendizaje de matemáticas (KMLS). En la Figura 1 se muestra la representación gráfica usada para mostrar el modelo:

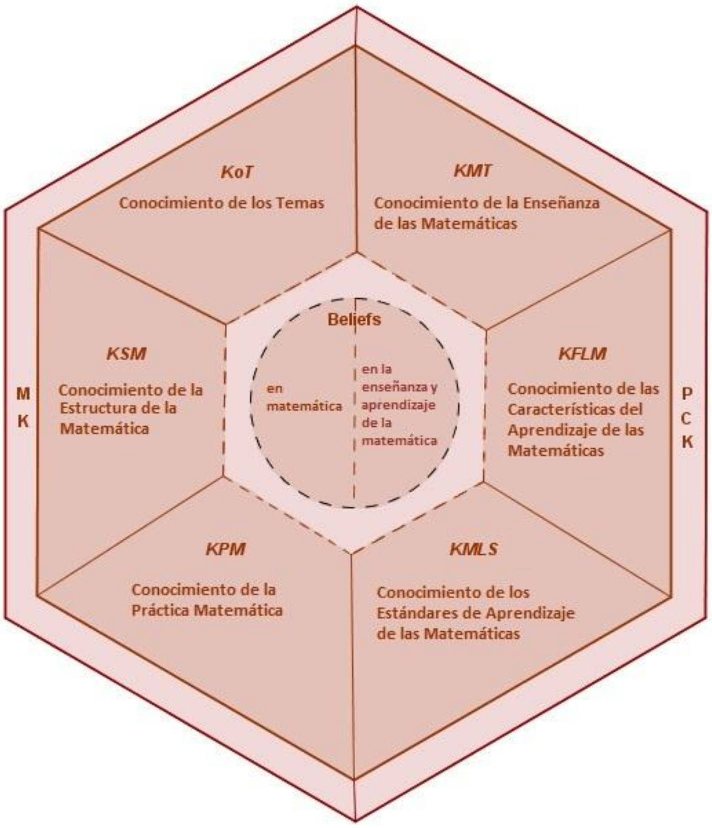


Figura 1: Subdominios del MTSK.

Cabe destacar que en la representación aparecen las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma como elemento que permite entender de una forma más completa el conocimiento del profesor.

El conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK)

Pasando a describir sucintamente los subdominios, abordaremos primero los relativos al conocimiento matemático y posteriormente los relativos al conocimiento didáctico del contenido:
Conocimiento de los temas (KoT): El contenido de este subdominio incluye aspectos fenomenológicos, significados de conceptos, o ejemplos específicos que caractericen aspectos concretos del tópico abordado, además de referirse al contenido disciplinar de las matemáticas, aquel que figura en manuales y textos matemáticos.

Conocimiento de la estructura matemática (KSM): Al considerar el conocimiento matemático del profesor, entendemos que debe incluir no solo los conceptos como elementos aislados, sino integrados en un sistema de conexiones, que permitirá al profesor comprender ciertos conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y desarrollar ciertos conceptos elementales mediante el tratamiento a través de herramientas avanzadas.

Conocimiento de la práctica de la matemática (KPM): Para completar el conocimiento matemático, este subdominio incluye aspectos ligados a saber cómo se piensa en matemática, como por ejemplo, conocimiento relativo a diferentes formas de definir, argumentar o demostrar en matemáticas, , incluyendo también el conocimiento de la sintaxis matemática.

Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT): La acción de enseñar puede involucrar conocimiento de cómo esa enseñanza puede o debe ser llevada a cabo, así, conocer distintas estrategias de enseñanza que permitan al profesor fomentar un desarrollo de las capacidades matemáticas procedimentales o conceptuales, es un tipo de conocimiento que se incluye en este subdominio. De igual forma, conocer recursos que permitan al profesor hacer que sus alumnos descubran mediante la manipulación ciertos conceptos matemáticos, o ejemplos que consigan despertar en sus alumnos la intuición respecto de algunos conceptos, forma parte de este subdominio.

Conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM): Saber cómo aprenden los alumnos el contenido matemático es un conocimiento que entendemos que cualquier profesor debería poseer, contemplándose en este subdominio aspectos que abarcan el conocimiento de las características del proceso de comprensión de los estudiantes de los distintos contenidos, los errores, dificultades, y obstáculos asociados a cada concepto, o el lenguaje habitualmente usado por los estudiantes en relación con el concepto tratado en clase.

Conocimiento de los estándares [xxix] de aprendizaje en matemáticas (KMLS): El profesor de matemáticas debe conocer el currículo institucional para saber qué se prescribe en cada etapa. Este conocimiento puede complementarse con información procedente de las producciones de las distintas investigaciones en el área de didáctica de las matemáticas, o la opinión de profesores expertos, respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa.

Nuestros precedentes más destacados han sido Shulman y Ball. Muchos otros investigadores han reflexionado sobre los dominios o componentes del conocimiento profesional, en particular del profesor de matemáticas. Entre ellos, podemos subrayar la aportación del grupo COACTIV (Krauss, Brunner, Kunter, Basumert, Blum, Jordan y Neubrand, 2004). Este grupo no pretende aportar en la caracterización de los subdominios del conocimiento (incluso solo problematiza el dominio del conocimiento didáctico del contenido, no el del conocimiento matemático), sino profundizar en la relación entre la pericia profesional (entendiendo profesor experto como profesor con un buen conocimiento) y los logros de aprendizaje, lo que nos será de gran ayuda en el desarrollo futuro de nuestro modelo. Precisamente, las investigaciones sobre el profesor experto (Kaiser y Li, 2011) arrojarán también luz en este sentido.

Comparando los modelos a través del análisis de un episodio de clase

A continuación mostramos un ejemplo que será analizado utilizando los modelos MKT y MTSK. Su posterior análisis sacará a la luz algunas de las diferencias más relevantes entre ambos modelos en cuanto a su utilidad analítica.

En una sesión de 2º de Bachillerato, durante un ejercicio de representación de funciones, al calcular la derivada segunda de cierta función en la pizarra, la alumna (Al) obtuvo la siguiente expresión, sobre la que debía calcular los valores de x para los que se anula, y de esta forma hallar los puntos de inflexión:

$$\frac{-\sqrt{(x^2+1)^3}+\dfrac{(x-1)-3(x^2+1)^2}{\sqrt{(x^2+1)^3}}}{(x^2+1)^3}$$

Figura 2: Expresión de la derivada segunda obtenida por la alumna (Al)

Mientras ella se quedó estática mirando la pizarra, el profesor (P) comprobó la corrección de la expresión y le preguntó:

P: ¿Sabes seguir?

Al: No, es complicado hacer tantas cuentas
P: ¿Sabes resolver $\frac{3+\frac{1}{4}}{7}$ *?*
[La alumna mira al profesor sorprendida] Al: ¿En serio?
P: ¿No es lo mismo?
Al preguntarle al profesor sobre el episodio al finalizar la clase, su comentario fue:
"Siempre lo pongo, para que se den cuenta de que todos estos contenidos son como números"

ANÁLISIS DESDE EL MKT

Teniendo en cuenta las definiciones y especialmente los ejemplos aportados por Ball *et al.* (2008), podemos encontrar en este episodio evidencia de varios subdominios, y la necesidad de conocimiento relativo a los mismos.

Entendemos que el profesor conoce (o necesita conocer) el contenido de la sesión que imparte, relativo al álgebra de derivadas de forma específica en este episodio, y a la representación de funciones en el conjunto de la sesión, la posibilidad de sustituir la variable x por un valor concreto, así como los contenidos relativos a la operativa con fracciones, siendo este conocimiento *común* según lo definido en Ball et al. (2008), ya que este tipo de contenidos deben ser conocidos por una persona instruida en matemáticas. El uso de analogías como elemento de transmisión de conocimiento, como ocurre en este caso con la estructura fraccionaria de la fórmula, solo tiene sentido para un profesor, así como el conocimiento que le permite desarrollarla, que responde a un conocimiento de matemáticas que se usa para elaborar un ejemplo que recalque un aspecto específico del contenido. De igual forma, *conocer potentes analogías para reflejar un contenido matemático* es un conocimiento que implica la transformación del contenido (desde argumentos de la propia disciplina) para hacerlo comprensible a otros, y por tanto es especializado (aunque saber que la analogía propuesta podrá solucionar la situación no sería de este subdominio, sino del KCT). Así, "Reconocer la dificultad matemática inherente a la situación es uno de los ejemplos que en Ball *et al*. (2008) se asigna al conocimiento especializado del contenido, en tanto en cuanto que sólo un profesor de matemáticas necesitará este tipo de conocimiento, aunque prever su consecuente dificultad de comprensión, aspecto más evidente de la última frase del profesor, podría situarse fuera de este subdominio (estaría dentro del KCS). Como vemos, esta asignación genera problemas de indefinición en los subdominios del MKT (Flores *et al*, 2013; Montes, Aguilar, Carrillo, & Muñoz-Catalán, 2013), ya que el conocimiento puesto en juego en una acción, como pueda ser el de evaluar un error o dificultad de un estudiante, puede requerir conocimiento de varias naturalezas, por ejemplo, conocer el motivo matemático por el que ese error tiene lugar, o en este caso el objeto matemático sobre el que surge la dificultad, y por otra parte, el proceso cognitivo que lleva al alumno a toparse con la dificultad, en este caso, como piensa la alumna sobre la expresión para no ser capaz de relacionar la operativa de fracciones con la de la fórmula abordada.

Podría argumentarse que el profesor muestra en este episodio conocimiento relativo al horizonte, aunque sin embargo, al no existir relación curricular directa entre el contenido de fracciones y derivadas, no podríamos usar la definición de Ball *et al.* (2008) para afirmar la existencia de dicho subdominio. Aun excluyendo el currículo de la definición del HCK (Jakobsen, *et al*., 2013):

> *El Conocimiento del Horizonte Matemático* (*HCK*) *es una orientación hacia la disciplina (o disciplinas) y familiaridad con la misma que contribuyen a la enseñanza del contenido escolar abordado, proveyendo a los profesores de sensibilidad sobre como el contenido que está siendo abordado está situado en el territorio disciplinar más amplio y conectado con el mismo.*

El profesor no usa conocimiento relativo a la noción de derivada, ni realiza ningún tipo de conexión entre derivada y fracción, sino que interpreta la dificultad de la alumna, la asocia a un obstáculo en la operatividad de las derivadas, y la trabaja con un ejemplo de un contenido distinto, existiendo conexión (interconceptual, bajo el criterio de Fernández, Figueiras, Deulofeu, & Martínez, 2010) entre los tópicos abordados, pero ha de tenerse en cuenta que la definición de Jakobsen *et al.* (2013) del subdominio insta a una compresión del mismo orientada hacia los contenidos posteriores a los abordados en el instante observado, hecho que difiere de lo que sucede en este caso.

ANÁLISIS DESDE EL MTSK

Desde la perspectiva que nos aporta este modelo, y teniendo en cuenta las ideas vertidas en Carrillo *et al.* (2013) sobre los distintos subdominios, y en Montes *et al.* (2013) sobre el contenido de los subdominios relativos al MK, pasamos a desarrollar un análisis del episodio atendiendo a las distintas dimensiones. Creemos necesario remarcar que todo el conocimiento que el profesor pone en juego en el ejemplo es, desde esta perspectiva, especializado, por ser propio de su profesión.

Podemos partir de que el profesor, al igual que en el anterior caso sucedía en el CCK, conoce el contenido de la sesión que imparte, especialmente en lo relativo a derivación, representación de funciones y álgebra de derivadas, así como en este ejemplo específico, álgebra de fracciones. Igualmente, el ejemplo usado es una muestra de conocimiento encuadrado en el subdominio del conocimiento de los temas (KoT), ya que, considerando el tópico como álgebra de derivadas, la operativa forma parte del mismo, y conocer un ejemplo *potente* para mostrar que la operativa de estas expresiones es idéntica a la de las fracciones muestra una comprensión profunda del funcionamiento del tópico. Si ponemos la atención en una compresión estructural de las matemáticas, recogida en el KSM, podemos afirmar que el profesor dirige el trabajo de un contenido como el álgebra de derivadas y expresiones algebraicas complejas a través del uso de fracciones numéricas. Este conocimiento permite al profesor interpretar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental (en el sentido de Klein, 1908). En este caso, el profesor trabaja la expresión *avanzada* de derivadas, constituida por variables simbólicas, potencias, y radicales, desde una perspectiva *elemental* constituida por números. En ese sentido, muestra un conocimiento capaz de abstraer la estructura común a dos situaciones algebraicamente relacionadas.

El conocimiento perteneciente a los subdominios del KMT y el KFLM fue detectado por los investigadores al reflexionar, no ya sobre el ejemplo en sí, sino sobre la acción del profesor de usar el ejemplo para ayudar a la alumna a seguir su razonamiento, ya que se entiende que el profesor observó la necesidad de la alumna, y la abordó conociendo su problema. Dicho conocimiento del problema de la alumna tiene, al menos, tres componentes: identificar la existencia de dificultad de la alumna para continuar la resolución de la tarea, saber qué podía hacer para ayudarla a continuar y saber que la dificultad de la alumna estriba en falta de identificación de la expresión como fracción. La primera de las componentes pertenece a la interpretación del lenguaje verbal y corporal de la alumna, que podríamos englobar dentro de un conocimiento pedagógico a un nivel más general, que no se contempla en este modelo; la segunda pertenece al KMT, aunque el conocimiento matemático para abordar la situación pertenece al dominio matemático, en los subdominios KoT y KSM, como se comentó anteriormente; y la última de las tres componentes pertenece al KFLM.

CONCLUSIONES

Este episodio nos da la posibilidad de hacer uso de ambos modelos, MKT y MTSK, y nos permite observar algunas diferencias en su uso. Respecto al MKT, encontramos problemas de delimitación en los subdominios. Pensamos que aporta más riqueza la determinación de la naturaleza de cada uno de los conocimientos que discutir si forma o no parte del SCK, dado que, por un lado, pueden considerase como especializados los otros conocimientos que muestra el profesor, y por otro, se hace inviable caracterizar un subdominio exclusivo a la labor de enseñar matemáticas, definido por eliminación del conocimiento propio de otras profesiones.

Pensemos en el conocimiento matemático necesario para identificar la dificultad matemática inherente en la situación planteada. En nuestra opinión el KoT lo acoge de forma inequívoca, resolviendo, desde el MTSK, el problema de solapamiento existente en el MKT en relación con los subdominios KCS, KCT y SCK. Algo similar ocurre con el conocimiento sobre analogías potentes. Pasando ahora al análisis de los subdominios contenidos en el PCK, podemos afirmar que el conocimiento para ayudar a la alumna a continuar, una vez identificado el problema que la hace parar, es también propio del trabajo de un profesor de matemáticas y es mucho más que un recurso o una estrategia. Ubicaríamos este conocimiento dentro del KMT, o en el KCT si usáramos el modelo MKT (las diferencias entre estos subdominios no han sido objeto de estudio en el análisis presentado). Otra componente del conocimiento matemático que puede generar duda respecto a su presencia en el episodio, es el conocimiento del horizonte. Lo que no se ha podido concebir desde el HCK es un conocimiento de la estructura matemática (KSM) que permite al profesor interpretar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental, poniéndose de relieve la potencialidad del KSM frente al HCK.

Hemos mostrado la aplicación analítica del MTSK. Sin embargo, su utilidad va más allá del refinamiento en el análisis del conocimiento especializado que posee un profesor de matemáticas. En investigaciones futuras pretendemos poner de relieve su potencial a la hora de elaborar propuestas formativas en los contextos de formación inicial y continua del profesorado de matemáticas de cualquier nivel educativo. Esto será posible a medida que nuestras investigaciones sobre la práctica de profesores en diferentes contenidos matemáticos y niveles educativos nos vayan permitiendo identificar situaciones en las que estos subdominios se evidencian, así como las categorías e indicadores referidos a un contenido determinado que permitan una mayor comprensión de cada subdominio.

Notas

1. Todos los acrónimos responden a las siglas anglófonas

Referencias

Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59 (5), 389-407.

Krauss, S.; Brunner, M.; Kunter, M.; Baumert, J.; Blum, W.; Jordan, A.; Neubrand, M. (2004). COACTIV: Professionswissen von Lehrkräften, kognitiv aktivierender Mathematikunter- richt und die Entwicklung von mathematischer Kompetenz. En J. Doll; M. Prenzel (Eds.), *Bildungsqualität von Schule: Lehrerprofessionalisierung, Unterrichtsentwicklung und Schülerförderung als Strategien der Qualitätsverbesserung* (pp 31-53). Münster: Wax- mann.

Carreño, E., & Climent, N. (2009). Polígonos: conocimiento especializado del contenido de estudiantes para profesor de matemáticas. En M. J. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII*. 187-196. Santander: SEIEM.

Carreño, E., Rojas, N., Montes, M.A., & Flores, P. (2013). *Mathematic Teacher's Specialised Knowledge. Reflections based on descriptors of knowledge.* Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). *Mathematics teacher specialized knowledge.* Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).

Flores, E., Escudero, D.I., & Carrillo, J. (2013). *A theoretical review of specialised content Knowledge*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).

Hill, H., Ball, D. L. & Schilling, S. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. Journal for Research *in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Jakobsen, A., Thames, M. H., & Ribeiro, C.M., (2013). *Delineating issues related to horizon content knowledge for mathematic teaching*. Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).

Kaiser, G., & Li, Y. (2011). Reflections and Future Prospects. In Y. Li & G. Kaiser (Eds), *Expertise in Mathematics Instruction. An International Perspective* (pp. 343-353). New York: Springer.

Klein, F. (1908). *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Ed. Leipzig B. G. Teubner.

Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L., & Deulofeu, J. (2011). El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco, M. Palarea (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 429-438). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Montes, M.A., Aguilar, A., Carrillo, J., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). *MTSK: From common and horizon knowledge to knowledge of topics and structures.* Proceedings of Eighth ERME Congress. Antalya, Turkey (en prensa).

Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

[xxviii] Los autores son miembros del proyecto de investigación "Conocimiento Matemático para la enseñanza respecto de la resolución de problemas y el razonamiento" (EDU2009-09789EDUC), financiado por el Ministerio de Ciencia e Innovación en España.

[xxix] Utilizamos el término "estándares", evocando la traducción que se hizo desde la SAEM Thales, en el año 2000, de la publicación homónima del NCTM en 1989, con la intención de poner de manifiesto que el subdominio KMLS es más amplio que el propio conocimiento curricular, de carácter institucional y local, incluyendo aportaciones internacionales acerca de lo que debe componer el contenido de la educación matemática de un ciudadano, procedentes de la propia investigación en educación matemática y de instituciones y asociaciones profesionales.

SIGNIFICADOS PERSONALES ACERCA DE UNA DEMOSTRACIÓN EN TEORÍA DE NÚMEROS CON MATHEMATICA

Personal meanings of a proof in Numbers Theory with Mathematica

Consuelo Ordóñez, Lourdes Ordóñez[b] y Ángel Contreras[a]

[a]Universidad de Jaén, [b]IES Jabalcuz de Jaén

Resumen

Esta comunicación muestra una investigación didáctica acerca de la enseñanza y aprendizaje de una demostración que forma parte del temario de la asignatura de Matemática Discreta. Analizamos la influencia de un software científico como Mathematica, en el estudio de esta demostración, utilizando el marco teórico del enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática. Después de un análisis a priori de dos de las prácticas propuestas, se estudian las respuestas de cuestionarios sobre una muestra formada por 132 alumnos de la Universidad de Jaén que, debido a los estudios que cursan, tienen una gran habilidad para la utilización de recursos informáticos; se clasifican y cuantifican los conflictos semióticos manifestados por dichos estudiantes lo que nos permite caracterizar sus significados personales y determinar fenómenos didácticos que se producen.

Palabras clave: *demostración, Teoría de Números, Enfoque Ontosemiótico, Mathematica*

Abstract

This paper shows a didactic research on the teaching and learning of a proof which is included in Discrete Mathematics subject. We analyse a scientific software influence as Mathematica, along this proof study by using the theoretical framework of the onto-semiotic approach to Mathematics Education. After a priori analysis about two teaching practices proposed, we study some questionnaires responses by132 university students from Jaén. They have a great ability to use computer resources due to their degree. The semiotic conflicts showed by students are classified and quantified, so that it allows us to characterize their personal meanings and didactics phenomena appeared.

Keywords: *proof, Numbers Theory, onto-semiotic approach, Mathematica.*

Ordóñez, C., Ordóñez L. y Contreras, A. (2013). Significados personales acerca de una demostración en Teoría de Números con Mathematica. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 411-420). Bilbao: SEIEM

INTRODUCCIÓN

La demostración es un tema transversal en todas las etapas de la enseñanza de las matemáticas y es fundamental en el desarrollo del razonamiento lógico deductivo. Para los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en la asignatura de Matemática Discreta, de primer curso, es importante el uso de recursos informáticos. Así, la enseñanza y aprendizaje de la demostración adquiere unas características especiales por la influencia de las nuevas tecnologías y del lenguaje algorítmico propio de la Informática.

La investigación didáctica acerca de la demostración tiene numerosas aportaciones sin embargo, ninguna se ha centrado en estudiarlo en alumnos para los que el ordenador es su hábitat y que tienen desarrollada una gran habilidad para trabajar con dicho recurso.

Esta investigación se enmarca dentro de una más amplia cuyo objetivo general es describir y analizar la influencia del software Mathematica en la enseñanza y aprendizaje de la demostración en Teoría de Números (García, Ordóñez y Ruiz, 2006) de la asignatura de Matemática Discreta para los estudiantes del Grado de Ingeniería Informática, identificando fenómenos didácticos y utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico de la instrucción matemática (EOS).

Este trabajo describe una investigación dirigida al análisis del aprendizaje de los estudiantes del Grado en Ingeniería Informática en un tema clave de la demostración en Aritmética modular, como es el cálculo de inversos, caracterizando las dificultades y conflictos semióticos encontrados en una práctica informática, realizada en el aula, con el software Mathematica.

ANTECEDENTES

Existen múltiples investigaciones didácticas relacionadas con problemas de la demostración, que muestran que este campo ha despertado interés de investigadores en Didáctica de la Matemática, en algunas de ellas aplicando las herramientas que aporta el Enfoque Ontosemiótico de la Instrucción Matemática.

Balacheff (1991) ha mostrado que los alumnos “tienen cierta conciencia de la necesidad de demostración y cierta capacidad lógica” (p. 176) y aun así tienen dificultades con la demostración.

En Recio (2000), utilizando el EOS, se describe una investigación, centrada en el análisis epistemológico y didáctico sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática donde se concluye, que los estudiantes universitarios tienen importantes dificultades en el desarrollo de la demostración matemática de carácter deductivo.Y además, el estudio de Recio y Godino (2001) indica que el rendimiento en actividades de demostración de gran parte de los alumnos universitarios de primer curso es decepcionantemente bajo.

Dubinsky y Yiparaki (2000) han detectado que los alumnos universitarios de varios niveles, incluyendo algunos alumnos avanzados matriculados en asignaturas de álgebra abstracta, tienen importantes dificultades en temas relativos a la demostración matemática.

Harel y Sowder (2007), respecto de las "nuevas" tecnologías y la demostración, se preguntan “¿Podrían estas herramientas privar a los alumnos de la oportunidad de desarrollar las habilidades de manipulación algebraica necesarias para el desarrollo de una noción avanzada de la demostración, o, por el contrario, proporcionarles las mismas?” (p. 818).

Por otro lado, respecto la enseñanza y aprendizaje con el recurso tecnológico Mathematica para estudiantes a nivel universitarios, existen distintos trabajos, algunos de ellos publicados por medio de la SEIEM, tales como Contreras, et al. (2005) o Contreras y Ortega (2009).

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Las investigaciones didácticas de Harel y Sowder (2007) señalan la necesidad del uso de las nuevas tecnologías, especialmente en educación, aunque dejan abierta la pregunta acerca de la influencia de éstas en el aprendizaje o desarrollo de una noción avanzada de demostración matemática.

Así, nos planteamos ¿qué impacto tiene el uso de las tecnologías en el aprendizaje de la demostración matemática para alumnos del Grado en Ingeniería Informática en Teoría de Números?; ¿qué tipos de conflictos semióticos muestran y cuales permite superar el uso del programa Mathematica?

El objetivo de esta investigación es extraer y analizar los significados personales construidos por los estudiantes universitarios de primer curso del Grado en Ingeniería Informática, acerca de un esquema de demostración[xxx]relativo al cálculo de inversos de clases de restos, en una práctica con Mathematica, utilizando las herramientas del enfoque onsemiótico de la cognición matemática.

Para ello, en el laboratorio de prácticas informáticas, se explica una proposición que caracteriza la existencia de inversos en los anillos de enteros módulo n. La demostración de dicha proposición es constructiva y deduce quien es el inverso en Z_n. Se utiliza el software Mathematica para implementar un programa que permita realizar los cálculos numéricos, muy tediosos para los alumnos, y que van a facilitar el cálculo del inverso permitiendo que el alumno se centre en lo nuclear de esta demostración.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

El enfoque ontosemiótico de la instrucción matemática presenta unas características metodológicas propias que marcarán esta investigación (Godino, 2002; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2007; y Font, Planas y Godino, 2010).En este trabajo se estudian los significados personales de los alumnos, entendido en este marco teórico, como "el sistema de prácticas personales de una persona p para resolver el campo de problemas del que emerge el objeto en un momento dado" (Godino y Batanero, 1994p. 341). Una forma de caracterizarlos será analizar las dificultades y errores en términos de *conflictos semióticos*que, según Godino (2002), se definen como "toda disparidad o desajuste entre los significados atribuidos a una misma expresión por dos sujetos (personas o instituciones) en interacción comunicativa y pueden explicar las dificultades y limitaciones de los aprendizajes y las enseñanzas implementadas." (p. 258)

Así, se trata de una investigación de caracterización de significados. Es también una investigación de tipo interaccional al observar cómo influye un determinado programa de cálculo científico y simbólico como es Mathematica, en la enseñanza y aprendizaje de la demostración matemática.

Para nuestra investigación, hemos escogido los grupos de prácticas que corresponden a la asignatura de Matemática Discreta del Grado en Ingeniería Informática (cinco, cada uno de ellos con un número máximo de 40 alumnos, y cada uno de ellos con 2 horas semanales de laboratorio informático durante 15 semanas). Por tanto, la muestra consta de 132 estudiantes, todos los asistentes en este día al laboratorio, de los 191 que aparecen matriculados, lo que supone un 70 % de la población. La exploración se realizó en el mes de diciembre, al final del primer cuatrimestre del curso 2012-13.

Las cuestiones han sido elaboradas por los investigadores y fueron sometidas a juicio de expertos, profesores que componen el área de Álgebra de la Universidad de Jaén y que imparten docencia en esta materia o la han impartido en otros cursos, y son autores de distintas prácticas informáticas y manuales que se utilizan en asignaturas del Grado en Ingeniería Informática.

Para la evaluación de los significados personales, se analizarán las respuestas de los estudiantes a los dos primeros ejercicios de una práctica informática. La corrección y codificación de las respuestas de los estudiantes se ha hecho siguiendo el método de otras investigaciones (Ordóñez, 2011), utilizando el SPSS, lo que ha hecho posible clasificar y cuantificar variables y así obtener regularidades a fin de establecer y fenómenos didácticos en la enseñanza-aprendizaje en la demostración de la proposición relativa al cálculo de inversos en Z_n.

ANÁLISIS DIDÁCTICO

La práctica a analizar consiste en el cálculo de inversos utilizando el programa Mathematica. En las dos horas de laboratorio, comenzaremos explicando la parte teórica matemática, que posteriormente, se implementa en el ordenador. El alumno dispone de un manual donde están estas explicaciones y que puede utilizar para realizar los ejercicios.

En primer lugar, se recuerda el concepto de inverso y la proposición que caracteriza los elementos que lo admiten en Z_n, como aquellos cuyo máximo común divisor con n sea 1. La demostración nos permite construir dicho inverso, a partir del cálculo de la Identidad de Bézout.

Se expone en el aula también un ejemplo de todo lo expuesto y, terminadas las explicaciones, se proponen 4 ejercicios, de los que analizaremos dos en este trabajo. Concretamente

Situación 1. Calcular, si es posible, el inverso de tu DNI en Z_{17}

La tabla 1 recoge la resolución de esta situación y las distintas fases necesarias para su resolución. Como DNI, hemos tomado en este ejemplo 25000000, aunque cada alumno tomará como primer dato su propio DNI, siendo de esta forma prácticas personalizadas para que no haya interacción entre los distintos alumnos aunque con las mismas características didácticas.

Tabla 7. Fases para la resolución de la situación 1

Resolución del experto	Fases de la resolución
	(F0) Selección de los datos para el programa
In[]:= n1=25000000; n2=17;	(F1) Introducimos los datos en el programa que calcula el mcd y la Identidad de Bézout
	(F2) Ejecutamos el programa accionando INTRO
Out[]= m.c.d.{17 , 25000000}=1 m.c.m.{17, 25000000}=425000000 Identidad de Bézout: 1= 25000000·(-4)+17 ·(5882353).	(F3) Obtenemos la salida de datos del programa
Como m.c.d.{17, 25000000}=1, entonces por la proposición, afirmamos que existe el inverso de 25000000 en Z_{17}	(F4) Aplicando la proposición y según el mcd: (F4.1) Si es 1, existe el inverso, (F4.2) Si es distinto de 1,el inverso no existe y el ejercicio termina, no se puede calcular.
El inverso de 25000000 en Z_{17} y es -4.	(F5) En caso de que exista el inverso (mcd=1), aplicamos la demostración del teorema para elegir el número que acompaña al DNI y deducir que este es el inverso
In[]:=Mod[-4,17]	(F6) Calculamos la clase de este número obtenido en el paso anterior, en Z_{17}, con Mathematica, obteniendo el resto de dividir entre 17 con la función que tiene el programa (Mod[])

	(F7) Ejecutamos Mathematica para realizar la operación accionando INTRO
Out[]:= 13	(F8) Obtenemos el inverso.
	(F9) Comprobación (opcional)

Situación 2. Calcular, si es posible, el inverso de tu DNI en Z_{43}

Para esta segunda práctica, la tabla de resolución del experto se verá modificada en la columna de la izquierda tomando nuevamente n1=25000000, pero ahora n2=43. Sin embargo, las fases de resolución de esta situación son las mismas que las de la situación 1.

Análisis a priori

Para poder analizar resultados se ha elaborado un análisis didáctico a priori de ambas situaciones haciendo explícitos conflictos de significado potenciales. Hay que tener en cuenta que en este trabajo sólo se exponen tres de las entidades primarias[xxxi], aunque en la tabla 2 de resultados si aparecen conflictos semióticos asociados a todas las entidades primarias.

- Situación-problema:

En ambas situaciones pretendemos analizar el esquema de demostración explicado para el cálculo del inverso con la ayuda de recursos informáticos. En estos casos nos interesa proponer problemas que, en el mayor número de casos admitan inverso, y esto se dará cuando el máximo común divisor sea 1.

Así, se toma como primer dato el DNI, para personalizar el ejercicio y además de ser único para cada estudiante, éste lo conoce perfectamente, con lo que será más difícil que se equivoque al teclearlo en el ordenador.

Se han seleccionado dos números primos, 17 y 43, para los que fuera difícil que el DNI fuera múltiplo de ambos.

Como paso previo a aplicar el programa Mathematica, se podría simplificar el valor del DNI, pasándolo a Z_n, al igual que se haría sin la ayuda del ordenador. Se especifica en clase que no es necesario pues ya lo realiza el programa.

Otra característica del programa que van a utilizar es que organiza los datos utilizando el orden natural; es decir, cuando calcula la Identidad de Bézout, pone como primer término el que aparece con el dato de mayor valor absoluto:

$$1= 25000000\cdot(-4) + 17\cdot(5882353). \qquad \text{(a)}$$

Es obvio que cada DNI es mayor que 17 (43 para la situación 2) por lo que al utilizar el programa, la salida nos lo dará en el primer término de la expresión como vemos en (a).

El inverso de 250000000, es -4, pues es el que lo acompaña en la Identidad de Bézout, Sin embargo, en el ejemplo expuesto en clase, el inverso buscado aparece en el segundo término de la Identidad de Bézout.

No se ha implementado en el ordenador todo el proceso, sino que se ha preferido recurrir a él, sólo para la parte de cálculo más tediosa, así el estudiante trabaja de forma más centrada el esquema demostración.

Una vez localizado el inverso, hay que concluir dando su clase en Z_n . Este paso no va a ser común para todos los alumnos pues a algunos ya les vendrá simplificado, dependiendo del valor numérico de su DNI.

- Lenguaje:

Teniendo en cuenta la trasposición informática (Balacheff, 1994) encontramos tres tipos de lenguaje: el propio de las Matemáticas, el del programa informático con el que trabajamos (Mathematica) y el del entorno (Windows).Asociamos distintos conflictos semióticos potenciales dependiendo del tipo de lenguaje que consideremos.

Lenguaje de las Matemáticas

Es fundamentalmente un lenguaje deductivo, aunque se trata también de un lenguaje simbólico pues aparece el lenguaje formal y símbolos propios de la Matemática. Debemos remarcar que en la proposición que se estudia aparece un si y sólo si y el cuantificador existencial, que conllevan una dificultad especial, desde el punto de vista didáctico. Si atendemos a los datos con los que trabajamos, observaremos que tenemos también un lenguaje numérico, propio de la Aritmética modular. Los conflictos semióticos potenciales para este tipo de lenguaje son: $CSLM_1$: Aquellos casos en los que el alumno elige mal los datos. $CSLM_2$: Aquellos casos en los que el estudiante realiza un cálculo previo, como lo realizaría sin ordenador, e introduce los datos simplificados. $CSLM_3$: No se entiende la notación de clase de equivalencia y se confunde con complemento o negación (Ejemplo: Figura 1).

```
m.c.d.{17,77355651}=1
m.c.m.{17,77355651}=1315046067
Identidad de Bezout:1=77355651·(5)+17·(-22751662).
Por tanto el inverso que nos piden es 5 negado
```

Figura 5. Respuesta alumno 49, situación 1

Lenguaje del programa Mathematica

Mathematica es un software científico que trabaja en lenguaje de programación tipo C aunque con unas características muy especiales respecto de las sintaxis y respecto de los paquetes y funciones implementadas. Está estructurada en dos partes: Cuando iniciamos el programa, se despliegan una serie de ventanas con distinta funcionalidad, que permiten la comunicación con el usuario y con las que podemos interactuar, nos referimos a ellas como el *interfaz de usuario* o Front End. Por otra parte, para ejecutar o calcular algo, es preciso realizarlo en el *núcleo* o Kernel del programa, la parte más importante del mismo, pero no se realizará ningún cálculo mientras no se pulse la tecla INTRO. Obtenemos así dos tipos de conflictos semióticos potenciales:

- Relativos al interfaz de usuario o Front End:

$CSLMth_1$: Corresponde a una mala utilización de las celdas de entrada de datos.$CSLMth_2$: Corresponde a errores de sintaxis propia del Mathematica.$CSLMth_3$: El alumno desconoce la función o paquete de los que el programa dispone para realizar los cálculos. En esta práctica, la función Mod[] se utiliza para calcular el resto de dividir dos números enteros.

- Relativos al Núcleo o Kernel:

$CSLMth_4$: Se produce cuando se bloquea el núcleo al ejecutar los datos, bien porque el programa no esté bien construido o porque la magnitud de los datos sobrepasan la memoria del ordenador.$CSLMth_5$: Se desconoce por parte del alumno que para cargar el núcleo y realizar los cálculos es necesario pulsar INTRO.

Lenguaje del entorno, en este caso Windows

El programa Mathematica lo utilizamos dentro del entorno Windows. Así, utilizar las ventanas y los archivos (bajárselos desde un espacio web donde los tenemos situados, guardarlos, enviarlos al directorio donde se entregan las prácticas,…) es algo propio del lenguaje que corresponde al entorno en el que trabajamos. Tenemos también que tener en cuenta las características de la red en la que nos encontramos, en este caso la de la Universidad de Jaén. Respecto del entorno Windows, podemos asociar los siguientes conflictos semióticos: $CSLW_1$: El alumno entrega la plantilla vacía. $CSLW_2$: El estudiante entrega la práctica en un lugar equivocado o con el nombre cambiado. $CSLW_3$: El archivo entra corrupto.$CSLW_4$: Un mismo alumno entrega varios archivos.

- Argumentaciones

Existen dos tipos: Por un lado, las que corresponden a las Matemáticas. Son argumentaciones deductivas y podríamos decir que también son argumentos constructivos, pues la demostración no sólo da la existencia del inverso sino que nos permite construirlo. Por otro lado, respecto del programa Mathematica, obtenemos argumentaciones de tipo algorítmico, que son las que nos permiten distinguir los distintos pasos para conseguir la resolución del ejercicio. Los conflictos semióticos son: $CSAM_1$: En la fase 4, a pesar de que se observa que el mcd es 1, se deduce que el inverso no existe.$CSAM_2$: En la fase 4, deduce que no tiene inverso y sin embargo elige uno.$CSAMth_1$: Argumenta que el segundo número es el inverso, basándose en la posición y no se fija si acompaña al DNI.$CSAMth_2$: Se inventa el inverso a partir de datos de la Identidad de Bézout que no corresponde con la construcción dada (Ejemplo: Figura 2).

```
Identidad de Bezout: 1=75120803·(4)+17·(-17675483).
Por tanto,el inverso que nos piden es -17675483.
Por tanto,el inverso es 17+4=21
```

Figura 2. Respuesta alumno 93, situación 1

RESULTADOSY DISCUSIÓN

Es muy interesante analizar en qué fase de la demostración el estudiante ha tenido las mayores dificultades. Para ello hemos realizado un recuento que nos indica cual ha sido la última fase de la demostración que el alumno ha realizado bien. Se considera que la demostración está correcta si, dependiendo del DNI, se ha llegado a la fase 6, la fase 8 o la 9. En la situación 1 (respectivamente 2), el número de alumnos con la demostración correcta es40 (41 respectivamente), de los 132, alrededor de un 31%.Este bajo resultado nos indica la complejidad de dicho esquema de demostración.

Respecto de las fases que han completado correctamente, la de mayor frecuencia es la 4.1, con 44 alumnos en la situación 1 (45 en la situación 2). Estos casos aplican la proposición para asegurar la existencia del inverso y, sin embargo no saben elegir el inverso de forma correcta, como se explicaba en la demostración, sino que lo han asociado al elemento que ocupa el segundo lugar de la Identidad; esto es, un fenómeno didáctico observado es que los alumnos eligen el inverso desde la Identidad de Bézout que han obtenido con el ordenador, basándose en la posición, sin aplicar adecuadamente la construcción dada en la demostración.

Cabe también destacar que 29 estudiantes en la situación 1 (28 en la 2) se quedaron en una fase muy inicial de la demostración (fase 3) en la que no obtuvieron los cálculos por no haber dado al INTRO y activar el núcleo lo que interpretamos como un desconocimiento básico del programa Mathematica, con el que se ha estado trabajando durante todo el cuatrimestre, y que constituye un fenómeno didáctico relativo al lenguaje, cual es que, a pesar de tratarse de alumnos que llevan un cuatrimestre utilizando el programa Mathematica, un porcentaje estimable de ellos, alrededor del 22%, desconoce que ha de activarse el núcleo del programa para ejecutar los cálculos.

En la siguiente tabla mostramos los resultados obtenidos respecto de los conflictos semióticos que emergen en las dos situaciones, clasificados según las distintas entidades primarias.

Tabla 2. Cuantificación de conflictos semióticos

Entidades primarias		Situación 1		Situación 2	
		Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto	Frecuencia absoluta	Porcentaje absoluto
Lenguaje	Matemáticas	7	5,3%	7	5,3%
	Mathematica	45	34,1%	45	34,1%
	Entorno	8	6,1%	8	6,1%
Argumentación	Matemáticas	5	3,8%	4	3%
	Mathematica	46	34,8%	47	35,6%
Conceptos y proposiciones	Matemáticas	4	3%	3	2,3%
	Mathematica	35	26,5%	33	25%
Procedimientos	Matemáticas	28	21,2%	27	20,5%
	Mathematica	2	1,5%	4	3%

Observamos que los datos obtenidos en ambas situaciones son muy similares. Respecto del lenguaje, las argumentaciones y conceptos o proposiciones, observamos en la tabla 2,que los conflictos más significativos están relacionados con el programa Mathematica, mientras que en lo referente a los procedimientos, los conflictos semióticos con mayor frecuencia son los de las Matemáticas. La baja incidencia de conflictos semióticos debido al lenguaje del entorno consideramos que se debe a la habilidad de estos alumnos en la utilización de recursos informáticos.

La entidad primaria en la que se han manifestado más conflictos semióticos (60% en ambas situaciones) es el lenguaje. Entre ellos los conflictos relativos a las Matemáticas no son significativos en esta práctica pues los datos estaban muy controlados; los del entorno tienen también una frecuencia baja pues el estudiante de Informática está acostumbrado a distintos entornos y el tratamiento de archivos no les supone dificultad. Dentro de las argumentaciones, el conflicto semiótico más destacado ha correspondido a $CSAMth_1$ con una frecuencia de 45 (respectivamente 46) estudiantes y que se ha derivado de la proposición falsa que obtiene el inverso a través de la posición (fase 4.1 vista anteriormente)

Un fenómeno didáctico que se observa es el porcentaje, en torno al 30 %, de conflictos semióticos con el programa Mathematica en las entidades primarias como son el lenguaje, argumentaciones y conceptos y proposiciones, frente al escaso porcentaje de conflictos semióticos en procedimientos, también con el programa Mathematica.

CONCLUSIONES

Los datos de las dos situaciones han sido bien elegidos para que los alumnos pudieran calcular el inverso. En efecto, tan sólo dos alumnos de 132 no pudieron realizar la práctica 1 con las mismas características didácticas de sus compañeros al ser su DNI múltiplo de 17, pero ninguno de ellos fue también múltiplo de 43 y realizaron la situación 2 en las condiciones que pretendíamos.

Han emergido diferentes conflictos semióticos que hemos podido clasificar según las distintas entidades primarias que nos aporta el marco teórico EOS, y los distintos contextos debidos a la transposición informática. De esta manera hemos podido observar cuáles son los conflictos semióticos de estos estudiantes, lo que ofrece características sobre sus significados personales.

El análisis cuantitativo nos indica que los estudiantes no comprenden bien el esquema de demostración estudiado, porque no aplican la proposición o porque utilizan criterios erróneos como la posición para la elección del inverso. También, el concepto de clase de restos constituye una dificultad importante para estos alumnos.

Al trabajar la demostración con recursos informáticos, han aparecido nuevos conflictos derivados de las características del programa Mathematica. Así, hemos podido comprobar que la trasposición informática no está exenta de dificultades.

Si nos planteamos el impacto del programa Mahematica en el aprendizaje de la demostración diremos que es muy conveniente pues facilita la resolución y permite al alumno centrarse en la demostración evitando que se disperse con tediosos cálculos numéricos. También permite visualizar las dificultades encontradas en este esquema de demostración.

Este trabajo se enmarca dentro del proyecto de investigación I+D+i EDU2012-32644.

Referencias

Balacheff, N. (1991). The benefits and limits of social interaction: The case of mathematical proof. In A. Bishop, E. Mellin-Olsen y J. van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: Its growth teaching* (pp. 175-192). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Balacheff, N. (1994).La transposition informatique, un nouveau problème pour la didactique des mathématique. In M. Artigue et al. (Eds.), *Vingt ans de didactique des mathématiques en* France (pp. 364-370). Grenoble: La pensée sauvage éditions.

Contreras, A. et al. (2005). Aplicación del programa mathematica a las prácticas de cálculo en el primer año universitario. En A. Maz; B. Gómez y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en educación Matemática IX* (pp. 271-282). Córdoba: SEIEM.

Contreras, A., y Ortega, M. (2009). Fenómenos didácticos emergentes de las prácticas realizadas con el programa Mathematica. *Comunicación en el Grupo de Investigación de Didáctica del Análisis. XIII Simposio de la SEIEM.*

Dubinsky, E., y Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld y J Kapput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 239-286). Providence, RI: American Mathematical Society

Font, V., Planas, N., y Godino, J. D. (2010).Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(2), 89-105.

García-Muñoz, M.A., Ordóñez, C., y Ruiz, J.F. (2006). *Métodos Computacionales en Álgebra para Informáticos. Matemática Discreta y Lógica*. Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.

Godino, J. D., y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325–355.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Contreras, A., y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque onto-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 26*(1), 39-88.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward Comprehensive Perspectives on the Learning and Teaching of Proof. *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: a Project of National Council of Teachers of Mathematics*, 805-842.

Ordóñez, L. (2011). *Restricciones institucionales en las Matemáticas de 2º de Bachillerato en cuanto al significado del objeto integral definida.* Tesis doctoral. Universidad de Jaén.

Recio, A.M. (2000). *Una aproximación epistemológica a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración matemática.* Tesis doctoral. Servicio de publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Recio, A.M., y Godino J.D. (2001). Institutional and personal meanings of mathematics proof. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 83-99

[xxx]En el sentido de Harel y Sowder (2007, p. 809).

[xxxi]El EOS identifica en la actividad matemática cinco tipos de entidades u objetos primarios: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos (Godino, Batanero y Font, 2007).

INTERPRETACIÓN DE LA DISPERSIÓN DE DATOS EN CONTEXTO DE RIESGO POR ESTUDIANTES DE SECUNDARIA[xxxii]

Interpreting spread of data in risk context by middle school students

José Antonio Orta y Ernesto Sánchez

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México

Resumen

La investigación tiene como objetivo explorar el razonamiento de los estudiantes acerca de la noción de dispersión (variabilidad o variación) cuando analizan datos en situaciones de incertidumbre. En particular, en esta comunicación se informa sobre las respuestas a dos problemas de un cuestionario administrado a 65 estudiantes de 9º grado (14 años). Los problemas son de comparación de conjuntos de datos y están ubicados en contextos de riesgo: apuestas en jugos y duración de vida después de tratamientos médicos. El cuestionario fue aplicado antes y después de unas actividades de enseñanza. Los resultados muestran la dificultad de los estudiantes para interpretar la dispersión en contextos de riesgo. Aunque identifican el conjunto de datos con mayor dispersión, no es suficiente para que la interpreten y tomen una decisión racional.

Palabras clave: *dispersión, variabilidad, incertidumbre, riesgo.*

Abstract

The aim of this investigation is to explore the student reasoning about variation (variability or spread) when they analyze data in situations under uncertainty. In particular, in this communication the responses to two problems of a questionnaire administered to 65 ninth-grade students (14 years old) are reported. The problems are of comparing groups of data in situations of risk: stakes in games and the life expected after medical treatments. Students responded the questionnaire before and after instruction activities. The results show the difficulty found by students to interpret variation in risk context. Although they indentify the data set with more variation, it is not enough for interpreting it in the risk context and makes a rational decision.

Keywords: *spread, variability, uncertainty, risk*

Orta, J.A. y Sánchez, E. (2013). Interpretación de la dispersión de datos en contexto de riesgo por estudiantes de secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 421-430). Bilbao: SEIEM

INTRODUCCIÓN

Muchos autores han destacado la importancia de la variación estadística. Moore (1990) afirma que es el corazón de la estadística, mientras que Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy (2003) la ubican como la razón de existir de la estadística. Wild y Pfannkuch (1999) proponen que la consideración de la variación es uno de los tipos fundamentales del pensamiento estadístico. Este concepto está relacionado con varias ideas estadísticas fundamentales: representación, centros, distribución, inferencia. Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que "la comprensión de las ideas de dispersión o variación en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas" (p. 203). A pesar de su importancia, la variación estadística en los niveles básicos está prácticamente ausente. En el currículo mexicano, la estadística de secundaria se reduce principalmente a contenidos de gráficas y medidas de tendencia central y sólo al final del tercer grado (14 años) se menciona el estudio de "medidas de dispersión", sugiriendo tratar el rango y la desviación media (SEP, 2011).

En los estudios arriba mencionados y en muchos otros sobre variación estadística (Shaughnessy, 2007, Sánchez, da Silva y Coutinho, 2011) se sugiere que el estudio de la dispersión no puede reducirse al aprendizaje de las fórmulas correspondientes: rango, desviación media, desviación estándar o y/o variancia. Es necesario ampliar el conjunto de ideas alrededor de la dispersión, en particular, son fundamentales sus interpretaciones en los diferentes contextos en los que se presenta. Por otra parte, tampoco se puede analizar la comprensión de la dispersión aislada de la idea de centro; por ejemplo, Konold y Pollatsek (2004) utilizan la metáfora de señal en presencia de ruido para explicar la relación entre centro y dispersión; Garfield y Ben-Zvi (2008, p. 203) afirman que "es imposible considerar la variabilidad sin considerar también el centro, pues ambas ideas son necesarias para encontrarles significado en el análisis de datos". La presente comunicación tiene como objetivo dar cuenta de cómo interpretan los estudiantes de 9º grado la dispersión de los datos en situaciones de riesgo. Aunque sin ser el objeto de este estudio, en la descripción y el análisis se hace también consideraciones sobre la media aritmética. .

Conviene aclarar que utilizaremos los términos *variación*, *variabilidad* y *dispersión* como sinónimos, apoyándonos en el análisis de Estepa (2013). Aunque estrictamente hablando tales términos conllevan ligeras diferencias, en el contexto presente, su uso se refiere al núcleo que comparten.

MARCO DE REFERENCIA

La interpretación de la dispersión depende de la situación de la cual provienen los datos, en particular, se pueden distinguir dos interpretaciones algo generales sugeridas por el tipo de contexto del problema y la clase de distribución a la que pertenecen los datos. Una es la dispersión como una medida de la exactitud y precisión de un instrumento de medida o un proceso de medición; en estos casos los datos pertenecen a una distribución normal. La otra, como una medida de la incertidumbre presente en el resultado de un proceso; si esta incertidumbre implica alguna amenaza en la bondad de un resultado, entonces se llama riesgo; las clases de distribuciones a la que pertenecen suelen ser muy alejadas de una forma normal.

El riesgo se presenta cuando hay potenciales resultados no deseados que pueden traer como consecuencia pérdidas o daños. Definir el riesgo significa especificar los resultados valiosos y los no deseados en un orden que refleje el valor que se les atribuye. El análisis del riesgo ofrece información para la toma de decisiones. La teoría de la toma de decisiones en situaciones de riesgo tiene dos aspectos; por un lado, define reglas abstractas sobre lo que debería hacer la gente, y por otro lado, estudia lo que hace realmente cuando se enfrenta a ellas: "Si la gente no sigue las reglas, quiere decir que o las personas necesitan ayuda o las reglas necesitan una revisión" (Fischhoff y Kadvany, 2011, pp.65).

En los estudios descriptivos sobre la toma decisiones, se han identificado dos actitudes de los sujetos frente a situaciones de riesgo: propensión y aversión al riesgo (Tversky y Kahneman, 2000). Una situación puede ser enfocada desde un punto de vista conservador o aventurero; así ante dos situaciones de juego en las que se gana en promedio lo mismo, pero en un juego con apuestas pequeñas y en el otro con apuestas grandes, alguien conservador preferirá el primero y alguien aventurero preferirá el segundo.

METODOLOGÍA

Este es un estudio de carácter exploratorio sobre la percepción e interpretación espontánea de los estudiantes frente a problemas en situaciones de riesgo. Se trata de revelar el tipo de razonamiento que despliegan los estudiantes en situaciones de riesgo. Los contextos son dos, uno de apuestas en juegos de azar, el otro de tratamientos médicos. Esta elección se hizo con el objetivo de atraer el interés de los estudiantes hacia la dispersión.

Participantes. Participaron 65 estudiantes, un profesor y los autores. Los estudiantes estaban distribuidos en dos grupos que cursaban su tercer año de secundaria (9º grado, 14 años) en una escuela pública de la Ciudad de México. El profesor tiene 12 años de experiencia y realizó una maestría en educación matemática.

Instrumentos. Se diseñaron y llevaron a cabo dos actividades de enseñanza y un cuestionario de tres problemas que se administraron antes y después de las actividades de enseñanza. En esta comunicación se informa de los resultados de dos problemas del cuestionario (ver anexo). Estos se diseñaron siguiendo el formato de comparación de grupos, ya que esta clase de problemas se ha mostrado fértil para poner en acción el razonamiento de los estudiantes (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Cada problema tenía dos incisos, uno en una situación de toma de decisiones; en el problema 1 tenían que elegir el juego en el que les convendría jugar (más ganancia); en el problema 2, el tratamiento que recomendarían (mayor tiempo de vida). En ambos problemas las medias son las mismas de manera las diferencias se buscaran interpretando la dispersión.

Las actividades de enseñanza tuvieron como eje dos problemas uno en contexto de medición y otro en contexto de juego; ambos contextos no implicaban riesgo. Los problemas también fueron de comparación de conjuntos de datos y se condujo a los estudiantes a considerar el rango y la desviación media. Estas actividades se llevaron a cabo entre las dos aplicaciones del cuestionario (previa y posterior).

Procedimiento. El cuestionario se aplicó a los estudiantes antes de realizar la actividad (Previo), antes ya habían estudiado el tema de medidas de tendencia central, de manera que sabían calcular la media y mediana de un conjunto de datos. A lo largo de 4 sesiones de 100 minutos, se realizaron las actividades. Después, en una quinta sesión, se les volvió a aplicar el cuestionario (Posterior). Se esperaba que mejorara su desempeño en la segunda aplicación como resultado de la actividad.

RESULTADOS

A continuación se describen los resultados de dos problemas del cuestionario que se administró antes y después de la intervención.

Situación 1. Esta se refiere a las cantidades ganadas por diferentes personas, en dos juegos (Ver anexo) Las preguntas son 1a) ¿en cuál de los dos juegos participarías? y 1b) ¿en cuál de los juegos hay más variabilidad? Se esperaba que los estudiantes percibieran que en ambos juegos se gana en promedio lo mismo, y que esto llevara a algunos a responder que “cualquiera”; otros considerarían la dispersión y quienes tuvieran aversión al riesgo elegirían juego 2, mientras quienes fueran propensos al riesgo, el juego 1. En la Tabla 1, se indican las frecuencias de elección en las respuestas de los estudiantes.

Tabla 1. Frecuencias con las que los estudiantes eligieron como respuesta a las preguntas 1a y 1b, “Juego 1”, “Juego 2”, “cualquiera” en el cuestionario previo y en el posterior.

	Pregunta 1a)		Pregunta 1b)	
	Previo	Posterior	Previo	Posterior
Juego 1	29	25	44	39
Juego 2	33	33	20	24
Cualquiera	3	8	1	4
No responde	0	1	0	0
Total	65	67	65	67

Conviene observar que los datos de ambos juegos tienen la misma media y que el juego 1 tiene mayor dispersión que el juego 2. Con relación a la pregunta 1a, en el Posterior hay 4 respuestas menos que eligen el juego 1 (mayor variación) y aumentan las respuestas que proponen elegir cualquier de los dos. Este leve cambio podría explicarse apelando a que se repasó la media durante la intervención, pues aumentó el número de estudiantes que respondieron “cualquiera”. . En el inciso b, se observa que en el Posterior, hay 5 elecciones menos al juego 1 que al juego 2; aumenta en 4 los que eligen el juego 2 y sólo aumenta en 3 los que opinan que cualquier juego se puede elegir.

Se nota que en la pregunta 1b hay más elecciones del juego 1 (tanto en el previo como en el posterior) respecto a las elecciones del mismo juego en el inciso a. Esto quiere decir que varios identifican el juego en que los datos tienen más variabilidad, pero que en el contexto de la apuesta eligen la opción del juego con menos variabilidad o la opción de que cualquiera es igual. Sin embargo, tal identificación no es muy sólida, como se ve enseguida.

Es notable que en esta pregunta (1b), después de la intervención, haya disminuido el número de respuestas correctas; por lo que conviene examinar con más detalle los cambios que del pre al post se realizaron en esta pregunta. En la tabla dos se muestran tales cambios.

Tabla 2. Frecuencias de estudiantes que cambiaron su elección entre juego 1 y 2

		Cuestionario Posterior		
		Juego 1	Juego 2	Juego 1 y Juego 2
Cuestionario previo	Juego 1	25	14	2*
	Juego 2	11	6	2
	Juego 1 y Juego 2	1	0	0

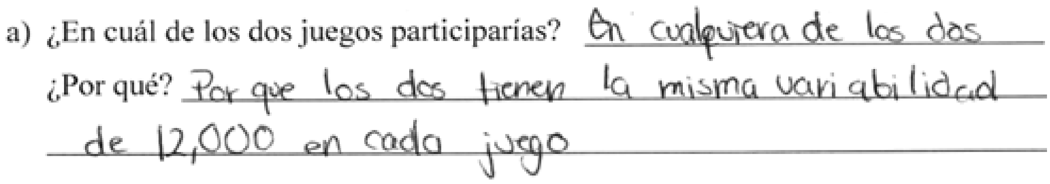
* La suma de esta fila es 41 y no 44 (tabla 1) porque sólo 61 resolvieron ambos, el pre y el post.

Lo más significativo es que 14 estudiantes que eligieron en el pre el juego 1 (respuesta correcta) en el posterior cambiaron al juego 2. Esto significa que la enseñanza no logró desarrollar y consolidar su primera intuición. En nuestra opinión, su primera respuesta fue motivada por su conocimiento común de lo extenso y lo disperso; después de la instrucción, buscaron mejores razones para su elección pero no supieron considerar los elementos correctos en los datos y esto los desvió. Pero es necesaria mayor evidencia para confirmar esta opinión.

Se esperaba que los estudiantes interpretaran la variabilidad y eligieran el juego 1, cuando son propensos al riesgo y el juego 2 cuando tienen aversión al riesgo, sin embargo, las justificaciones que dieron o no dan información sobre sus verdaderos motivos para elegir una u otra opción o indican motivos que se estiman inadecuados, más bien basados en la comparación de algún o algunos elementos particulares de los datos. A continuación se dan ejemplos que muestran lo anterior.

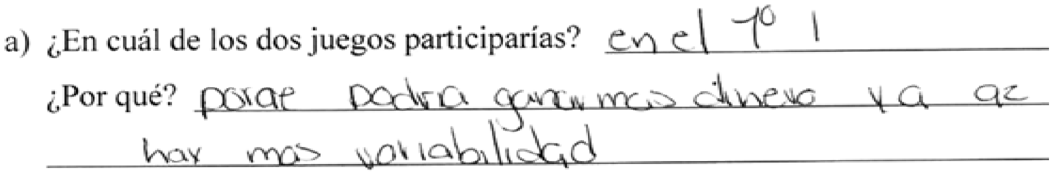
Con relación al inciso a, una gran parte de las "justificaciones" de los estudiantes para sostener sus decisiones no aportan información que permita revelar sus verdaderos motivos (30 en el previo y 23 en el posterior), por ejemplo: "Juego 1, porque se gana más". Hay un número reducido que hacen comentarios que ofrecen indicios de sus posibles estrategias. Se clasifican las justificaciones en tres tipos:

1) Suman la totalidad de datos de cada juego y los comparan:


a) ¿En cuál de los dos juegos participarías? En cualquiera de los dos
¿Por qué? Por que los dos tienen la misma variabilidad de 12,000 en cada juego

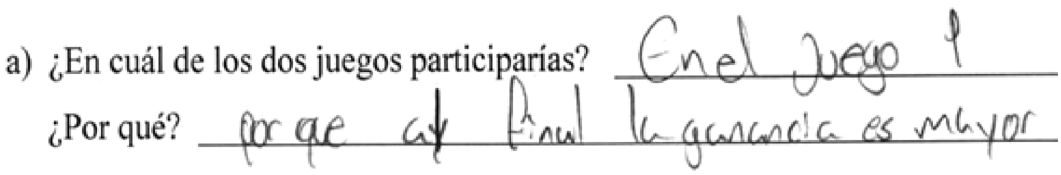
"En cualquiera de los dos. Porque los dos tienen la misma variabilidad de 12,000 en cada juego" [Confunde 'variabilidad' con 'cantidad total']

2) Asumen que en el conjunto con mayor variación se gana más:


a) ¿En cuál de los dos juegos participarías? en el 1º 1
¿Por qué? porqe podria ganar mas dinero ya qe hay mas variabilidad

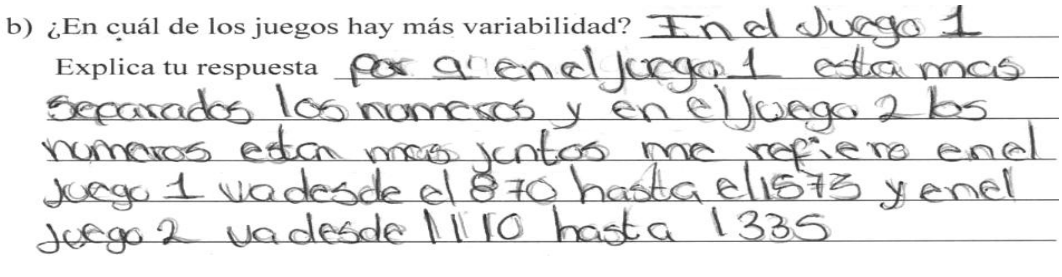
"En el 1, porque podría ganar más dinero ya que hay más variación"

3) Buscan en cada conjunto de datos, representantes que consideran que indican en qué juego se gana más (valores máximos, valores mínimos, mayor frecuencia) y los comparan.


a) ¿En cuál de los dos juegos participarías? En el Juego 1
¿Por qué? porqe al final la ganancia es mayor

"En el juego 1, porque al final la ganancia es mayor"

Con relación al inciso b, la mayoría identifica el conjunto de datos con mayor dispersión; no obstante, unos pocos utilizan en su justificación el rango y ninguno considera otra medida de dispersión (La desviación media se trabajó durante la intervención); por ejemplo:


b) ¿En cuál de los juegos hay más variabilidad? En el Juego 1
Explica tu respuesta por qe en el juego 1 estan mas separados los numeros y en el juego 2 los numeros estan mas juntos me refiero en el juego 1 va desde el 870 hasta el 1573 y en el juego 2 va desde 1110 hasta 1335

"En el juego 1, porque en el juego 1 están más separados los números y en el juego 2 los números están más juntos. Me refiero [a que] en el juego 1 van desde el 870 hasta el 1573 y en el juego 2 van desde 1110 hasta 1335".

Situación 3. Esta se refiere al tiempo de vida de pacientes enfermos que siguen diferentes tratamientos (ver apéndice). Las preguntas son 3a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? ¿Por qué? y 3b) ¿En cuál de los tratamientos hay más variación? Explica tu respuesta..

Tabla 3. Frecuencias con las que los estudiantes eligieron como respuesta a la pregunta 3a) y 3b), “Tratamiento 1”, “Tratamiento 2”, “Tratamiento 3”, etcétera, en el cuestionario previo y en el posterior.

	Pregunta 3a)		Pregunta 3b)	
	C Previo	C Posterior	C Previo	C Posterior
Tratamiento 1	30	30	42	51
Tratamiento 2	19	23	9	6
Tratamiento 3	15	12	9	6
Tratamientos 2 y 3	0	0	5	0
Cualquiera	1	1	0	0
No contestó	0	1	0	4
Total	65	67	65	67

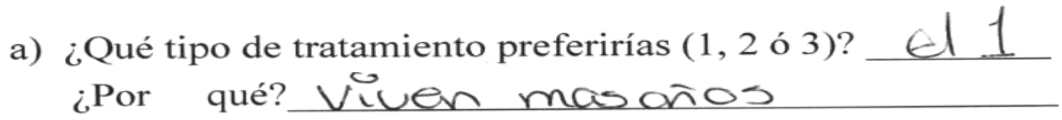
Los datos de los tres tratamientos tienen la misma media; el tratamiento 1 tiene mayor dispersión que los otros y el tratamiento 2 tiene menor desviación media.

En la Tabla 3, se puede observar que, con relación a la pregunta 3a, la frecuencia con la que eligieron el tratamiento 1 en el previo es la misma que la frecuencia con la que lo eligieron en el posterior; mientras que el tratamiento 2 tuvo 4 elecciones más en el posterior respecto al previo; en cambio, la elección del tratamiento 3 disminuyó en 3 del previo al posterior. Los cambios son poco significativos; aparentemente la intervención no influyó mayormente en el razonamiento de los estudiantes para este tipo de pregunta.

En la parte 3b, hay 9 elecciones más del tratamiento 1 en el posterior que en el previo, lo que indica una mejoría en la identificación de la distribución con mayor dispersión. También hubo 3 elecciones menos de los tratamientos 2 y 3 al pasar del previo al posterior. Hubo cinco elecciones de los tratamientos 2 y 3 en el previo, pero en el posterior nadie dio esta respuesta.

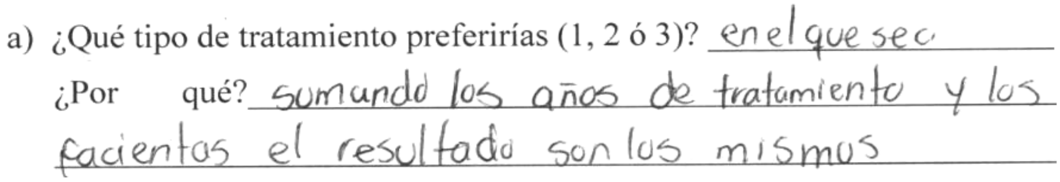
Con relación a las justificaciones de las respuestas a la pregunta 3a, se encuentran argumentos de tres tipos 1) apoyan su elección con una afirmación general que de alguna manera repite lo que se pide (tautológica), 2) Suman la totalidad de tiempo que tardan los tratamientos (les falta dividir entre el número de datos para que obtengan la media), 3) Observan un valor particular de los datos de un tratamiento y lo comparan con el correspondiente de otro o de los otros tratamientos. A continuación se presentan un ejemplo de cada caso:

Tautológico


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? el 1
¿Por qué? viuen mas años

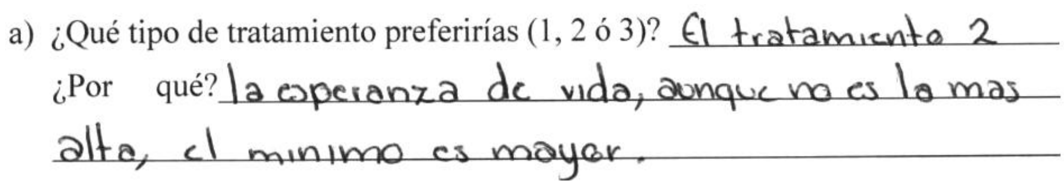
“El 1, viven más años)

Se fija en la suma de los tiempos de tratamiento


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? en el que sea
¿Por qué? sumando los años de tratamiento y los facientos el resultado son los mismos

“Sumando los años de tratamiento y los pacientes, el resultado es el mismo”

Se fija en los mínimos y los compara


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? El tratamiento 2
¿Por qué? la esperanza de vida, aunque no es la mas alta, el minimo es mayor.

"La esperanza d vida, aunque no es la más alta, el mínimo es mayor"

CONCLUSIONES

Las evidencias apoyan la afirmación de que para los estudiantes de la edad de 14 años, es muy difícil que espontáneamente interpreten la dispersión en contextos de riesgo. Sus tendencias a comparar sólo valores particulares de los juegos (máximos, mínimos, o modas) o de los tratamientos, y tomar decisiones basados sólo en esa comparación, remiten a la dificultad, ya documentada, consistente en que los estudiantes no pueden hacer comparaciones de grupos de datos considerando cada grupo como una unidad o distribución (Garfield y Ben-Zvi, 2008). Al parecer, la intervención no ayudó a mejorar las interpretaciones de los estudiantes. En ésta, se estudiaron los temas de gráficas, media y dispersión en contextos diferentes a los de riesgo, y se constató que ahí alcanzaron un cierto nivel de comprensión, pero no fue suficiente para que tales conceptos fueran transferidos e interpretados en los contextos de riesgo presentes en las preguntas del cuestionario.

Las respuestas de los incisos b de las preguntas revelan que la mayoría de los estudiantes perciben cuál de dos conjuntos de datos tienen mayor dispersión, pero también revelan que tal percepción es muy primitiva, pues una gran parte de ellos no se apoya en alguna característica de los datos (por ejemplo, el rango) sino que en sus justificaciones sólo afirman de otra manera lo que se pregunta ("porque se gana más" o "porque se vive más"). Responder que hay más variabilidad o dispersión en un conjunto de datos está más motivado por sus conocimientos comunes sobre lo extenso o lo disperso que por un conocimiento estadístico. Aunque esta investigación tiene el objetivo de enfocarse en la dispersión no puede dejarse de lado considerar a la media. Es conveniente señalar que la mayoría de los estudiantes participantes no utiliza la media en sus valoraciones, por ejemplo, para concluir que la ganancia promedio es la misma en los dos juegos, así como que el tiempo promedio de vida es el mismo en ambos tratamientos. Se esperaba que el análisis de la dispersión que hicieran los estudiantes se articulara con una consideración de la media, lo cual no ocurrió sino en muy pocos casos.

Referencias

Estepa, C. A. (2013). Los fenómenos de cambio. *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*. Organizado por el grupo de investigación Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Fischhoff, B., y Kadvany, J. (2011). *Risk: A very short introduction*. Oxford: Oxford University Press.

Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer.

Konold, C., y Pollatsek, A. (2004).Conceptualizing an average as a stable feature of a noisy process. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy reasoning and thinking* (pp. 169-199). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Moore, D. (1990). Uncertainty. En L.A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New* approaches *to numeracy* (pp. 95–137). Washington, DC: National Academy Press.

Sánchez, E., Borim, C., y Coutinho, C. (2011). Teachers understanding of variation. En C. Batanero, G. Burril, y C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study: The 18th ICMI Study* (pp. 211-222). The Netherlands: Springer.

SEP (2011). *Programas de Estudio. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México, D. F.: Secretaría de Educación Pública.

Shaughnessy, J.M. (2007). Research on statistics learning and reasoning. En F.K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 957-1009). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Tversky, A., y Kahneman, D. (1991). Loss aversion in riskless choice. A reference-dependent model. *The Quaterly Journal of Economics*, *106*(4), 1039-1061.

Watson, J., Kelly, B., Callingham, R., y Shaughnessy, M. (2003).The measurement of school students´ understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(1), 1-29.

Wild, D.J., y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*, 223-265.

Anexo

CUESTIONARIO

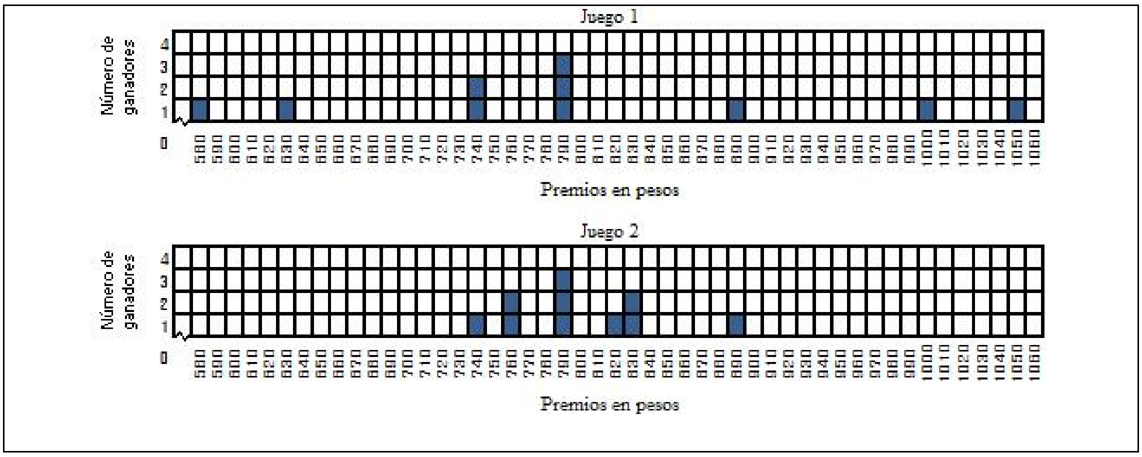
1. En una feria, se invita a los asistentes a participar en dos juegos de apuestas. Considera que participas en uno de esos juegos y puedes elegir en cuál. Los premios en efectivo, que han obtenido diferentes personas se muestran en las Tablas siguientes:

Premios en pesos (Juego 1)	Premios en pesos (Juego 2)
870	1110
945	1140
1110	1140
1110	1185
1185	1185
1185	1185
1185	1230
1335	1245
1500	1245
1575	1335

Contesta lo siguiente

a) ¿En cuál de los dos juegos participarías? ¿Por qué?
b) ¿En cuál de los juegos hay más variación? Explica tu respuesta

2. Imagina que participas en uno de dos juegos de apuestas. Antes de aceptar, te permiten conocer los montos de los premios en dinero que puedes ganar. Los premios que han obtenido diferentes personas se muestran en gráficas y son las que se presentan a continuación:



Contesta lo siguiente

a) ¿En cuál de los dos juegos participarías? ¿Por qué?
b) ¿En cuál de los juegos hay más variación? Explica tu respuesta

3. Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, la cual es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años. Es posible elegir entre tres opciones, dependiendo del tratamiento. Según el tipo de medicina, las personas tienen diferentes reacciones a las sustancias, para algunas, éstas tienen el mismo resultado, mientras que para otras, puede ser mayor o menor. En las Tablas siguientes se muestran los años que han vivido varios pacientes que se han tratado con una de

las opciones mencionadas; cada dato de la Tabla corresponde a un paciente. También, se incluye la representación gráfica de los distintos tratamientos.

Tiempo en años (Tratamiento 1)	Tiempo en años (Tratamiento 2)	Tiempo en años (Tratamiento 3)
5.2	6.8	6.8
5.6	6.9	6.8
6.5	6.9	6.9
6.5	7.0	7.0
7.0	7.0	7.0
7.0	7.0	7.1
7.0	7.1	7.1
7.8	7.1	7.1
8.7	7.2	7.2
9.1	7.4	7.4

¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	**¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.**

Contesta lo siguiente:

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? ¿Por qué?
b) ¿En cuál de los tratamientos hay más variación? Explica tu respuesta

[xxxii] Esta investigación ha sido subvencionada por: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT), México. Proyecto 101708.

COMPONENTES DEL CONOCIMIENTO DE FUTUROS PROFESORES SOBRE ESPACIO MUESTRAL

Pre-Service Teachers' Knowledge in relation to sample space

Juan J. Ortiz, Nordin Mohamed y Luis Serrano

Universidad de Granada

Resumen

El objetivo de este trabajo es evaluar algunos componentes del conocimiento de 283 futuros profesores de educación primaria para la enseñanza de conceptos probabilísticos elementales, involucrados en una tarea en la que deben identificar el suceso seguro en un experimento aleatorio y el posterior análisis didáctico de la tarea trabajando en grupos. En nuestro estudio nos centraremos en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes. Los resultados sugieren la necesidad de reforzar tanto los conocimientos matemáticos como los conocimientos didácticos de los futuros profesores.

Palabras clave: *conocimiento del profesor, probabilidad, espacio muestral.*

Abstract

The aim of this paper is to assess some components in the probabilistic knowledge for teaching of 283 pre-service primary school teachers. These teachers were given a task in which they must identify the certain event in a random experiment and subsequently they analysed the task working in groups. In our study we focus on the common and specialized knowledge of content and knowledge of content and students. Results suggest the need to reinforce the training of pre-service teachers both in the mathematical and the didactic knowledge.

***Keywords**: teachers'knowledge, probability, sample space.*

Ortiz, J. J., Mohamed, N. y Serrano, L. (2013). Componentes del conocimiento de futuros profesores sobre espacio muestral. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 431-438). Bilbao: SEIEM

INTRODUCCIÓN

Aunque son numerosas las investigaciones en educación matemática sobre formación de profesores, sólo recientemente estos trabajos se centran en los conocimientos de los futuros profesores respecto a la estadística (Batanero, Burrill y Reading, 2011), debido a la inclusión de la estadística y la probabilidad en la Educación Primaria (MEC, 2006; NCTM, 2000). Dichos programas sugieren transmitir al niño un lenguaje elemental probabilístico mediante juegos, experimentos y observación de fenómenos naturales, para que aprenda a identificar las situaciones aleatorias y llegue al final de la educación primaria a calcular algunas probabilidades sencillas. La consecución de estos objetivos requiere una formación adecuada del futuro profesor de educación primaria, siendo un requisito previo la evaluación de sus necesidades formativas.

El objetivo de este trabajo es evaluar algunos componentes del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros profesores de educación primaria sobre conceptos probabilísticos elementales, involucrados en una tarea en la que deben identificar el suceso seguro en un experimento aleatorio y el posterior análisis didáctico de la tarea trabajando en grupos. Este estudio se centra en el conocimiento común y especializado del contenido y en el conocimiento del contenido y los estudiantes, en la terminología de Hill, Ball y Schilling (2008).

FUNDAMENTOS

Comprensión del suceso seguro

Entre las ideas fundamentales de la probabilidad, Heitele (1975) incluye la de suceso seguro o espacio muestral. Hawkins, Jolliffe y Glickman (1992) indican que el origen de concepciones incorrectas en los estudiantes, sobre los experimentos aleatorios y el espacio muestral, puede ser debido a que no se presta suficiente atención a la enseñanza de estos dos conceptos.

Numerosas investigaciones con niños y adolescentes, sobre la comprensión del espacio muestral, indican que aunque manifiestan cierta intuición para determinar el espacio muestral y para calcular la probabilidad de un suceso compuesto, cometen errores de orden (edad 9-14 años) (Fischbein, Nello y Marino, 1991) o errores de orden y de repetición (edad 14-15 años) (Batanero, Navarro-Pelayo y Godino, 1997). Otros estudiantes (edad 8-9 años) no creían que todos los resultados podrían ocurrir en un experimento aleatorio simple (Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1999). Para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre el espacio muestral se puede utilizar la simulación (Shaugnessy y Cincetta, 2002)

Formación de profesores para enseñar probabilidad

Azcárate (1995) evaluó el conocimiento matemático de 57 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad, encontrando que pocos mostraban una idea clara sobre las características de los fenómenos aleatorios, o consideraron que no es posible el estudio matemático de los mismos. Se detectó también falta de esquemas combinatorios y escasa competencia de cálculo de probabilidades, cuantificando las probabilidades de un suceso desde criterios personales.

Ortiz, Mohamed, Batanero, Serrano y Rodríguez (2006), analizaron las estrategias que 102 futuros profesores de educación primaria utilizaron en la resolución de problemas de comparación de probabilidades. Observaron que, en general, hacían uso de estrategias correctas (multiplicativas y de correspondencia), que indicaba un buen nivel de razonamiento proporcional, aunque todavía había un grupo importante que utilizaba estrategias incorrectas o mostraba sesgos de razonamiento. Para mejorar el razonamiento probabilístico de los futuros profesores de educación primaria, Batanero, Godino y Cañizares (2005) proponen utilizar actividades de simulación.

Respecto al espacio muestral, Azcárate (1995) propuso dos problemas a futuros profesores de educación primaria, obteniendo muy pocas respuestas correctas. Los participantes mostraron mucha dificultad para enumerar todos los casos posibles, aportando tan solo una estimación global basada en justificaciones aritméticas o en razonamientos combinatorios incompletos o incorrectos.

Sobre el conocimiento didáctico de los profesores, Contreras (2011) detectó carencias en los conocimientos de 183 futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad condicional, respecto a las componentes conocimiento especializado y conocimiento del contenido y la enseñanza. López (2006) mostró la gran dificultad de los profesores de primaria cuando diseñan y llevan a cabo unidades didácticas para la enseñanza de la probabilidad.

Respecto al conocimiento del contenido y los estudiantes, Watson (2001) informó que los profesores de primaria y secundaria, aunque son capaces de identificar los problemas de los alumnos, en general, se centran en aspectos procedimentales. Contreras (2011) encontró que algunos profesores de secundaria fueron capaces de identificar correctamente conflictos de sus estudiantes al resolver un problema de probabilidad, pero otros señalaron dificultades que no aparecen en la situación o que no eran importantes.

MÉTODO

Los participantes fueron 283 futuros profesores de educación primaria de la Universidad de Granada, en su primer año de estudios. Siguiendo la metodología propuesta por Godino (2009), se eligió una tarea cuya solución ponga en juego los principales aspectos a evaluar del suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados, y se formulan cuestiones para evaluar las distintas componentes del conocimiento del profesor.

En la Figura 1 se muestra el cuestionario utilizado con un problema tomado de Cañizares (1997), quien lo utilizó con niños de 10 a 14 años. El espacio muestral consta de tres sucesos elementales no equiprobables por razón de la composición de la urna. En los sucesivos experimentos la composición de la urna se modifica, por lo que cambian las probabilidades de los sucesos elementales. En esta situación hay que sacar ocho bolas para estar seguro de que habrá una bola de cada color, pues en el peor de los casos, con ocho bolas sacas todas menos una blanca. Las respuestas incluidas en la segunda parte de la tarea (Alumnos 1 a 6), las proporcionaron algunos niños participantes en dicha investigación. Los datos se recogieron en la asignatura de *Matemáticas y su Didáctica*, a lo largo de dos sesiones. En la primera, se pidió a los futuros profesores que resolvieran por escrito el apartado (a), para evaluar su conocimiento común del contenido matemático. En la segunda sesión, trabajando en pequeños grupos (31 grupos en total), se pidió que resolvieran por escrito el apartado (b), para evaluar el conocimiento especializado del contenido, y los apartados (c) y (d), para evaluar el conocimiento del contenido y los estudiantes. Los grupos eran de dos o tres estudiantes, que mostraron su disposición a participar en la segunda sesión,

En lo que sigue presentamos un problema sobre probabilidad, junto con algunas de las respuestas proporcionadas por estudiantes.

a. Resuelve el problema.
b. Indica el contenido matemático que tienen que usar los alumnos para dar la respuesta correcta.
c. Señala cuál o cuáles de las respuestas dadas por alumnos son correctas.
d. Para cada una de las respuestas incorrectas señala las posibles intuiciones o estrategias incorrectas que han llevado a los estudiantes a dar una respuesta errónea.

Problema. En una caja hay 4 bolas rojas, 3 verdes y 2 blancas. Se sacan sucesivamente bolas sin mirar, sin devolver la bola a la caja una vez sacada ¿Cuántas bolas debe uno sacar para estar seguro de que se obtendrá una bola de cada color?

Respuestas de los alumnos

A1. "*Tres, porque hay tres tipos de colores*"

A2. "*Debe sacar tres bolas, a lo mejor le toca una roja, una verde y una blanca*"

A3. "*Si se sacan primero las rojas y verdes son siete, pero como hace falta una de cada color, pues ocho*"

A4. "*Nunca se puede estar seguro, porque a lo mejor sacas dos rojas y dos verdes*"

A5. "*Debe sacar nueve, es decir todas, y así estará lo más seguro posible*"

A6. "*Debe mirar en la caja y así estará seguro de sacar una de cada color*".

Figura 1. Tarea propuesta a los futuros profesores

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Conocimiento común del contenido

En la Tabla 1 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas a partir del análisis de contenido de las respuestas de los futuros profesores al primer apartado del problema, teniendo en cuenta las establecidas en el estudio de Cañizares (1997). En ella se observa que la categoría mayoritaria es "8 bolas" (46.3%), donde hemos incluido a los futuros profesores que han respondido correctamente. Un ejemplo es el siguiente: "*El total es nueve se le resta el número de bolas que vamos a sacar. A la cuarta rojo, a la séptima verde, a la octava blanco*" (alumno 24).

Tabla 1. Frecuencia y porcentaje de respuestas

	Futuros profesores (n=283)		Alumnos (10-14 años) (n=143)	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
2 bolas	3	1.1		
3 bolas	27	9.5	48	33.6
4-5 bolas	20	7.1		
6 bolas	24	8.5	37	25.8
7 bolas	8	2.8		
8 bolas (*)	132	46.3	19	13.3
9 bolas	23	8.1	18	12.6
Otras	13	4.6	17	11.9
No contesta	33	11.7	4	2.8

(*) Respuesta correcta

Entre las respuestas incorrectas, aparece en primer lugar la categoría "3 bolas", donde están los futuros profesores que han respondido que es necesario extraer tres bolas, que muestran confusión entre los conceptos de suceso seguro y suceso posible, seguidas de las categorías "6 bolas" (8.5%) y "9 bolas" (8.1%). Con porcentajes menores aparecen una gran variedad de categorías, donde hemos incluido los futuros profesores que por falta de capacidad combinatoria no estiman bien el número de bolas, dando respuestas diferentes. En la categoría "Otras" hemos incluido a los futuros profesores que aportan respuestas incoherentes, o indican que no comprenden bien el enunciado "*¿se vuelven a meter las que se sacan? No lo tengo muy claro este ejercicio* (alumno 33), que muestra una confusión entre muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento.

Los resultados revelan que la mayor parte de los futuros profesores de educación primaria muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al suceso seguro y a los conceptos probabilísticos relacionados, ya que solo el 46% de los futuros profesores responde correctamente a la cuestión planteada. Estos resultados son mejores que los obtenidos por Azcárate (1995), que fueron solo del 3 y el 14 % en dos problemas sobre el espacio muestral. Entre las dificultades destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible, la falta de razonamiento combinatorio, que se manifiesta en los que responden que hay que extraer todas las bolas (8.1%), descrita también por Azcárate (1995). En otros casos, como indican Hawkins et als. (1992), se ha podido producir una interpretación incorrecta del experimento aleatorio que ha llevado a los futuros profesores a considerar un espacio muestral incorrecto.

Aunque los futuros profesores han obtenido un porcentaje mucho mayor de respuestas correctas que los niños participantes en la investigación de Cañizares (1997), todavía existe una proporción muy importante de ellos que incurre en errores (42%), en algunos casos, similares a los que cometen los estudiantes a los que han de formar.

Conocimiento especializado del contenido

El análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado b) muestra que el contenido matemático mejor identificado por ellos fue el concepto de probabilidad (16 grupos). El azar y la aleatoriedad son citados por pocos grupos (10 grupos). Un ejemplo es el siguiente: "*El alumno deberá ser capaz de estimar la mayor o menor frecuencia con la que ocurren los fenómenos y para resolver el problema planteado debe tener claro la 'intuición del azar*" (grupo 4). Es también escasa la mención al razonamiento combinatorio (4 grupos), como la siguiente: "*Este es un caso de razonamiento combinatorio ya que tenemos que enumerar todos los casos en un experimento aleatorio*" (grupo 21). Hicieron referencia a porcentajes y a diagrama de árbol (2 grupos), en ambos casos. Destacar que hay siete grupos que no contestan.

Han sido incorrectamente identificados como contenidos matemáticos necesarios para la resolución de este problema los relacionados con la estadística (5 grupos) y el enfoque frecuencial de la probabilidad (3 grupos), ya que en este problema no se utilizan. Por ello, se considera que el conocimiento especializado del contenido mostrado por los futuros profesores es muy escaso, lo que apoya las conclusiones del estudio de Chick y Pierce (2008), que indica que algunos profesores no son capaces de identificar los conceptos latentes en una situación didáctica relacionada con la estadística.

Conocimiento del contenido y los estudiantes

El análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado c) muestra que la mayor parte de los grupos fue capaz de discriminar las respuestas correctas e incorrectas a este problema. La única respuesta correcta del alumno A3 fue identificada como tal por 26 grupos. Los casos más difíciles de discriminar fueron las respuestas A4 y A5, donde respectivamente siete y seis grupos de futuros profesores consideran que son correctas, debido a que no han sabido distinguir entre suceso seguro y suceso posible o debido a que piensan que no se puede saber el resultado al ser un experimento aleatorio. Un ejemplo, la respuesta sobre el alumno A4: "*El niño descubre que el ejercicio se basa en el azar y que existen multitud de posibilidades y variarán los colores y no se podrá estar seguro de los colores que sacarán*" (grupo 25). Otro caso con cierta dificultad fue la respuesta A6, que cuatro grupos consideran correcta, debido posiblemente a que no comprenden el enunciado del problema que prohíbe explícitamente mirar cuando se sacan las bolas de la caja.

En la Tabla 2 se presenta la frecuencia de las categorías obtenidas, a partir del análisis de las respuestas de los futuros profesores al apartado d), en modo cíclico e inductivo. En ella se observa que pocos grupos detectan las causas de los razonamientos erróneos, dando explicaciones alternativas. La estrategia errónea de confundir el número mínimo de bolas que debe extraer, para obtener tres colores diferentes, con el suceso seguro (alumno A1) fue la más reconocida (20 grupos). Un ejemplo es el siguiente: "*Tres es el número mínimo de bolas que se pueden sacar, pero para estar seguro de sacar una de cada color hay que sacar como máximo 8 bolas*" (grupo 18). Le siguen las estrategias erróneas de confundir el suceso seguro con el suceso posible (alumno A2), identificada por 18 grupos y la de no comprender el enunciado del problema (alumno A6), reconocida por 17 grupos. Entre las explicaciones alternativas están las que indican que los alumnos de primaria han respondido de forma incorrecta debido a que no tienen conocimiento de probabilidad, o que no comprenden el azar o la aleatoriedad, sin explicitar la causa del posible error. Por ello, se considera que los futuros profesores muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, al reconocer las respuestas erróneas, pero la habilidad para explicar los errores de los alumnos es insuficiente, lo que coincide con el estudio de Watson (2001).

Tabla 2. Identificación de dificultades por los grupos de futuros profesores en respuestas erróneas (n= 31).

Explicación dada al error del alumno ficticio	A1 Confunde seguro nº mínimo bolas	A2 Confunde Seguro posible	A4 Nunca seguro	A5 Fallo raz combinat (Sacar todas)	A6 No comprende enunciado (Debe mirar caja)
Explicación correcta	20	18	4	5	17
El futuro profesor no lo explica bien		2	5	4	3
Respuesta del alumno no adecuada			1	7	2
El alumno piensa en el azar		3	2		
El alumno no comprende el azar/aleatoriedad	3	1		2	1
El alumno no justifica la respuesta			2		
El alumno no tiene conocimiento de probabilidad	3	1	4	2	1
El alumno no realiza un razonamiento matemático	1	2	1	1	
El alumno no entiende el problema	1		2		1
El alumno no contesta	1	1	1	1	4
Nunca estamos seguros por ser un juego aleatorio	1	1		1	1

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES EDUCATIVAS

Más de la mitad de los futuros profesores de educación primaria participantes en este estudio muestra un conocimiento común insuficiente del contenido en relación al suceso seguro y a conceptos probabilísticos relacionados, ya que responden incorrectamente a la cuestión planteada. Entre las dificultades destacan la confusión entre suceso seguro y suceso posible y la falta de razonamiento combinatorio.

El conocimiento especializado del contenido en los participantes es claramente insuficiente, ya que la idea de probabilidad solo ha sido reconocida por la mitad de los grupos de futuros profesores y la de aleatoriedad por la tercera parte. Los futuros profesores muestran algunos conocimientos del contenido y los estudiantes, pero la habilidad para explicar los errores de los alumnos es insuficiente. Para mejorar la formación en estos aspectos, se les debería dar a conocer los resultados de investigaciones sobre didáctica de la probabilidad. Subrayar que estas conclusiones solo se refieren al conocimiento de los participantes sobre los conceptos involucrados en este problema.

Una implicación de interés es la necesidad de reforzar la formación de los futuros profesores de educación primaria en las diferentes componentes del conocimiento para la enseñanza de la probabilidad. Respecto a la metodología, se sugiere proponer a los futuros profesores una muestra de situaciones experimentales y contextualizadas, que sean representativas del suceso seguro y los conceptos probabilísticos relacionados. Para prepararlos en la componente didáctica se pueden utilizar situaciones como la usada en este trabajo. Las nuevas tecnologías y los foros de discusión pueden ser también un vehículo formativo a tener en cuenta (Viseu y Ponte, 2009).

Agradecimientos: Plan Propio Investigación Universidad de Granada: Programa 20; Proyecto EDU2010-14947 y Grupo FQMN-126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Azcárate, P. (1995). *El conocimiento profesional de los profesores sobre las nociones de aleatoriedad y probabilidad. Su estudio en el caso de la educación primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Cádiz.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics, 32,* 181-199.

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.) (2011). *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. A joint ICMI and IASE study*. New York: Springer.

Batanero, C., Godino, J. D., & Cañizares, M. J. (2005) Simulation as a tool to train Pre-service school teachers. En J. Addler (Ed.), *Proceedings of ICMI First African Regional Conference* [CD ROM]. Johannesburgo: International Commission on Mathematical Instruction.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y de las creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Chick, H. L., & Pierce, R. U. (2008). Teaching statistics at the primary school level: beliefs, affordances, and pedagogical content knowledge. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE Study: Teaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference*. Monterrey: ICMI and IASE. On line: http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Contreras, J. M. (2011). *Evaluación de conocimientos y recursos didácticos en la formación de profesores sobre probabilidad condicional*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Fischbein, E., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1991). Factors affecting probabilistic judgements in children in adolescence. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 523-549.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Hawkins, A., Jolliffe, F., & Glickman, L. (1992). *Teaching statistical concepts*. London: Longman.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics, 6,* 187-205.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in*

Mathematics Education, 4 (39), 372-400.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education, 30,* 487-519.

López, C. (2006). Stochastics and the professional knowledge of teachers. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics* [CD-ROM]. Salvador (Bahía) Brasil: International Statistical Institute.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria. Madrid: *Boletín Oficial del Estado,* nº 293.

N. C. T. M. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston: VA, NCTM.

Ortiz, J. J., Mohamed, N., Batanero, C.; Serrano, L., & Rodríguez, J. (2006). Comparación de probabilidades en profesores en formación. En P. Bolea, M. J. Gonzáles y M. Moreno (Eds,), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 268-276). Huesca, España: SEIEM.

Shaugnessy, & Cincetta (2002). Students' understanding of variability in a probability environment. En B. Philips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Teching of Statisitics* [CD ROM]. Cape Town, South Africa: International Statistical Institute.

Viseu, F., & Ponte, J. P. (2009). Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(3), 383-413.

Watson, J. M. (2001). Profiling teachers competence and confidence to teach particular mathematics topics: The case of chance and data. *Journal of Mathematics Teacher Education, 4*(4), 305-337.

CONTANDO CARAS, VÉRTICES Y ARISTAS. ELABORACIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER. UN ESTUDIO EXPLORATORIO

Counting faces, vertices and edges. Elaboration of Euler's formula . An exploratory study

Cristina Pérez[a] y Gregoria Guillén[b]

[a]Universidad de València, [b]Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de València

Resumen

Presentamos un estudio exploratorio desarrollado con estudiantes de 4º de la Enseñanza Secundaria Obligatoria usando la elaboración y demostración de la fórmula de Euler como situación-contexto para desarrollar diferentes contenidos geométricos de secundaria. Nos fijamos en las estrategias utilizadas al contar las caras, vértices y aristas de diferentes sólidos a partir de diferentes representaciones de los mismos (modelos construidos con material comercializado, sus desarrollos, dibujos en perspectiva) y tratamos también cuestiones referidas al tipo de argumentación, a dificultades y errores y al uso del lenguaje específico. Los datos se han obtenido mediante tests y una entrevista que se han administrado intercalando entre ellos cierta instrucción en la que se han usado los sólidos como contexto y como objeto de estudio.

Palabras clave: *poliedros, fórmula de Euler, descripción y representación de sólidos, demostración.*

Abstract

*We present an exploratory study developed with fourth-year students of secondary education using the development and demonstration of Euler's formula as context-*situation *to develop different geometric contents of secondary education. We attend to the strategies used to count faces, vertices and edges of different solids from different representations (models built with commercialize material, its developments, perspective drawings) and we also deal with the type of argument, difficulties and errors issues and the use of specific language. The data were obtained through an interview and tests that have been administered interspersed among them some instruction in which the solids have been used as a context and as an object of study.*

Keywords: *polyhedra, Euler's formula, description and representation of solids, demonstration.*

Pérez, C. y Guillén, G. (2013). Contando caras, vértices y aristas. Elaboración de la fórmula de Euler. Un estudio exploratorio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 439-448). Bilbao: SEIEM

PRESENTACIÓN

Encontrar situaciones-contexto desde los que trabajar contenidos geométricos curriculares de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) no resulta sencillo. En este trabajo se utiliza la fórmula de Euler para ello tomando como referente el trabajo de Polya (1966, pp. 65-75) en el que a partir de esta fórmula se trata la inducción en geometría sólida. Este autor, después de hacer notar que un poliedro puede tener muchas caras, vértices y aristas y que ello sugiere distinguir claramente las cantidades envueltas y preguntar por algo definido, cuestiona si es cierto que en un poliedro se incrementa el número de caras cuando se incrementa el número de vértices. Propone examinar y comparar varios cuerpos representándolos “lo bastante claramente para contar las caras vértices y aristas” (pp. 65-66). Los números encontrados se registran en una tabla, se buscan regularidades sobre el aumento de unos elementos en relación con otros y de esta manera se enuncia la fórmula de Euler. En el recorrido de Polya para la justificación y/o refutación de la fórmula resulta también relevante contar los elementos (caras, C, vértices, V, y aristas, A) de diferentes familias de poliedros, de sólidos que no corresponden a poliedros o de formas que no corresponden a poliedros convexos.

El trabajo que presentamos se centra en la problemática de contar elementos de diferentes sólidos. El recorrido por los puntos que Polya (op. cit.) denomina “Poliedros”, “Primeros contactos de apoyo”, “Más contactos de apoyo”, “Una prueba rigurosa” (pp. 65-71), explica que la problemática nos la cuestionemos para los poliedros regulares, para ejemplos de los poliedros arquimedianos, centrando la atención en lo que se mantiene y cambia en el truncamiento de poliedros regulares, y para ejemplos de prismas y pirámides, abordando la problemática de la generalización. Asimismo, al contemplar también la posible refutación de la fórmula de Euler, la cuestión se plantea para los cilindros y otros sólidos que no son convexos. Nos fijamos en las estrategias utilizadas al contar los elementos de los sólidos seleccionados, antes y después de una determinada instrucción, y usando la fórmula de Euler como contexto, además de la elaboración de la fórmula, tratamos cuestiones referidas a la descripción y clasificación de sólidos y representaciones de los mismos, a tipos de argumentación, a dificultades y errores y al uso del lenguaje específico.

La situación actual de la enseñanza/aprendizaje de los sólidos explica que en el estudio se distingan 4 etapas para la toma de datos que se preceden o no con instrucción. Damos cuenta de la instrucción realizada y de los instrumentos diseñados para la toma de datos y se aportan sugerencias para elaborar secuencias de enseñanza basadas en la elaboración y demostración de la Fórmula de Euler.

REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA. MARCO DE REFERENCIA

En trabajos previos hemos indicado las características de nuestro marco de referencia (Guillén, 2004, 2010) que toma como referente el trabajo de Freudenthal (1973) y otros estudios desarrollados en el Instituto que lleva su nombre (Treffers, 1987). Hemos subrayado el lugar dominante que ocupan los contextos-situaciones en esta línea de investigación. Éstas se pueden considerar en términos de la distancia entre el problema y las matemáticas implicadas (Rico, 2004, p. 94) y la propia resolución de problemas puede considerarse como contenido objeto de estudio y también como contexto para trabajar otros contenidos curriculares (Guillén y Siñériz, 2012). El trabajo que presentamos forma parte del estudio del Trabajo fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas, (Pérez, 2012) y corresponde a parte de la exploración realizada al considerar la elaboración y demostración de la fórmula de Euler en estos dos sentidos.

Esta manera de acercarnos a “conjeturar y demostrar”, se ha defendido por diferentes investigadores, quienes han señalado que los estudiantes de secundaria no logran comprender cuál es la finalidad de la demostración (De Villiers, 1993; Hershkowitz, 1998). El aspecto que toma la demostración es más bien como algo añadido a la actividad matemática en lugar de formar parte de ella; en la mayoría de las ocasiones se desatiende el componente visual y los alumnos aprenden a demostrar por imitación, dotando al proceso de demostrar de intranscendencia y distanciándolo del alumno (Hershkowitz, 1998). Los autores mencionados sugieren que se propongan a los alumnos situaciones de debate, en las que tomen partido y conecten con el proceso de demostrar de forma significativa, de modo que se vayan creando nuevas conjeturas y se vaya aumentando el poder de convicción. La demostración no se reduce a la visión de verificación/convicción sino que contempla también otras funciones y papeles, como los enumerados por De Villiers (1993, p. 18): verificación (concerniente a la verdad de una afirmación), explicación (profundizando en por qué es verdad), sistematización (la organización de varios resultados dentro de un sistema de axiomas, conceptos fundamentales y teoremas), descubrimiento (el descubrimiento o invención de nuevos resultados) y comunicación (la transmisión del conocimiento matemático).

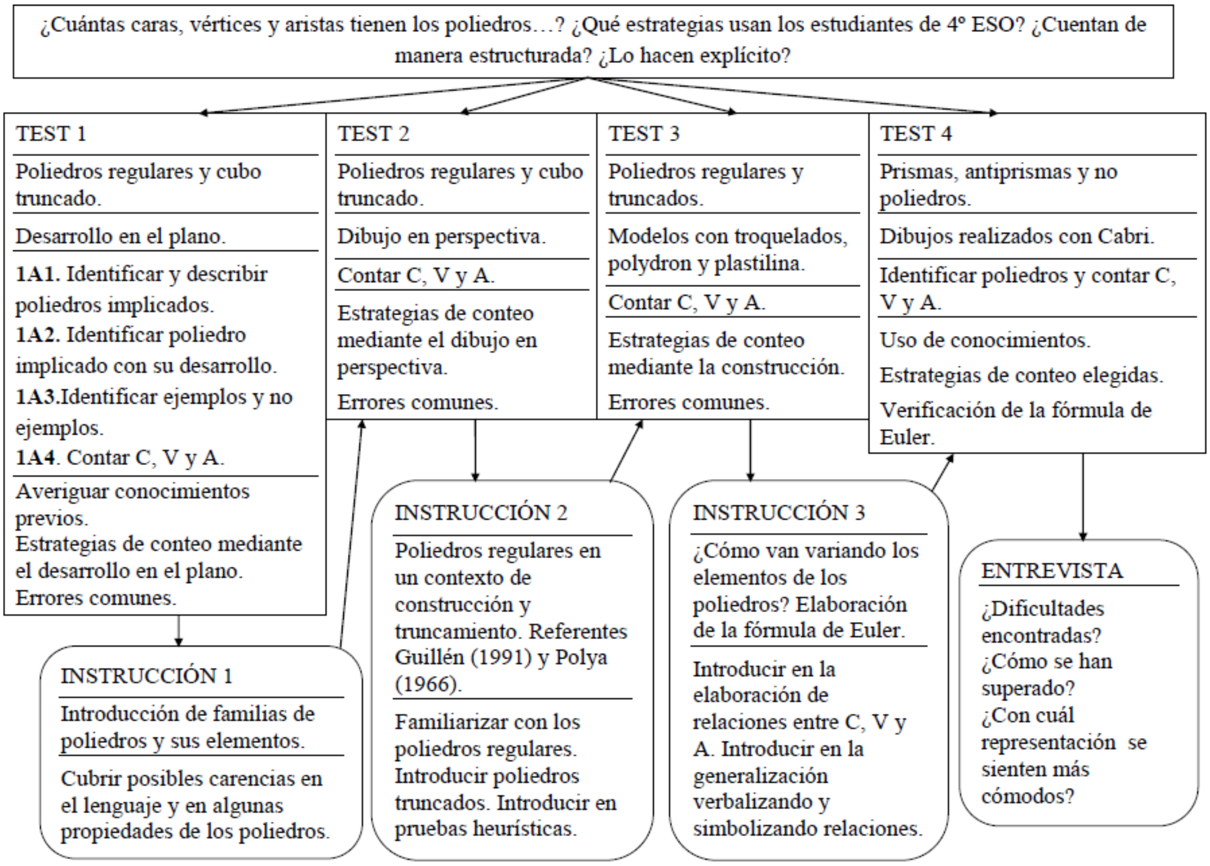
Como referentes del estudio cabe señalar otros trabajos desarrollados por una de nosotras que han puesto de manifiesto algunos errores que cometen los estudiantes referidos a la descripción y/o clasificación de sólidos (Guillén, 2000); comparan respuestas que utilizan razonamientos de diferente nivel de Van Hiele en relación con la tarea de determinar el número de caras, vértices y aristas de los prismas (Guillén, 2004, pp. 86-88), o centran la atención en las características numéricas de los prismas y de las pirámides relativas al número de elementos para mostrar que hay una gran variedad de tópicos geométricos que pueden entenderse por alumnos de diferentes niveles y a niveles diferentes (Guillén, 2010, pp. 32-33). Asimismo, desde Guillén (1991) se explica en parte la instrucción desarrollada para introducir los poliedros regulares y arquimedianos en un contexto de construcción, trabajar la descripción de los mismos e introducir a los alumnos en diferentes tipos de pruebas.

METODOLOGÍA. CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN E INSTRUMENTOS PARA LA TOMA DE DATOS

La experimentación se desarrolló en 3 sesiones consecutivas, en Mayo de 2012, y una sesión realizada al cabo de mes y medio. Por el carácter voluntario de la participación, la duración de las sesiones osciló entre 50 y 70 minutos y participaron entre 24 y 30 estudiantes. Éstos reconocieron tener pocas nociones sobre poliedros y su tutora consideró que su nivel era bajo en general.

El Cuadro 1 muestra el desarrollo de la investigación. En él se han integrado los instrumentos para la toma de datos (tests y entrevista) y la instrucción que tuvo lugar, reflejando a su vez la secuencia del trabajo realizado. Permite vislumbrar el trabajo realizado en las diferentes sesiones pues la numeración de los test y de las instrucciones se corresponde con la sesión en la que se implementaron y su colocación refleja que la entrevista se realizó en la sesión 4. Desde éste también se vislumbran los poliedros implicados en cada test, las representaciones de los mismos con las que se trabaja y la actividad matemática en la que se centra la atención ligada a los propósitos del estudio. Cabe señalar que el primer test (T1) ha funcionado como pretest y el T4 como un postest, de ahí que en los objetivos del primero se contemple “Averiguar conocimientos previos” y en el T4, “Obtener información sobre el uso que se hace de los conocimientos adquiridos en las sesiones previas”. Ambos contienen tareas de identificación y de conteo de elementos pero cambian los sólidos implicados y éstos se presentan con diferentes representaciones.

El T1 consta de 4 actividades en las que se han de identificar dibujos en perspectiva con el nombre del poliedro y describir la forma de sus caras (1A1), el poliedro implicado con su desarrollo (1A2), ejemplos y no ejemplos de desarrollos con el poliedro correspondiente (1A3) o se pide rellenar una tabla con las características numéricas de los poliedros implicados, describiendo su manera de contar (1A4). El Cuadro 1 muestra que el T1 y el T2 contienen una misma tarea (la 1A4) pero cambiando el modo de representación y que en el T3 se amplían los poliedros arquimedianos implicados. Al comparar el T4 y el T1 puede notarse que se han ampliado los poliedros implicados y también el tipo de tareas; el T4 consta de 11 figuras en perspectiva realizadas con Cabri correspondientes a prismas cóncavos y convexos, antiprismas y algún cuerpo que no corresponde a un poliedro (entre ellos el cilindro) y se cuestiona también sobre si verifican o no la fórmula de Euler. El trabajo está ya orientado a la continuación del estudio en el que la fórmula de Euler no sólo se va a verificar con ejemplos concretos sino también con los ejemplos generales de estas familias infinitas y además nos introducimos en la problemática de acotar el mundo de los sólidos para poder mantener la veracidad de la fórmula.



Cuadro 1: Desarrollo de la investigación

La instrucción en la sesión 1 (I1) se centró en la identificación de sólidos y sus elementos y en la manera de "comunicarlos". En la I2 se descubrieron los 5 poliedros regulares en un contexto de construcción con material comercializado y se demostró que no pueden haber más (Guillén, 1991, pp. 43-47); además, se introdujeron los poliedros truncados por el truncamiento de tipo 2 (véase Guillén, 1991, pp. 117-121) centrando la atención en el efecto que produce este tipo de transformación en el aumento del número de caras, vértices y aristas que supone en el sólido este tipo de truncamiento (Polya, 1966, pp. 70-71). En la I3, siguiendo a Polya (1966, pp. 65-68), se elaboró la fórmula de Euler a nivel verbal. Se cuestionó a los estudiantes sobre si pensaban que la fórmula sería cierta para todos los poliedros y se les pidió que intentaran escribir en general la relación encontrada.

REGISTRO Y ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE LOS ESTUDIANTES

Los datos se han obtenido de las respuestas a los test, de las entrevistas grabadas en audio que se realizaron con los 5 alumnos que mayor interés mostraron en las sesiones y de las notas que registraron los estudiantes en un cuaderno durante las instrucciones. El carácter voluntario de la participación explica que el número de respuestas analizadas no sea constante.

El proceso seguido en el análisis ha sido: i) Leer y transcribir las respuestas diferentes, ii) organizarlas en categorías, iii) analizarlas según el tipo de razonamiento que requieren, iv) Crear una base de datos tomando cada ítem como variable cuyo valor es la categoría de respuesta y contabilizar cada respuesta de cada alumno, v) hallar tablas de contingencia y gráficos de frecuencia.

Las categorías que se delimitaron para la actividad 1A3 se indican en el Cuadro 2 junto con algunos ejemplos y la frecuencia. Se contabilizaron las respuestas correctas e incorrectas para cada poliedro y se observó que las respuestas de cada categoría implican razonamientos de diferente tipo (Guillén, 2004): visuales y apoyándose en propiedades.

Categoría	Ejemplos	Frecuencia
No se justifica o se hace de manera imprecisa.	'Porque la figura no es la misma' 'Sí, es el tetraedro'	115
Se basan en atributos visuales.	'Porque lleva esquinas en los bordes' 'No lo es porque no encaja al montarlo'	225
Se basan en algún atributo de algún elemento (C, V o A) que tiene un fuerte componente visual.	'Porque una de sus caras es desigual' 'No es porque uno de los lados está a un mismo lado'	109
Se basan en alguna propiedad del sólido relativa a algún elemento.	'Porque tiene 20 caras de forma triangular' 'Porque tiene una base y 3 caras laterales'	80

Cuadro 2: Tipos de respuesta para identificar ejemplos y no ejemplos.

El Cuadro 3 registra las categorías para el resto de cuestiones de los test. Puesto que el T4 tiene como objeto evidenciar la adquisición de conocimientos aplicados a nuevos poliedros, las categorías de estrategias se restringen a aquellas que caracterizan los distintos tipos razonamiento (Guillén, 2004). Para la realización de los gráficos se subdividió cada categoría en 3 niveles según que los datos se refieran a las caras, vértices o aristas y se crearon bases de datos para las variables categoría y nivel, contabilizando cada respuesta.

Estrategias al contar C, V y A	T1, T2, T3	T4
1. Contando uno a uno: Se dice que se ha contado a mano desde el desarrollo, la figura o imaginando el poliedro mentalmente.	X	
2. Contando y marcando: Se indica que se ha señalado el elemento en el desarrollo o figura.	X	
1 ò 2 Contando a mano, señalando o no.		X
3. Conllevan algún análisis del poliedro: Se analiza la disposición de los elementos en el espacio, se divide en partes el poliedro o se apoyan en un dibujo para construir.	X	X
4. Se relacionan los elementos con el nombre del sólido y/o entre ellos usando argumentos que pueden ser imprecisos: Se deduce el número de caras por el nombre del poliedro; se usa la forma de la cara, los elementos que se comparten para deducir el número de otros elementos; o se deducen los elementos de un poliedro truncado a través del regular.	X	X
5. Se verbalizan fórmulas que expresan relaciones entre los elementos: Se hace explícita alguna fórmula pero de forma verbal. Por ejemplo: A=Cxnº de lados de las caras/2.	X	X
6. Se expresan expresiones aritméticas correspondientes a fórmulas que relacionan los elementos: Aparece alguna fórmula de la anterior pero escrita con números.	X	
7. Se cambia la operación que se tiene que realizar o el número de algún elemento: Conllevan alguna relación numérica entre los elementos con error en la operación o en alguno de los números.	X	

Cuadro 3: Categorías de respuesta relativas a estrategias de conteo.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Por la brevedad de este informe sólo vamos a dar breves pinceladas sobre los datos obtenidos. Los agrupamos como sigue:

Conocimientos previos sobre poliedros. En relación con las respuestas al ítem 1A1 cabe señalar: Todos los alumnos (25) identificaron correctamente el cubo, un 80% el dodecaedro, un 48% el octaedro y un 40% el tetraedro y el icosaedro. Sin embargo, un 26% identificó las caras del tetraedro como triángulos isósceles y un 37% identificó las caras octogonales del cubo truncado obviando las triangulares. Las respuestas obtenidas a partir del T1 tienen un gran componente visual y aunque en algunas respuestas se utilizan propiedades geométricas, éstas son incorrectas y/o no se expresan con precisión. Se reflejan ideas erróneas que se indican en Guillén (2000). Parece que desplegar poliedros y plegar desarrollos mentalmente conlleva dificultades y también el uso del lenguaje específico.

Estrategias de conteo. Las Figuras 1 a 3, construidas a partir de 210, 243 y 231 respuestas respectivamente, muestran el uso que se ha hecho de estrategias que se enumeran en el cuadro 3 cuando los sólidos se han “comunicado” mediante un desarrollo (T1), un dibujo (T2) y mediante la construcción de modelos (T3). Las respuestas que incluimos en el cuadro 4 del anexo 1, que nombramos como E1, E2,… aclaran los comentarios que indicamos a continuación.

A partir de desarrollos planos (T1) la estrategia más usada ha sido el conteo, aunque algunos alumnos ya marcan los elementos contados, tratan de descomponer el poliedro en casquetes (E1), imaginarse la disposición de los elementos en el espacio (E2) y elaborar algunas relaciones numéricas entre los elementos (E3). El error más común se refiere al número de aristas o vértices que se comparten (E4).

Con figuras en perspectiva (T2), después de la instrucción I1, no se muestra mejora en las estrategias de conteo utilizadas, si bien parece que se cambia la estrategia según los elementos que se cuentan (C, V y A). Se ha evidenciado con frecuencia la estrategia de contar *lo que se ve* y multiplicar por 2 (E5), lo que con frecuencia ha llevado a resultados incorrectos. Al comparar las respuestas con las del test 1, las expresiones son más pobres y muestran menos recursos para elaborar relaciones entre los elementos (E6); suelen aparecer errores al cambiar la operación o algún número, referido a forma de las caras o al nº de elementos (E7).

Mediante la construcción de modelos (T3), se observan cambios considerables en las estrategias elegidas y una mayor consistencia en las estrategias seguidas para hallar el número de los diferentes elementos (C, V y A). Predominan las estrategias que conllevan un análisis (E8) o deducción (E9). Las respuestas son más estructuradas y detalladas; en ellas se usa más vocabulario específico (E10) y los razonamientos se apoyan más en relaciones entre diferentes sólidos y en las propiedades de éstos (E11); requieren de razonamiento de mayor nivel.

Observando la Figura 3 puede notarse el aumento de las estrategias de deducción para contar el nº de caras. Ello se explica por haber incorporado más poliedros arquimedianos en el test. Se puede concluir que para contar el número de caras de un poliedro, sólo si se trata de un poliedro truncado se prefiere utilizar argumentos deductivos, apoyándose en el número de elementos del poliedro regular correspondiente. El nombre del poliedro regular sugiere su número de caras y, para el resto, se prefiere contar para determinar ese número, sin importar el tipo de representación. Es al contar vértices y aristas cuando surgen con más frecuencia las estrategias que expresan relaciones entre diferentes elementos y propiedades de los sólidos, aunque no sean correctas, y, como hemos señalado, en ello influye el tipo de representación.

En la entrevista se expresó que si bien el desarrollo en el plano era lo que se prefería para contar las caras de un poliedro, la construcción había sido muy clarificadora para después poder contar los otros elementos de diferentes maneras. Ningún alumno optó por la figura en perspectiva añadiendo que ‘no conocían suficientemente la figura’.

Sobre cómo se usan los conocimientos. La Figura 4 muestra las estrategias usadas en las respuestas al T4. Cuando se considera ‘sencilla’ la figura se prefiere contar desde ella. Cuando es un prisma de base regular se determinan sus elementos en función del polígono de la base (E12). En otros casos se cuenta de manera estructurada (E13). Los argumentos deductivos casi siempre conllevan alguna relación numérica de forma bastante precisa, decidiendo qué elemento se elegía como primer elemento para poder contar los otros (E14). Comparando con las respuestas de T2 ha habido una evolución muy evidente.

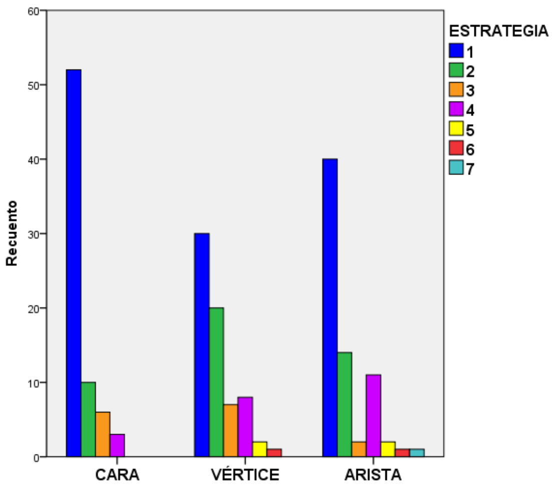


Figura 1: Estrategias de conteo en Test 1

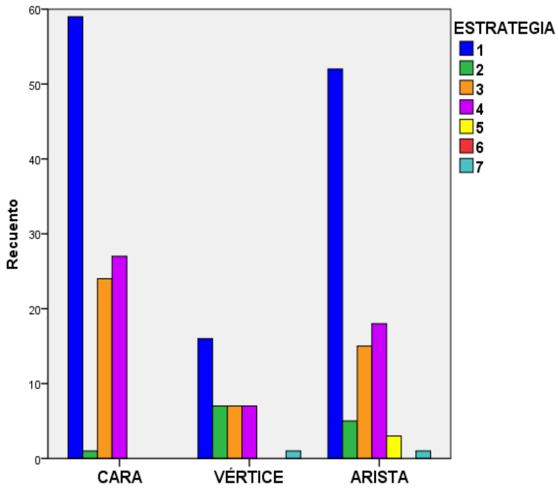


Figura 2: Estrategias de conteo en Test 2

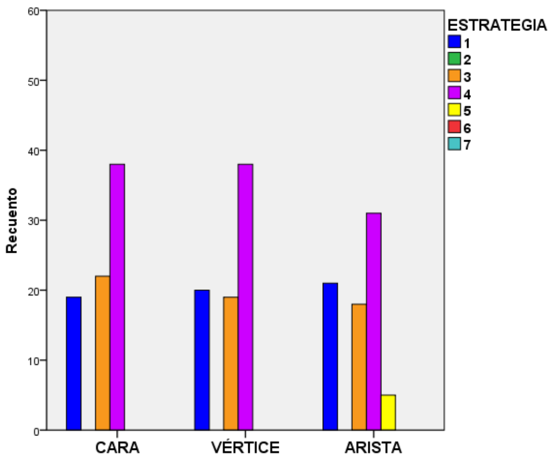


Figura 3: Estrategias de conteo en Test 3

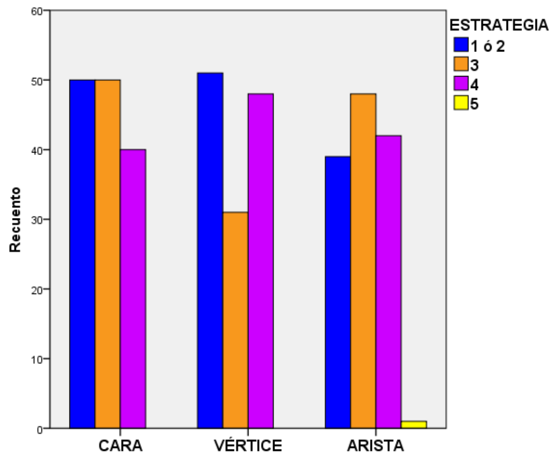


Figura 4: Estrategias de conteo en Test 4

Sobre la fórmula de Euler. Los estudiantes no estaban familiarizados con cuestiones sobre cómo varían los elementos de los poliedros unos en relación con los otros. Les ha resultado sorprendente ordenar los datos en una tabla de diferentes maneras al hacerlo desde el aumento del número de caras, vértices o aristas. Las relaciones de igualdad que existen entre elementos de poliedros regulares duales surgieron de inmediato; sin embargo los estudiantes precisaron de bastante orientación, referida a la variación conjunta de caras y vértices, para llegar a conjeturar la fórmula de Euler. Además mostraron dificultad para generalizar. Pocos estudiantes pudieron establecer la relación $C + V = A + 2$.

CONCLUSIONES FINALES

Con el estudio realizado se ha constatado la riqueza que ofrece el proceso de elaboración de la fórmula de Euler como situación-contexto. Aún centrándonos especialmente en el contar los elementos de los sólidos implicados, ha proporcionado oportunidades para que los estudiantes, por un lado, describan, clasifiquen y “comuniquen” de diferentes maneras sólidos de distintas familias; por otro, establezcan relaciones de diferente tipo, entre diferentes sólidos, sus representaciones y entre sus elementos, elaboren conjeturas que relacionan distintos elementos de los poliedros, introduciéndonos además en la generalización y particularización. Asimismo, el álgebra ha surgido de forma natural para expresar las relaciones establecidas, y también nos hemos adentrado en tipos de argumentación y en la demostración, bien al analizar los tipos de respuesta dados o al cuestionar sobre las relaciones encontradas al realizar la instrucción; la demostración ha formado parte de la actividad matemática y en ella se ha prestado atención especial a los aspectos visuales y analíticos (Guillén, 2004, Hershkowitz, 1998) y a otros aspectos de la prueba que se han delimitado en la investigación (De Villiers, 1993).

Cabe destacarse también las dificultades y errores que se han detectado en el estudio señaladas en otros estudios (Guillén, 2000), especialmente relativas al uso del lenguaje específico. Al estudio de la geometría de los sólidos se le tiene que dedicar más atención. Es importante trabajarla en un contexto de construcción. En el poco tiempo que duró la experimentación los estudiantes mostraron una clara evolución; aún usando el mismo tipo de representación para los sólidos (el dibujo en perspectiva), desde respuestas con gran componente visual, que se apoyaban claramente en la figura, pasaron a otras más precisas y estructuradas que se apoyaban en el análisis y propiedades de los sólidos y en las transformaciones que tenían lugar en ellos.

Cabe destacarse que la participación activa de los alumnos en las sesiones, quienes se implicaron de manera clara en la construcción, permitió revisar ideas erróneas, relacionar conceptos de la geometría plana y de los poliedros y crear nuevas relaciones entre los elementos de éstos en las que era usual considerar las características de los poliedros, como por ejemplo el orden de los vértices, para establecerlas.

REFERENCIAS

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. [Trad. Álvarez, J.M.]. *Epsilon, 26,* pp.15-30.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel.

Guillén, G. (1991). *El mundo de los poliedros*. Madrid: Síntesis.

Guillén, G. (2000). Sobre el aprendizaje de conceptos geométricos relativos a los sólidos. Ideas erróneas. *Enseñanza de las Ciencias*, *18* (1), 35-53.

Guillén, G. (2004). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos: Describir, clasificar, definir y demostrar como componentes de la actividad matemática. *Educación Matemática*, *16* (3), 103-125.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno, M; A. Estrada; J. Carrillo y T. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación matemática XIV* (pp. 21- 68). Lleida: SEIEM.

Guillén, G. y Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa; A. Contreras; J. Deulofeu; M.C. Penalva; F.J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 331-340). Jaén: SEIEM.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. In C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st Century, An ICMI Study* (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer.

Pérez, C. (2012). *Contando caras, vértices y aristas. La fórmula de Euler.* Memoria del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas. Universitat de València. Valencia.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid: Tecnos [Versión orig. *Mathematics and Plausible Reasoning*. 2 vols. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1954].

Rico, L. (2004). Evaluación de competencias matemáticas. Proyecto PISA/OCDE 2003. En E. Castro y E. De la Torre (Eds.), (2004). *Investigación en Educación Matemática VIII* (pp. 89-102). A Coruña: SEIEM.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions (a model of goal and theory description in mathematics instruction - the Wiskobas Project*. Dordrecht: D. Reidel.

ANEXO 1

E.1. *Dodecaedro – Vértice:* Sabiendo que hay una base inferior y otra superior que suman 10 y después las 10 caras restantes suman en total 10 vértices más.

E.2. *Cubo – Vértices:* Sabiendo que hay 4 vértices en la cara de arriba también habrá 4 en la de abajo.

E.3. *Dodecaedro – Aristas:* He contado los hexágonos[1] y para saber las aristas he multiplicado por los 12 hexágonos por sus 6 aristas y lo he dividido entre 2 ya que comparten arista.

E.4. *Tetraedro – Aristas:* Como cada triángulo tiene 3 aristas he multiplicado 3 por el nº de aristas

E.5. *Icosaedro – Caras:* Contar las caras que se ven y multiplicar por 2.

E.6. *Octaedro – Vértices:* Cuento los extremos y luego los del medio.

E.7. *Cubo truncado – Arista:* Cuento como si fuesen 6 pentágonos (6x5) y los 8 triángulos (8x3): 30+24=54.

E.8. *Octaedro – Caras:* Parto el octaedro en dos tetraedros, cada uno tiene 5 vértices y 5 caras. Una de las caras, la base, desaparece al juntar las dos partes y se queda en un octaedro de 8 caras.

E.9. *Tetraedro truncado – Vértices:* Por cada corte nos salen 2 vértices más de los que teníamos: 2x4=8+4=12.

E.10. *Tetraedro truncado – Caras:* Un tetraedro tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Si hacemos un corte a cada uno de sus vértices salen 4 caras. Por cada corte nos sale 1 cara más: 4x1=4+4=8.

E.11. *Dodecaedro – Aristas:* De cada vértice salen 3 aristas y hay 20 vértices pero la mitad los comparte así que tiene 30 aristas.

E.12. *Prisma oblicuo de base pentagonal regular – Caras:* Tiene base pentagonal por tanto 7 caras.

E.13. *Prisma decagonal de base regular – Vértices:* La figura tiene 20 vértices que hemos ido contando los 10 de la parte de arriba más 10 de la parte de abajo.

E.14. *Prisma cóncavo recto de base con forma de C – Aristas:* 2 caras de 8 vértices, por lo tanto hay 8 aristas por cada cara superior e inferior y de cada vértice sale una arista que se une al mismo vértice de la cara opuesta 2x8+8=16+8=24.

Cuadro 4: Ejemplos de estrategias de conteo de caras, vértices o aristas de algunos poliedros.

---

[1] Aunque el alumno se ha equivocado de polígono la estrategia seguida es la adecuada.

CARACTERISTICAS DE LA TEMATIZACIÓN DEL ESQUEMA DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN

Characteristics of the thematized schema of limit of function

Joan Pons Tomàs[a], Julia Valls[b] y Salvador Llinares[b]

[a]I.E.S Mutxamel (Alicante), [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación estudia las diferentes estructuras subyacentes en el esquema de límite de una función observadas en 23 estudiantes de Bachillerato situados en el nivel Trans del desarrollo del esquema de límite de una función. El esquema de límite de una función se caracterizó en términos de la habilidad que los estudiantes manifestaron en la construcción de la concepción dinámica del límite mediante la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango, diferenciando aquellas en las que las aproximaciones laterales coinciden de las que no coinciden. Nuestros resultados sugieren que los estudiantes construyen diferentes estructuras subyacentes al esquema debido a las relaciones que establecen entre el límite de una función en un punto y su representación gráfica que permiten identificar características del esquema tematizado del límite de una función.

Palabras clave. Esquema de límite de una función, abstracción reflexiva, tematización.

Abstract

The goal of this research was to study the different underlying structures of the scheme the limit of a function schema of 23 post-secondary students with a trans level of development of the limit of a function schema. The schema of the limit of a function was characterized in terms of the students' dynamic conception of the limit by coordinating the approaches in the domain and in the range, distinguishing those in which lateral approaches match of mismatches. Furthermore, our results suggest that students *generate* different underlying structures in the scheme *in relation to* the relationships established between the limit of a function at a point and its graphical representation.

Key Words. Limit of a function schema, reflective abstraction, thematization.

INTRODUCCIÓN

La teoría APOS es una interpretación piagetiana de la teoría constructivista fundamentada sobre el concepto de abstracción reflexiva. En esta aproximación teórica un esquema es una colección de formas de conocer las ideas matemáticas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente de un individuo en una estructura coherente y que se usan en la resolución de los problemas (Trigueros, 2005). Por otra parte, García, Llinares y Sánchez-Matamoros (2010) sugieren que la construcción de nuevas estructuras matemáticas (como lo son los esquemas) vienen determinadas por las relaciones que los estudiantes de forma consciente son capaces de establecer entre los elementos matemáticos que configuran el concepto matemático. En la caracterización de este proceso, Piaget y García (1989) plantearon tres etapas (intra, inter, y trans) del desarrollo de los esquemas que no siempre se dan de forma lineal. La característica que diferencia las tres etapas es la capacidad de establecer relaciones entre los elementos matemáticos que configuran la noción matemática. Para estos autores, el mecanismo cognitivo que permite este desarrollo es la abstracción reflexiva que se lleva a cabo mediante actividades que tienen un doble sentido: la

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2013).Características de la tematización del esquema de límite de una función. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 449-457). Bilbao: SEIEM.

proyección del conocimiento existente a un plano superior del pensamiento, y la reorganización y reconstrucción de ese conocimiento con la finalidad de establecer nuevas estructuras.

Las investigaciones relativas a la construcción del significado de límite de una función han aportado información sobre algunas características de estos procesos (Blázquez, Ortega, Gatica, y Benegas, 2006; Espinosa y Azcarate, 2000; Vidal y Salinas, 2011; Roh, 2010; Sierra, González y López, 2000; Valls, Pons y Llinares, 2011; Williams, 2001). Cottril et al. (1996) indican que la concepción dinámica del límite cuando se consideran los valores de la función aproximándose al valor límite mientras los valores en el dominio se aproximan a un número no es un simple proceso sino que la coordinación de los dos procesos es de hecho un esquema. Valls et al. (2011) señalan que la comprensión métrica del límite en términos de desigualdades se apoya en que el estudiante sea capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden aunque no sea capaz de determinar esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. Este resultado previo permite caracterizar las producciones de los estudiantes que podían situarse en un nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función (Piaget y Garcia, 1989). Sin embargo, la manera en la que estos estudiantes usaban los diferentes modos de representación cuando se coordinan las aproximaciones en el dominio y en el rango parecía indicar que existen diferentes estructuras cognitivas que podían aportar características de la tematización del esquema de límite de una función (Cooley, Trigueros y Baker, 2009). La tematización de un esquema se caracteriza porque puede ser tratado como un objeto (Asila, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews, y Thomas, 1996). Como consecuencia de esta situación nos planteamos como objetivo caracterizar los procesos de resolución de estudiantes situados en el nivel T*rans* de desarrollo del esquema de límite de una función para identificar características de la tematización del esquema de límite de una función.

METODO

Participantes y contexto

En esta investigación se utilizan las respuestas de 23 estudiantes de una muestra de 129 de primero y de segundo de bachillerato (16-18 años) (Pons, Valls, y Llinares, 2012) que habían contestado a un cuestionario con 10 tareas sobre límites. Este cuestionario tenía como objetivo caracterizar el papel de la coordinación de los procesos de aproximación vinculados a la comprensión del límite de una función. En la resolución de las tareas 23 estudiantes usaron los elementos matemáticos (Tabla 1) relacionados con la concepción dinámica y métrica de límite de una función mostrando evidencias de estar en el nivel Trans del desarrollo del esquema de límite de una función al ser capaces de coordinar, en el dominio y en el rango, las aproximaciones laterales coincidentes en tres modos de representación, y las no coincidentes en dos o tres modos; manifestar formalmente el límite al menos en dos modos de representación cuando las aproximaciones laterales coinciden, y (algunos) establecer la coordinación métrica en términos de desigualdades (Pons, Valls, y Llinares, 2012).

Sin embargo, el comportamiento de los estudiantes en las tareas que requerían obtener información sobre la gráfica de la función conociendo los límites de la función en dos puntos presentaba diferencias en la manera en la que habían encapsulado el proceso de coordinación.

Tabla 1. Elementos matemáticos considerados en el concepto de límite

El *valor de la función* f en x = xo, f(xo) (f es una función y xo un número real
Idea de *aproximación*: x se aproxima a *a* y f(x) se aproxima a *L* *Coordinación dinámica*: cuando x se aproxima a *a*, f(x) se aproxima a *L*
Formalización como una manifestación de ser consciente de la existencia del límite L de la función f(x) en el punto a, escrito como lím f(x) = L
Coordinación métrica: es posible encontrar un x suficientemente próximo a *a*, tal que f(x) esté tan próximo a L tanto como se quiera

Instrumento

Los datos provienen de las respuestas escritas a las Tareas 5 y 10 del cuestionario y de las entrevistas clínicas. Las tareas 5 y 10 (Figura 1) tenían como objetivo determinar si los estudiantes habían encapsulado la coordinación de los procesos de aproximación, es decir, si eran capaces de invertir (Dubinsky, 1991) esta coordinación.

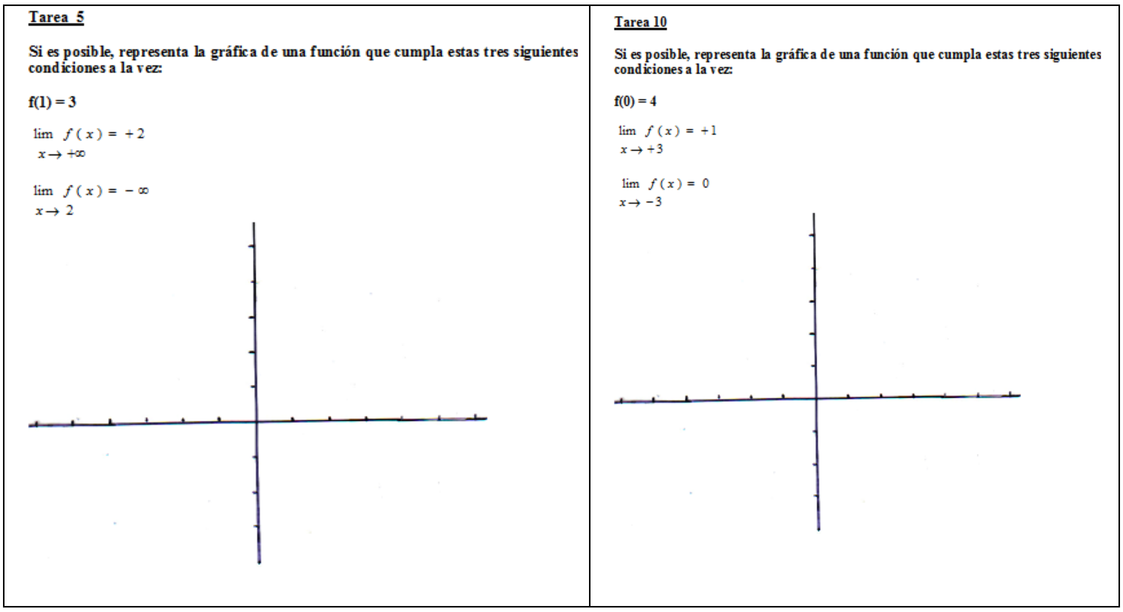


Figura 1. Tareas 5 y 10

En la tarea 5 se pide la gráfica de una función de la que se conocen tres condiciones: que pasa por el punto f(1) = 3; que $\underset{x \to +\infty}{lím} f(x) = +2$ (lo que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x tiende a + ∞ con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 2); y $\underset{x \to 2}{lím} f(x) = -\infty$ (que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a 2, con la aproximación en el rango cuando la función tiende a – ∞).

La tarea 10 solicita la gráfica de una función de la que se conocen tres condiciones: que pasa por el punto f(0) = 4; que $\underset{x \to +3}{lím} f(x) = +1$ (lo que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a 3, con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 1); y finalmente, que $\underset{x \to -3}{lím} f(x) = 0$ (que exige al estudiante coordinar la aproximación en el dominio cuando x se aproxima a – 3, con la aproximación en el rango cuando la función se aproxima a 0).

Las entrevistas se llevaron a cabo después de analizar las respuestas del cuestionario, y después de caracterizar los niveles de desarrollo del esquema de límite de una función en un punto. Para preparar el guión de la entrevista, analizamos las respuestas escritas y nos centramos en la forma en la que parecía que los estudiantes invertían la coordinación de los procesos de aproximación, y en la forma en la que parecía que coordinaban estas inversiones.

Análisis

El análisis se centró en la identificación de los elementos matemáticos usados (Tabla 1) y en las relaciones que los estudiantes construían para resolver las tareas y la clase de justificaciones que daban.

Hemos identificado los elementos matemáticos que usaron los estudiantes y las relaciones que establecieron entre estos elementos para generar nueva información. Además, hemos utilizado las justificaciones que los estudiantes parece ser que procesan cuando analizan sus producciones. El análisis realizado nos ha permitido identificar diferencias en la manera en la que estos estudiantes, situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función, identificaban gráficas de una función a partir de la información del comportamiento del límite alrededor de un punto o del infinito de la función. La resolución de estas tareas muestra dos características de la tematización del esquema de límite que se describen en la sección de resultados.

RESULTADOS

Las características que evidencian la tematización del esquema serán descritas a partir de la manera en la que los estudiantes resolvieron las tareas que les exigían identificar la gráfica de una función a partir de la información dada por los comportamientos en los límites.

Del nivel Trans de desarrollo al esquema tematizado de límite

En la solución de la tarea 10 (Figura 2) el estudiante EST58 no es capaz de coordinar la información analítica del límite de una función en los puntos $x = -3$ y $x = +3$, y la correspondiente al valor de la función en el punto $x = 0$, por lo que no es capaz de representar la gráfica de una función que cumple las tres condiciones dadas.

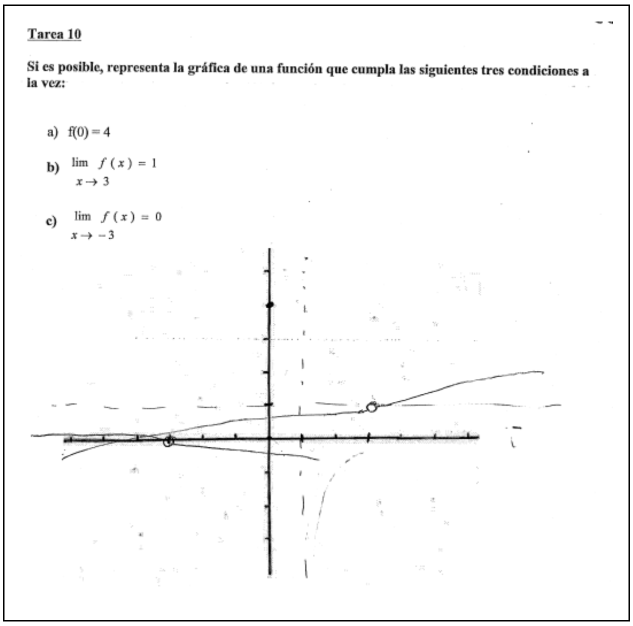


Figura 2. Respuesta de EST58 a la Tarea 10 del cuestionario

Durante la entrevista EST58 (Figura 3) reconoció que no fue capaz de coordinar las tres condiciones, aunque sí era capaz de distinguirlas. Por ejemplo, al indicar mediante una flecha la idea de tendencia (cuando x tiende a 3, la función tiende a 1) sin llegar al punto, de ahí que no los marque. Las flechas dibujadas parecen indicar que reconoce explícitamente la lateralidad en el sentido de aproximaciones laterales coincidentes.

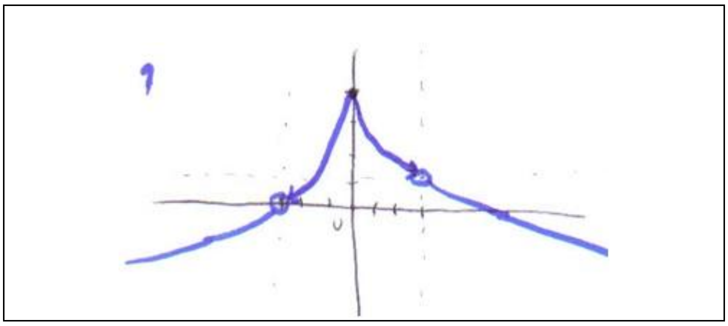


Figura 3. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10

Cuando se le sugiere que busque otra solución (Figura 4) y como en la tarea no se especifica la forma de la función, EST58 termina dibujando lo que podría ser una parábola. Después de hacer esta segunda gráfica, se le pide si podría dar otra solución, y en esta ocasión piensa en una recta (Figura 5).

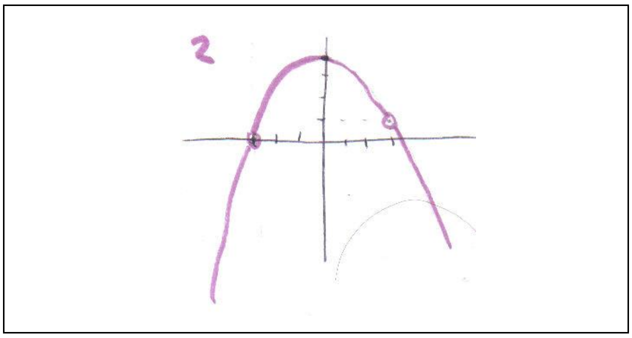
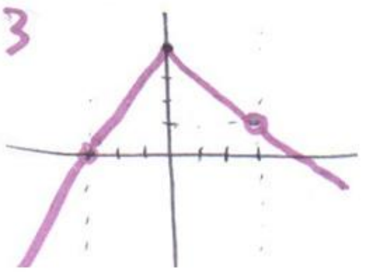


Figura 4. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10



Inv: En todas las gráficas estás poniendo el círculo, ¿qué indica el círculo?

EST58: El círculo indica que no está incluido.

Inv: Es decir, se aproxima.

EST58: Se aproxima, pero no llega.

Inv: Esa es tu idea de límite, porque lo estas marcando en todos los sitios.

EST58: Sí,...

Inv: ¿Cuántas soluciones tiene el problema?

EST58: Podría haber infinitas, creo, lo que yo he puesto son diferentes formas. Hay unas condiciones que determinan la función, bien, pero aquí estamos utilizando diferentes formas, y si continuamos así, hacemos infinitas formas con las mismas condiciones.

Figura 5. Extracto de entrevista a EST58 vinculada a la Tarea 10

Estas respuestas indican que el estudiante EST58 es capaz de coordinar, después de las intervenciones del entrevistador, los procesos de aproximación en el dominio y en el rango trasladando la información desde la expresión analítica a la gráfica lo que puede ser interpretado como la proyección del conocimiento de límite de una función en un punto a un plano superior del pensamiento. Sin embargo, otros estudiantes fueron capaces de representar la función desde el primer momento cuando la información procedía del modo analítico al incorporar al proceso de resolución la idea de asíntota. Por ejemplo, la manera en la que el estudiante EST117 resuelve la tarea 5 muestra como al coordinar las tres condiciones puede representar la gráfica de la función lo que evidencia la tematización del esquema de límite (Figura 6). Las inferencias realizadas desde la representación gráfica son confirmadas mediante la entrevista. En ella EST117 justifica cada una de las condiciones que ha representado en la solución que dio al resolver el cuestionario.

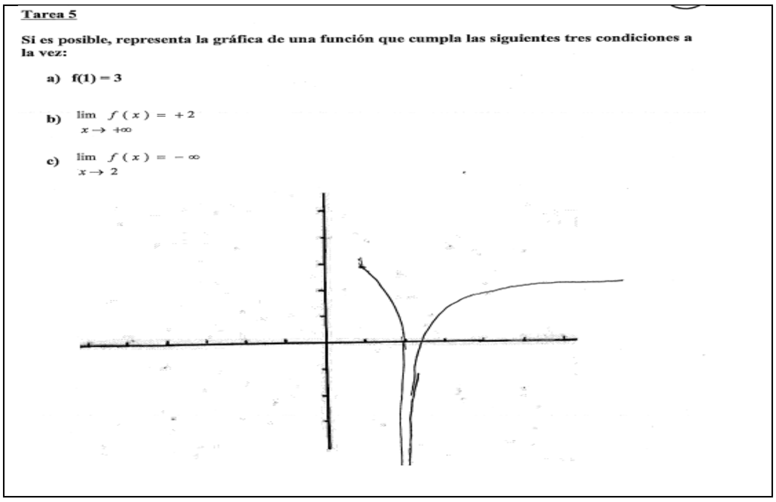


Figura 6. Respuesta de EST117 a la Tarea 5 del cuestionario

EST117: Mira, yo creo que… Este punto está claro que es cuando la función es 1, bueno cuando la x es 1, la y es 3. Cuando x tiende a 2… la función tiende a menos infinito. Es una asíntota vertical, y esta parte de la función está clara. Cuando la x tiende a más infinito, podría ser que viniese desde arriba, no lo sé, tampoco estoy seguro, es que no me acuerdo muy bien de lo que vimos el año pasado...

Las respuestas de EST117 muestran indicios de establecer relaciones con otras ideas matemáticas usadas para resolver la tarea. El uso de la idea de asíntota para dibujar una nueva gráfica puede ser entendido como indicios de reorganización y reconstrucción de su conocimiento (relacionar de manera explícita el significado de asíntota y límite) que genera una nueva estructura cognitiva. Después de justificar de forma explícita la representación gráfica que realizó en el cuestionario y esbozarla con el dedo, se le pidió si podría representar otra función que cumpliera las tres condiciones (Figura 7). EST117 indica que podría haber más asíntotas, y que con esas condiciones podría haber muchas gráficas. Al representar la función en la que introduce una asíntota vertical, que no está en las condiciones iniciales, no explícita en qué valor de la x la está representando. Al preguntarle en qué valor de la x está poniendo la asíntota, EST117 indica expresamente que eso daría igual por lo que no ha puesto ningún número, y que podría hacer lo mismo en el otro lado. El concepto de asíntota vertical que EST117 introduce no está en el enunciado de la tarea y es la misma idea que ya había utilizado en la resolución de la tarea 10. Esta manera de resolver la tarea puede ser interpretado como una evidencia de la relación que EST117 ha establecido de manera explícita entre el significado de límite y de asíntota.

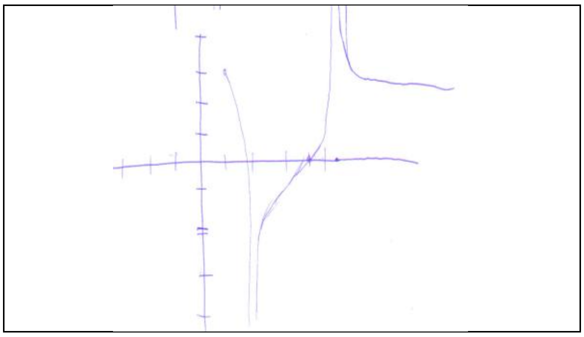


Figura 7. Extracto de entrevista a EST117 vinculada a la Tareas 5

Finalizada la explicación de la segunda gráfica, el entrevistador sugiere a EST117 hacer una nueva representación (Figura 8). El estudiante hace una nueva representación a partir de la anterior (Figura 7) y remarca en las ramas correspondientes, a petición del investigador, que "aço està clar" (esto está claro), indicando expresamente que se cumplen las condiciones requeridas en la tarea y que además puede haber más asíntotas, por lo que pone una asíntota vertical en un valor indeterminado entre el – 1 y el – 2 de las x. EST117 señala que el problema tiene infinitas soluciones. La comprensión de la lateralidad tanto por la izquierda como por la derecha, queda justificada en la representación gráfica y en la forma en que el estudiante la usa.

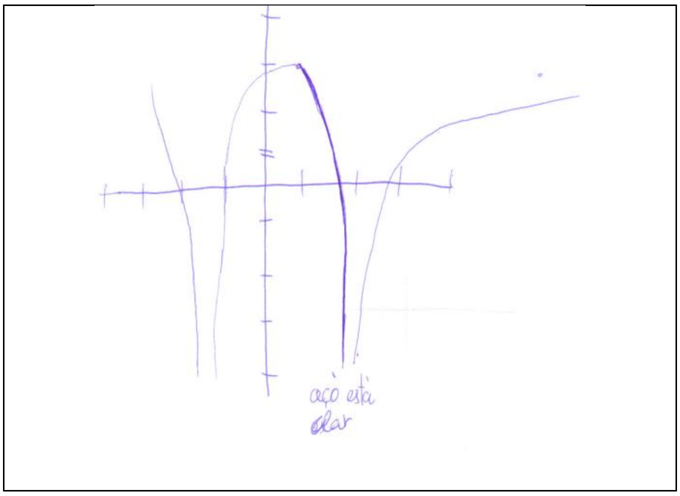


Figura 8. Extracto de entrevista a EST117 vinculada a la Tareas 5

El comportamiento de EST117 ilustra una característica del esquema tematizado de límite puesta de manifiesto por el hecho de establecer de manera explícita relaciones entre el significado de límite (comportamientos alrededor de un punto y en el infinito) y el significado de asíntota como una manifestación de reorganización y reconstrucción de su conocimiento lo que permite generar nuevas estructuras cognitivas. En particular al relacionar los significados de límite lateral con la idea de asíntota vertical sin necesidad de concretizar, poniendo de manifiesto que no importa el valor concreto una vez que ha marcado expresamente las condiciones iniciales de la tarea propuesta.

DISCUSION Y CONCLUSIONES

El objetivo de esta investigación era caracterizar los procesos de resolución de estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de límite de una función para identificar características de la tematización del esquema de límite de una función.

Nuestros resultados indican que los estudiantes con un nivel Trans de desarrollo del esquema pueden establecer vínculos entre los diferentes elementos matemáticos cuando resuelven tareas con límites de funciones mostrando diferentes características del proceso de tematización del esquema.

En particular, las características identificadas proceden de tener en cuenta las dos ideas de lo que constituye la abstracción reflexiva. Estas ideas las hemos usado en la caracterización de la tematización (proyección del conocimiento a un nuevo plano entendida como establecer relaciones entre los significados del límite en situaciones particulares para dibujar gráficas) y la construcción de nuevas estructuras matemáticas (al establecerse relaciones entre diferentes ideas matemáticas como límite y asíntota). Es decir, la tematización del esquema viene determinada por las relaciones que los estudiantes de forma consciente son capaces de establecer entre los elementos matemáticos (García, Sánchez-matamoros, Llinares, 2010).

Los resultados obtenidos muestran tres características de los estudiantes situados en el nivel Trans de desarrollo del esquema de limite de una función en relación a la tematización del esquema: (i) comprensión del significado de límite en un punto y en el infinito pero sin establecer relaciones entre los casos particulares y por tanto no pudiendo considerar conjuntamente los significados de los límites particulares, (ii) establecimiento de relaciones entre el significado de los límites particulares (lo que permite resolver la tarea), como una manifestación del inicio de la proyección del conocimiento existente a un plano superior, y (iii) incorporación de nuevas ideas (relación entre asíntotas y lateralidad de los límites) como una manifestación de la reorganización y reconstrucción del conocimiento que se posee con la finalidad de establecer nuevas estructuras. Esto ocurre cuando los estudiantes usan el límite de una función al coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango y las relaciones de la coincidencia o no de las aproximaciones laterales. Nosotros argumentamos que el uso consciente de la relación del límite de una función en un punto con la representación gráfica de la función al coordinar los procesos de aproximación en el dominio y en el rango es una evidencia de las diferentes estructuras subyacentes del esquema de límite de una función y una evidencia de su tematización.

Agradecimientos. A los profesores: Fernando Arenas, Isabel Buigues, Salvador Caballero, Vicente Carratalá, Jesús García, Paco García, Teresa Grande, Elsa Jordà, Caterina Martínez, Josep Antoni Miquel, Fidel Pastor y Cesar Rodenas. Y a los estudiantes de primer y segundo curso que respondieron a las tareas del cuestionario. Este trabajo no hubiese sido posible sin su inestimable ayuda.

REFERENCIAS

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A.H. Schoenfeld & E. Dubinsly (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* II, 1 – 32.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de Análisis Matemático en la Universidad. *Revista latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 9(*2), 189-209.

Cooley, L., Trigueros, M. y Baker, B. (2009). Schema Tematization: A Framework and a Exemple. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38 (4), 370 – 392.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning whit a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95 – 126). Dordrecht, The Netherlands. Kluwer.

Espinosa, L. y Azcarate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias, 18*(3), pp. 355-368.

García, M., Llinares, S. y Sánchez-Matamoros, G. (2010). Characterizing thematitaized derivative schema by the underlying emergent structures. *International of Journal of Science and Mathematics Education*. 9, pp. 1023-1045

Piaget, J. y García, R. (1989). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Madrid, España: Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). *La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punt*o. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García y L. Ordóñez /Eds.) Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 435 – 445). Jaén: SEIEM.

Roh, K.H. (2010). An empirical study of students' understanding of a logical structure in the definition of limit via the ε-strip activity. *Educational Studies in Mathematics, 73*, 263-279

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre el Límite funcional y continuidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(1), pp. 71-85.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática, 17*(1), 5-31.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(3), 325-338.

Vidal, L.A. y Salinas, M. J. (2011) *Algunas ideas del profesorado sobre aspectos relacionados con la instrucción del concepto de límite funcional.* En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco y M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 587-597). Ciudad Real: SEIEM.

Williams, S.R. (2001). Predications of the Limit Concept: An Application of Repertory Grids. *Journal for Research in Mathematics Education, 32* (4), 341-367.

LA CONVICCIÓN, LA COMPRENSIÓN Y LAS PRÁCTICAS DE RACIONALIDAD EN LA PRIMARIA. ESTUDIO DEL PROFESOR

Conviction, comprehension and rationality practices in primary school. A teacher study.

Mirela Rigo Lemini

Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav. México

Resumen

En la comunicación se aportan evidencias empíricas de que la Convicción que el profesor experimenta en torno a los contenidos matemáticos que surgen en clase -en interacción con su nivel de comprensión- incide en las prácticas matemáticas de sustentación que él ahí promueve. Los datos empíricos, provenientes de un estudio exploratorio de caso realizado en un escenario natural de clase, se analizan con un instrumento para identificar Convicciones matemáticas, elaborado en el marco de la investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen.

Palabras clave: *Convicción, prácticas del profesor, procesos de sustentación*

Abstract

Empirical evidence is provided in the paper to support the idea that the Conviction experienced by the teacher with respect to the mathematics contents that arise in class -in interaction with his level of comprehension- has an impact on the mathematics practices of sustentation that the teacher promotes in class. The empirical data, that come from an exploratory case study undertaken in a natural classroom scenario, are analyzed using an instrument to identify mathematics Convictions, an instrument that was formulated within the framework of the research presented here.

Keywords: *Conviction, teacher's practice; justification process*

ANTECEDENTES Y OBJETIVOS

Para el matemático profesional, la convicción es un motor que impulsa su actividad -en las etapas de desarrollo heurístico- y una guía para certificar sus resultados -durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la convicción también importa en la construcción del conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado o en los estudiantes (e.g., el de Balacheff, 2000, entre otros) o en los profesores (e.g., el de Harel & Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e.g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esas investigaciones, la que aquí se expone se sitúa en un contexto natural de clase y dirige la atención a la figura del docente; se argumenta, específicamente, que su Convicción sobre los hechos de las matemáticas que surgen en clase (definiciones, algoritmos, resultados de ejercicios) –siempre en interacción con su comprensión- incide en las prácticas matemáticas que él ahí promueve. Para sustentar el argumento, se analiza un episodio ilustrativo de clase (porque ahí se muestran distintos niveles de Convicción y comprensión de la docente) impartido por la maestra que se eligió como caso de estudio; el análisis se hace con un instrumento para identificar la Convicción diseñado en el marco de la investigación.

PRECISIONES METODOLÓGICAS

La investigación teórico-empírica que aquí se presenta es de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). Durante un año lectivo se asistió, sólo como observadores, a las clases de matemáticas de sexto grado de primaria que regularmente se ofrecían en cuatro escuelas

Rigo Lemini, M. (2013). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. estudio del profesor. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 459-466). Bilbao: SEIEM.

públicas. Para el análisis que aquí se expone se eligió el caso de la maestra Diana porque en sus clases ella y sus alumnos fueron los que presentaron mayor tendencia hacia la justificación. De Diana se videograbaron y transcribieron 15 clases de 50 minutos de duración, que versaban sobre el tema de razón y proporción y que fueron analizadas e interpretadas en sesiones colectivas por el grupo de investigadores que participó en el estudio (5 personas). Esta profesora, con 25 años de experiencia cuando fue observada, enseñaba a un grupo integrado por 40 jóvenes con edades entre 11 y 12 años, quienes solían obtener muy buenos resultados en las evaluaciones oficiales.

MARCO INTERPRETATIVO

Creencias; Esquemas y Estados Epistémicos; Indicadores de Convicciones

Las creencias constituyen el bagaje de verdades (personales) de los sujetos, quienes casi siempre están en condiciones de aducir ‘razones’ para sustentarlas. En algunos casos, esas razones son juzgadas (por sus interlocutores) como suficientes y objetivas. Pero no siempre es así: cuando una maestra, por ejemplo, justifica su creencia en la verdad de un enunciado matemático E arguyendo que ‘E aparece en el Libro de Texto’, ella no está está sustentando su creencia en razones disciplinares sino en la autoridad que le confiere al texto; en este caso se dice que ella basa su creencia en sus motivos (que la llevan a cubrir distintas necesidades, e.g., didácticas, afectivas) y no en razones (Cf. Villoro, 2002). A los mecanismos a los que acuden habitualmente las personas para justificar o amparar sus creencias, en el marco de esta investigación se les denominan “esquemas epistémicos” (Rigo, Rojano & Pluvinage, 2009). En la clase de matemáticas surgen distintos tipos de esquemas epistémicos; algunos esquemas se vertebran en torno a las razones matemáticas (e.g., deducciones que se desprenden de las definiciones de los conceptos; comprobación de resultados) mientras en otros casos, el soporte, implícito o tácito, en el que se sustenta la creencia en un enunciado matemático obedece a los motivos de la persona que la sostiene. Ejemplos de esquemas epistémicos extra-matemáticos (basados en motivos) son el esquema por autoridad; el basado en ‘razones prácticas’ (las soluciones de los ejercicios son las más sencillas, e.g.), o el de tipo retórico (los recursos estilísticos que utiliza la persona para comunicar una creencia con contenido matemático suelen tener un efecto en el oyente, como el convencerlo) (Rigo, 2013).

Asociados a las creencias y a los esquemas epistémicos que las sustentan, las personas suelen experimentar ‘estados epistémicos’ (Rigo, 2013), los que resultan de una mezcla de diversos sentimientos y emociones. Si bien es posible identificar diferentes estados epistémicos, como el convencimiento, la convicción, la persuasión o la duda, en este escrito se utiliza el término “Convicción” (y “duda”) para denotar genéricamente a todos esos estados epistémicos debido a que es el que más se utiliza en la literatura de educación matemática (e.g., Abelson, 1988; Fischbein, 1988; Krummheuer, 1995).

En este escrito se acepta que un agente de clase experimenta Convicción (con una cierta intensidad) en la creencia de un enunciado E si se pronuncia a favor de la verdad de E (e.g., mediante actos asertivos, como afirmar, explicar, enunciar, sugerir, valorar, negar) y si, adicionalmente, expresa alguno(s) de los sentimientos y emociones descritas en la Tabla 1 y/o bien, realiza algunas de las acciones que ahí se enlistan (Cf. Abelson, 1988; Fischbein, 1982, Hyland, K. 1998, Villoro, 2002).

Sentimientos y otras emociones	*Expresión de los sentimientos y emociones:*
I.1. Si expresa un sentimiento de seguridad y confianza o de fiabilidad en torno a la verdad de E, o 'de que así es'. Estos sentimientos se suelen acompañar de alegría, gozo estético o tranquilidad.	Mediante la activación de: · Recursos gramaticales: enfatizadores, los que dejan poco espacio para que el lector asuma otro punto de vista (e.g., por supuesto, insistimos, lo importante, el modo tener) y mitigadores (en español aparecen a través del morfema –ía). · Recursos verbales: tono de voz firme y sugerente; volumen un poco más alto de lo habitual, voz clara; · Expresiones corporales y gesticulares: contacto visual con los otros, brazos abiertos, postura erguida que expresan seguridad y confianza en la verdad de E.
I.2. Si se muestra interesado por sostener la creencia en la verdad de E. En este caso la persona deja ver la importancia que para ella tiene sostener esa creencia.	Para esto se sugiere considerar el contexto en el que la persona sostiene su creencia y el papel que esa creencia juega en su rol como agente social. En el caso del maestro se puede considerar su plan de clase.
I.3. Si refleja valor para sostener la creencia en el enunciado E.	La persona sostiene su creencia a pesar de tener condiciones adversas, o expresa valor para modificarla.
Acciones	*Expresión de las acciones*
I.4. Si realiza trabajo matemático que parte del compromiso con la verdad del enunciado E.	Por ejemplo, desprender de E algunas conclusiones, establecer relaciones con otros enunciados, o sugerir estrategias de resolución basadas en E.
I.5. Si sostiene reiteradamente la creencia en E o la sostiene por períodos prolongados.	En clase se aprovecha cualquier oportunidad para asentar repetidamente la verdad de E.

Tabla 1. Indicadores para identificar la Convicción en clase

Prácticas para la racionalidad

La racionalidad que prevalece en un grupo de clase de matemáticas está asociada con el conjunto de reglas que a sus miembros les sirven de guía para aceptar la verdad de los enunciados de un determinado tema o contenido matemático (Cf. Balachef, 2000). Específicamente, está delimitada por los criterios que aparecen en Tabla 2.

· PQ.1. El bagaje de esquemas epistémicos con los que el grupo cuenta para sustentar la verdad de dichos enunciados matemáticos. Incluye esquemas epistémicos basados en razones matemáticas así como esquemas epistémicos basados en consideraciones extra-matemáticas;
· PQ.2. Reparto de responsabilidades, entre los agentes de clase, en relación a quién le corresponde proponer y activar los esquemas epistémicos para sustentar la verdad de dichos enunciados, y a quién le corresponde sancionar su aplicación (i.e., certificar su validez o su incorrección);
· PQ.3. Una actitud ante la verdad y el error, relacionada con dichos contenidos matemáticos;
· PQ. 4. Pautas de flexibilidad conforme a las cuales se acepta (o no) adecuar los esquemas epistémicos disponibles a la situación (se puede ser desde muy flexible hasta muy rígido).

Tabla 2. Criterios para distinguir las prácticas de racionalidad de una clase

RESULTADOS DEL ESTUDIO EMPÍRICO DE CASO: LA COMPRENSIÓN Y LA CONVICCIÓN EN LAS PRÁCTICAS DE RACIONALIDAD

Para sustentar el argumento (planteado al inicio) en torno al cual está estructurado el presente documento, en lo que sigue se analiza un episodio de clase (pieza integrada por las distintas resoluciones que en una clase se le dio a un ejercicio) impartido por Diana, de 20 minutos de duración. El episodio versa en torno al valor unitario en la resolución de ejercicios de proporcionalidad, uno de cuyos ejemplos es el siguiente:

En la ferretería se venden tres tipos de manguera.

Tipo de Manguera	*Longitud*	*Peso*
Casera	12 metros	6 kg.
Resistente	15 metros	11.25 kg.
Ultra flexible	10 metros	1.2 kg.

i) Une con una línea cada división con lo que representa el cociente:
11.25 / 15 = 0.75 La longitud de un kilogramo de manguera Resistente
15 / 11.25 = 1.33 El peso por metro de la manguera Resistente.
ii) Multiplica el peso por metro de la manguera Resistente, por 15 metros y verifica si da 11.25 Kg.
iii) ¿Cuál de los dos cocientes es el que te sirve para calcular el peso de 18 metros de manguera Resistente, 0.75 ó 1.33?

En el episodio se identificaron 2 segmentos (con 2 fragmentos cada uno), considerando el nivel de comprensión que la maestra mostró del ejercicio y de los contenidos matemáticos involucrados. En el primer segmento ella supuso erróneamente que:

11.25 / 15 = 0.75 es La longitud de un kilogramo de manguera Resistente.
15 / 11.25 = 1.33 es El peso por metro de la manguera Resistente.

A partir de ese error, y bajo la guía de la maestra, en la clase se 'resolvieron' (incorrectamente) los incisos i) y ii). En el segundo segmento del episodio ella se percató de su interpretación equívoca y a la luz de una re-significación, el grupo, bajo la tutela de su maestra, re-elaboró una resolución (correcta) del inciso i) y resolvió (acertadamente) el iii). En lo que sigue se profundiza en los grados de comprensión que parece haber tenido la maestra en esas piezas de clase, se identifican los estados epistémicos que ella parece haber experimentado, y se detallan las prácticas de racionalidad que ahí ella indujo.

Primer segmento. *Primer Fragmento: Primera resolución del inciso i)*

151. *Maestra*: Tenemos aquí 11.25/15=0.75, la longitud de un Kg. de manguera ¿qué? [la maestra tiene la mirada puesta en el Libro de Texto]
152. *Niños*: Resistente
160. *Maestra*: 15 m. son 11.25 Kg. ¿verdad? ¿Cuál sería la longitud de .75? ¿Cuántos metros serían .75? ¿Qué estamos sacando? [con desconcierto]
161. *Niña*: El peso por metro de la manguera
162. *Maestra*: Así es, así es muy bien, leemos la segunda
163. *Niños*: 15 / 11.25 = 1.33…
164. *Maestra*: ¿Eso qué cosa es?
165. *Niños*: La longitud de un Kg. de manguera Resistente
166. *Maestra:* El peso por metro de la manguera Resistente, el peso es 1.33 y la longitud .75. Leemos el siguiente punto [la mirada fija en el Libro de Texto].

(Nota: los numerales corresponden a los de la transcripción completa de la lección)

Estados epistémicos de la maestra. Derivada quizás de una lectura superficial del enunciado, la maestra abrió el episodio imponiendo una interpretación errónea de los cocientes que aparecen en i), conforme a la cual supuso que 0.75 y 1.33 corresponden a la parte numérica de una magnitud física de tipo lineal (en 160 & 166). En el primer fragmento Diana expuso repetidas veces (I.5. En lo que sigue así se hace referencia a los indicadores de Convicción) su perspectiva errónea del inciso i) (de que 0.75 es la longitud de ..., en 151, 160 y 166), buscando comprometer a sus alumnos con esa perspectiva. Para ello, los involucró en actividades matemáticas basadas en su supuesto (I.4), las que resultaron de muy baja calidad, no sólo porque la maestra indujo respuestas tipo Topaze, de sólo completar una frase faltante (152), sino porque de su planteamiento erróneo se derivaron preguntas sin sentido (160). Este compromiso de la maestra revela su creencia en su visión (falsa) de i) y ciertamente algún grado de Convicción en lo creído, Convicción que, no obstante, es muy posible que fuera de baja intensidad: el desconcierto que mostró cuando se auto-planteó una de las preguntas más significativas del fragmento (¿qué estamos sacando? en 160), reveló su limitada Convicción, la que dejó ver también mediante su uso reiterado del morfema -ía (151, 157, 160) o de su expresión corporal, que a lo largo del fragmento denotó inseguridad (por su mirada fija en el texto y su escasa comunicación visual con sus alumnos) (I.1).

Prácticas para la racionalidad. La incomprensión de i) llevó a Diana a la promoción de prácticas de racionalidad caracterizadas por la ausencia de justificación matemática (PQ.1. En lo que sigue así se denotan las prácticas de racionalidad), por un desapego a la verdad (PQ.3) y por la inconsistencia en su discurso. Pero de su Convicción en su interpretación de i) se desprendieron también unas prácticas de racionalidad que se complementaron con las antes descritas, las que se distinguieron por la ausencia de apertura y flexibilidad (PQ.4), y en las que prevaleció sólo una forma de sustentar lo dicho, el esquema por autoridad (en 151, 160 y 166) (PQ.1), mismo que la maestra aplicó también en la imposición de una sola visión del ejercicio y en la sanción de otras posibles interpretaciones (PQ.2).

Primer Segmento. *Segundo Fragmento: Resolución del inciso ii)*

166. *Niños*: Multiplica el peso por metro de la manguera Resistente por 15 m. y verifica si da 11.2 Kg.
167. *Maestra*: Háganlo
168. *Niños*: 19.95
169. *Maestra*: ¿Qué multiplicaste?
171. *Maestra*: El peso por el metro de manguera Resistente, por 15 metros
172. *Niño*: Pero no da, no da…
173. *Maestra*: ¿Cuál es el peso por metro de manguera Resistente? 1.33 x 15 ¿qué nos dio?
174. *Niño*: 19.95
175. *Maestra*: 19.95 [se da un largo silencio]. Bien, leemos la siguiente pregunta [con la vista sumergida en el Libro de Texto].

Estados epistémicos de la maestra. La afirmación implícita que hace la maestra en 173 (que 1.33 es el peso ...), es una evidencia de que en este fragmento ella continuaba atrapada en su interpretación errónea y que todavía experimentaba algún resquicio de Convicción al respecto. Ese estado epistémico se refleja también en el trabajo que a lo largo del fragmento ella impulsó entre sus alumnos, basado en esa visión (I.4), y en la perseverancia de su interpretación (I.5). Es posible, sin embargo, que la contradicción que surgió en clase (en 168, 172 y 174), entre lo que ahí se aceptó con lo que se afirmaba en el texto (que constituye ahí la máxima autoridad matemática), le haya provocado a la maestra estados de incertidumbre e inseguridad en relación a la verdad de su Convicción que los mostró mediante una actitud ausente y por su silencio (I.1) (en 175). A diferencia del primer fragmento (en el que los alumnos mostraron autonomía y valor al expresar una Convicción contrapuesta a la de su maestra, en 161 y 165), en este segundo fragmento el grupo se alineó con los dictados de su mentora, ya sea por Convicción (resultado del esquema por autoridad activado por Diana) o como respuesta a un mecanismo de interacción simbólica, conforme al cual ellos respondieron de acuerdo a lo que pensaban que eran las expectativas de su maestra.

Prácticas para la racionalidad. Si bien de la incomprensión de i) se derivó el error del resultado que se obtuvo en clase (168, 174, 175) (PQ.3), la Convicción de la maestra marcó las prácticas de racionalidad que ella impuso en este fragmento de clase. Sólo su pertinaz Convicción –y/o el pudor de tener que reconocer su falla ante el grupo- puede explicar que a pesar de contar con evidencias de su falsedad (en 172, que provenían del esquema por comprobación aplicado por los alumnos, esquema de mucho peso en el grupo) ella continuaba asida a esa visión errónea (173) (PQ.3). En esta parte de la clase sigue siendo la maestra la que dicta lo que hay que hacer, a través de esquemas por autoridad (PQ.1), y es ella la que sigue sancionando lo hecho (PQ.2), a pesar de las intervenciones atinadas de los niños (172).

Segundo segmento. *Primer Fragmento: Segunda resolución del inciso i)*

182. *Maestra*: Tenemos aquí un ejercicio inconcluso ¿verdad? Tenemos 11.25/15=.75 ¿Eso es la longitud de un Kg. de manguera Resistente? [con una entonación que compromete a una respuesta negativa]
183. *Niños*: No
184. *Maestra*: ¿Qué es? [con energía]

185. *Niños*: El peso
186. *Maestra*: Es el peso [asertiva y enfática], lo unimos con el peso entonces. Luego tenemos ... [y continúa el fragmento en el misma dinámica, pero ahora con el otro cociente].

Estados epistémicos de la maestra. Resalta en este tramo de clase el cambio en la interpretación que hace la maestra Diana de i), el cual comunicó a los niños acudiendo a una expresión no literal: "Tenemos aquí un ejercicio inconcluso" (182) y que habla de su valor (I.3) y de la importancia que posiblemente para su plan de clase tenía asumir la nueva creencia (I.2). El disparador que posiblemente la llevó a tomar conciencia de su visión equívoca fue –como decía Sócrates, a propósito de su mayéutica- el estado epistémico de duda que muy probablemente fue experimentando a lo largo de todo el primer segmento pero que tuvo su culminación en 168-175, donde ella, al parejo de su grupo, tuvo que enfrentar una contradicción entre su Convicción y lo establecido en el Libro de Texto. Esto quizás le permitió re-direccionar su trabajo cognitivo y comenzar a comprender conceptualmente los contenidos matemáticos ahí involucrados. Sobresale también en el fragmento una variación en la fuerza que acompaña a su nueva Convicción, que Diana expresa a través del uso de enfatizadores en su discurso, y de un tono de voz sugerente, directivo y enfático; del contacto visual con sus alumnos y de su postura erguida (I.1), así como del trabajo matemático que impulsa en clase basado en su proceso de re-significación (I.4).

Prácticas de racionalidad. A pesar de las respuestas correctas que el grupo dio al ejercicio i) (PQ.1), en el fragmento todavía no hay razones. Parece que, derivada de su fuerza de Convicción sobre su nueva interpretación (basada quizás en un *insight* de la resolución del ejercicio), Diana busca primero familiarizar a sus alumnos con los resultados correctos para comenzarlos a convencer con recursos de autoridad pero esta vez aderezados notablemente con esquemas epistémicos de tipo retórico (PQ.1), lo cual marca definitivamente las prácticas de racionalidad en este fragmento.

Segundo segmento. *Segundo Fragmento: Resolución de iii) y tercera de i)*

190. *Profesora*: ¿Cuál de los 2 cocientes es el que sirve para calcular el peso de 18 metros de manguera Resistente?
191. *Niño*: 0.75
192. *Profesora*: ¿Por qué?
196. *Mónica*: Porque aquí lo unimos 11.25/15…
197. *Profesora*: Si yo me voy a la tabla aunque no lo hubiéramos unido ahí, vete a la tabla. 15 m. pesan 11.25 Kg., un metro de la Resistente ¿Cuánto pesará? ¿Sí lo están haciendo? ¿De la Resistente? ¿Ya sabemos de 15 m., ahora quiero saber de un metro [enfática, directiva, con seguridad]
200. *Niña*: .75
201. *Profesora*: Sí, .75. Bien [con satisfacción que demuestra plenamente] [continúan el mismo análisis con los otros datos de la tabla].
203. *Profesora*: Ahora sí ya analizamos la tabla, ahora sí díganme cuál de los cocientes, léanlo otra vez
204. *Niños*: ¿Cuál de los dos cocientes es el que te sirve para calcular el peso de 18 metros de manguera Resistente ¿0.75 ó 1.33?
206. *Mónica*: 0.75, porque si los multiplicamos por 18, sí sale
207. *Profesora*: ¡Ahora sí! ¿Verdad? Muy bien, leemos lo que sigue [con énfasis, gusto y alegría que contagia a sus alumnos]

Estados epistémicos de la maestra. Se distinguen en este fragmento altos niveles de Convicción en la maestra, que se expresan por el trabajo matemático con el que se comprometió en el fragmento (I.4), por el uso de enfatizadores del lenguaje (en 203 y 207) y, sobresalientemente, por el gozo y la satisfacción mostrada (como en 207) (I.1). Pero ¿cómo es que llega la maestra a esa seguridad en torno a los resultados? Es probable que esto se haya derivado del hecho de que, con auxilio del registro tabular, pudo significar las nociones matemáticas incluidas en el ejercicio. En ese registro tiene sentido considerar al 0.75 como la parte aritmética de una magnitud lineal (i.e, como 0.75 Kg., la cual corresponde a la cuarta proporcional de una proporción en la que se incluye a la unidad: si 15 m. pesan 11.25 Kg., entonces 1 m. pesa 0.75 Kg.), en lugar de tenerla que interpretar como la parte aritmética de una magnitud mixta (del tipo 0.75kg./m.), cuya complejidad conceptual ha sido ampliamente reportada en la literatura (e.g., Vergnaud, 1989). La superación de esto que desde el inicio del episodio parecía estar actuando como un obstáculo conceptual, le permitió significar los contenidos, armar un discurso consistente y experimentar estados de muy alta Convicción, los que evidencia por el énfasis que ella imprime hacia el final del episodio: cuando ahí dice ¿¡Ahora sí, verdad!?, Diana probablemente quiere comunicar que la validez de su estrategia se ha confirmado y que ya no cabe asomo de duda (I.1).

Prácticas para la racionalidad. En el último fragmento del episodio las prácticas ya han cambiado en aspectos esenciales. La comprensión conceptual de la maestra puede explicar la presencia de razones matemáticas en su discurso de clase (PQ.1). Sin embargo, sólo bajo la consideración de esa comprensión, aunada a los altos niveles de Convicción que ahí dejó ver la maestra, se puede dar cuenta de la flexibilidad (PQ.4) y sensibilidad en sus intercambios con sus alumnos sobre los esquemas epistémicos que en ese momento para ella resultaba razonable emplear (e.g., cuando rechaza con razones disciplinares esquemas basados en razones prácticas, como en 197, PQ.1, o cuando acepta, a pesar de contar con razones de mayor peso, el esquema por comprobación que esgrime Mónica en 206), y sólo desde ese punto de partida se puede entender por qué ella pone en juego prácticas didácticas para que sus alumnos consigan construir, como ella, Convicciones matemáticas basadas en razones en las que incluye los esquemas por autoridad y retóricos (PQ.1) (como en 203 o en 207).

HALLAZGOS PRINCIPALES

El estudio sugiere que para poder comprender fenómenos del aula es necesario distinguir entre el conocimiento que un profesor tiene de un tema, y el nivel de comprensión que él logra alcanzar al calor de los intercambios y vicisitudes de una clase. Diana por ejemplo, aunque mostró (en las clases observadas y particularmente en el segundo episodio) que ella tenía buen dominio del contenido de la lección, en el primer segmento ostentó muy escasos niveles de comprensión. Esto habla de que en clase el profesor no es un autómata diseñado para comunicar informaciones; es una persona que, además de un conocimiento, tiene motivos, necesidades (diversas), creencias y Convicciones. En esta dirección, en el artículo se aportan evidencias empíricas de que, específicamente, las creencias y Convicciones son un factor coadyuvante en la determinación de las prácticas de racionalidad que el maestro impulsa en su clase: en el caso de Diana -otra vez-, se observa que en el primer segmento aunque ella tenía la Convicción de que creía saber, carecía de comprensión. De modo que fue esa Convicción la que la pudo llevar a mantener un ritmo de clase (semejante a la convicción que aviva la actividad heurística en los matemáticos); a heredar a los alumnos las ‘razones’ basadas en la autoridad (que eran las únicas que en ese momento ella tenía a la mano, porque fue en la autoridad del libro de texto en la que sustentó su Convicción) y a cerrarse (inicialmente) a las ‘razones duras’ provenientes de la comprobación que ahí surgieron. Es además, la transformación en duda, de lo que fue su Convicción inicial (y el trabajo cognitivo que de eso se desprendió), lo que puede explicar la fuerza de su Convicción en el segundo segmento, Convicción que –acompañada ahora de razones disciplinares- posiblemente motivó a Diana a no esgrimir razones (aunque las tuviera) sino a movilizar en clase esquemas retóricos de sustentación que antes no estaban presentes (además de los basados en la familiaridad y en la autoridad), o bien, a intentar contagiar a sus alumnos de su Convicción a través de esquemas de autoridad y retóricos aunque su discurso estuviera centrado en la construcción de razones matemáticas. Sería deseable que los maestros tomaran conciencia de que su Convicción –como la de Diana- sí cuenta en clase.

Agradecimientos: Al árbitro 2 por su revisión pulcra y a B. Martínez por la lectura de Hyland.

Referencias

Abelson, R. (1988). Conviction. *American Psychologist, 43*(4), 267-275.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage Pub.

Fischbein, E. (1982). Intuition and proof. *For the Learning of Mathematics*, 3(2), 9-24.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, 30, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb, & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229-270). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Rigo, M., Rojano, T., Pluvinage, F. (2009). Las prácticas de justificación en el aula de matemáticas. En M. González, M. T. González & J. Murillo (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XIII*. Santander: SEIEM.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*. DOI 10.1007/s10649-013-9466-6.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Vergnaud, G. (1989). Multiplicative structures. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (vol. 2, pp. 141-161). Reston: NCTM.

Villoro, L. (2002). *Creer, saber, conocer* (14ª ed.). México, D. F.: siglo veintiuno editores.

DESARROLLO DEL CONOCIMIENTO ESTADÍSTICO COMÚN Y AVANZADO EN ESTUDIANTES DE MAGISTERIO

Developing of prospective primary school teachers' common and advanced statistical knowledge

Hernán Rivas[a], Juan D. Godino[b], Pedro Arteaga[b] y Antonio Estepa[c]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, Villarica (Chile), [b]Universidad de Granada,

[c]Universidad de Jaén

Resumen

Analizamos los resultados de un proceso formativo de futuros profesores de educación primaria sobre estadística basado en la resolución de proyectos de análisis de datos. Se contempla la formación de los estudiantes sobre aspectos relevantes del conocimiento común del contenido: reducción de datos estadísticos (tablas, gráficos, promedios y dispersión) y algunos aspectos del conocimiento avanzado del contenido (comparación de distribuciones de frecuencias, valores atípicos). El análisis de uno de los proyectos realizados por los estudiantes revela las potencialidades de la metodología de enseñanza basada en proyecto para dar sentido a las técnicas de análisis de datos. Dicho análisis revela también aspectos conflictivos del aprendizaje que deben ser tenidos en cuenta en los momentos de institucionalización y ejercitación, como fases complementarias de los momentos de exploración favorecidos por la realización de los proyectos.

Palabras claves: *formación de maestros, estadística, enseñanza basada en proyectos, evaluación.*

Abstract

We analyze the results of a statistics formative process based on data analysis projects, and designed for prospective primary school teachers. We took into account some aspects of common content knowledge (e.g. tables, graphs, averages and spread) and advanced content knowledge (e.g. comparing frequency distributions, outliers) relevant for the education of prospective teachers. The analysis of one of the projects solved by participants, reveals the learning potential of project-based teaching for making sense of data analysis techniques. The analysis also showed some conflicting points of learning that should be taken into account along the institutionalization and practicing moments, to complement the exploration stages favored by the projects.

Key words: *primary school teachers' education, statistics, project-based teaching, assessment.*

INTRODUCCIÓN

La formación en estadística y su didáctica de los profesores de educación primaria es un tema que requiere investigación, como se pone de manifiesto en diversos trabajos (Batanero, Burril y Reading, 2011). Se dispone de resultados sobre cuestiones relativas a la enseñanza y aprendizaje de

Rivas, H., Godino, J. D., Arteaga, P. y Estepa, A. (2013). Desarrollo del conocimiento estadístico común y avanzado en estudiantes de magisterio. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 467-474). Bilbao: SEIEM.

temas específicos, p.e, los promedios, dispersión, gráficos estadísticos (Batanero, 2001; Espinel, 2007; Arteaga, Batanero, Ortiz, y Contreras, 2011), pero son más escasos los trabajos que abordan la implementación y evaluación de diseños instruccionales que tengan en cuenta el desarrollo del razonamiento estadístico en su complejidad en contextos de estudio naturalistas.

En nuestra investigación abordamos el problema del diseño instruccional en un contexto naturalista, esto es, con los recursos y condicionamientos establecidos por un plan de estudios específico, e incluyendo globalmente los contenidos de estadística descriptiva elemental y nociones básicas de probabilidad. El diseño e implementación se realiza en las condiciones estándares ofrecidas por el programa de formación de futuros profesores de educación primaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, dentro de una asignatura focalizada en sentar las bases matemáticas para la enseñanza. La formación estadística es, por tanto, una parte de la formación matemática, a la que se destina un tiempo limitado.

En esta comunicación describimos sucintamente el diseño global del proceso de estudio, basado en el uso de proyectos de análisis de datos como metodología didáctica, y algunos resultados derivados del análisis de uno de los proyectos realizado por los estudiantes. Dado que la asignatura contempla principalmente sentar las bases matemáticas de los futuros maestros, el énfasis principal del curso está en desarrollar el conocimiento común y ampliado (Hill, Ball y Schilling, 2008; Godino, 2009) sobre estadística y probabilidad, dejando el desarrollo de los restantes componentes del conocimiento matemático para la enseñanza (conocimiento especializado, de los estudiantes, enseñanza y currículo) para otras asignaturas del plan de estudios.

MARCO TEÓRICO Y METODOLOGÍA

Nuestra investigación se enmarca en un paradigma metodológico mixto que comparte características de las investigaciones de diseño instruccional (Cobb et al., 2003) y la ingeniería didáctica (Artigue, 2011). No obstante, el marco teórico que sostiene nuestra metodología no es la Teoría de situaciones (Brousseau, 1998) sino el Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2012; Font, Godino y Gallardo, 2013), del cual usamos la noción de configuración de objetos y procesos y la idoneidad didáctica. Las investigaciones orientadas hacia el diseño constituyen un paradigma emergente para el estudio del aprendizaje en contexto mediante el diseño y el estudio sistemático de estrategias y herramientas instruccionales. El objetivo de nuestro diseño es desarrollar "conocimiento común y avanzado" de futuros maestros sobre estocástica con una metodología centrada en el uso de proyectos de análisis de datos, lo que permitirá dar sentido a los conceptos y técnicas estadística.

Contexto, población y muestra

El proceso formativo sobre el contenido de estadística descriptiva y probabilidad se realizó en el contexto de la asignatura del plan de formación de maestros titulada, "Bases matemáticas para la educación primaria", en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Se aplicó a dos grupos de estudiantes a cargo de uno de los autores del trabajo, uno con 58 estudiantes y otro con 75. Dicha materia incluye un tema sobre "Introducción a la estadística y probabilidad" a cuyo desarrollo se dedican tres semanas, a razón de 3 horas de trabajo semanales en sesión de grupo completo y una sesión semanal de 1,5 horas de trabajos prácticos con el grupo clase dividido en tres subgrupos.

Diseño instruccional

El estudio se organizó en base al desarrollo de tres proyectos de análisis de datos, complementados con el uso de un texto (Batanero y Godino, 2003) y una colección de ejercicios resueltos como material complementario. Describimos brevemente dos de los proyectos sobre los cuales se basó el desarrollo de los contenidos de estadística descriptiva; el tercer proyecto está orientado a contextualizar el estudio de nociones probabilísticas y por limitaciones de espacio no se describe en esta comunicación.El enfoque de enseñanza basado en proyectos es novedoso para la mayoría de los estudiantes y conlleva la vivencia de una metodología que pueden trasladar a la educación primaria.

Proyecto 1: Alumno típico

Se trata de la elaboración de un perfil de los alumnos de la clase, identificando al alumno típico y analizando si hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de las características. Este proyecto se describe con detalle en Batanero y Díaz (2011, págs. 73-93). Las variables estadísticas consideradas en nuestra implementación fueron las siguientes:

Variable 1: Género (hombre, mujer); Variable 2: ¿Haces deporte? (Nada, poco, mucho); Variable 3: Número de hermanos (incluyendo al propio estudiante, o sea, número de hijos en la familia); Variable 4: Peso (Kg.); Variable 5: Dinero que llevas en el bolsillo (Cantidad de euros).

En este proyecto se proponen las siguientes cuestiones iniciales:

- ¿Cuáles son las características de un estudiante típico o representativo de la clase? ¿Cómo de representativo es dicho estudiante respecto de la clase?
- ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en cada una de dichas características?

Proyecto 2: Eficacia de un entrenamiento deportivo

Planteamiento:

Un profesor de Educación Física prepara a un grupo de 60 alumnos de 12 años para participar en una competición. Transcurridos 3 meses del entrenamiento (Septiembre a Diciembre) quiere comprobar si el entrenamiento ha sido efectivo. Para ello decide comparar el tiempo en segundos que los alumnos tardan en recorrer 20 metros en Septiembre y en Diciembre, y también quiere conocer si hay diferencias entre los chicos y las chicas.

Trabajando en equipo, elaborar un informe respondiendo razonadamente a las cuestiones 1) a 5) siguientes, incluyendo los cálculos y gráficos que consideréis pertinentes:

1) ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?
2) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?
3) ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?
4) ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?
5) ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como “atípico” en su capacidad de correr (por su velocidad excesivamente baja)?
6) ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

El proceso de estudio implementado contempla, además de la realización de los proyectos los siguientes recursos instruccionales:

- Colección de ejercicios resueltos
- Texto de estudio. Se trata de la monografía de Batanero y Godino (2003), *Estocástica para maestros*, donde se desarrollan los contenidos básicos de estadística y probabilidad.
- Tablón virtual de docencia; se utiliza como repositorio de información y como un espacio de comunicación asincrónica entre estudiantes y entre los estudiantes y el profesor.

EFICACIA DE UN ENTRENAMIENTO DEPORTIVO. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Fase de implementación

Este proyecto de análisis de datos fue iniciado, en los dos cursos en que se ha implementado, en una sesión de clase en las que el grupo completo de estudiantes fue dividido en tres subgrupos; dichas sesiones son consideradas como “seminarios de prácticas”. En este caso los estudiantes trabajaron en equipos de 3 o 4 en la realización del proyecto, finalizando el informe solicitado en el plazo de una semana.

El trabajo práctico comenzó con una fase introductoria en la que se hizo una presentación del proyecto y se entregaron indicaciones sobre las actividades y cuestiones planteadas. Se prepararon los datos en una plantilla Excel, incluyendo en una hoja el conjunto de datos (chicos y chicas), en otra hoja los datos de las chicas y en la hoja tres, los datos de los chicos. Posteriormente se discutió cómo resolver la cuestión 1, enfatizándose en la necesidad de interpretar adecuadamente la dispersión, el promedio, y los valores atípicos. La clase continuó con una fase de trabajo en equipos, donde se manifestaron dificultades en el dominio de habilidades en el uso de la herramienta Excel y se presentaron conflictos en la interpretación adecuada de la media y la desviación típica. Después de aproximadamente 25 minutos de trabajo grupal se realizó un proceso de institucionalización donde se explicó la manera de ordenar los datos de forma ascendente y descendente en la hoja Excela fin de identificar con mayor facilidad los casos atípicos.

La intervención del profesor continuó con algunas indicaciones sobre el proceso para realizar la comparación gráfica de las dos distribuciones. Posteriormente continuó el trabajo grupal de acuerdo a la modalidad establecida. Esta vez, en los primeros minutos de la actividad, se manifestaron dificultades repetidas en la aplicación de la fórmula para obtener las frecuencias relativas, ante lo cual, el profesor explicó “paso a paso” la manera de obtenerla. Después de esto se dio un tiempo para que los estudiantes realizaran los cálculos de las frecuencias relativas y exploraran la construcción de gráficos, manifestándose conflictos con la construcción y etiquetado de dichos gráficos. La clase finalizó con algunos comentarios finales sobre las actividades realizadas e informando sobre la manera de entregar los informes que deberían realizar durante la semana.

Evaluación de los informes realizados por los estudiantes

En este apartado analizamos los informes realizados por los distintos equipos en los que respondieron a las seis cuestiones mencionadas. La acción formativa descrita se ha realizado en dos cursos académicos disponiendo de un total 37 informes. Hemos realizado primero una evaluación global de la competencia lograda definiendo una variable cuantitativa, grado de corrección, asignando 2 puntos si la respuesta es correcta, 0 incorrecta o no responde, y 1 punto si es parcialmente correcta. La figura 1 contiene un gráfico de cajas que muestra los principales estadísticos de la distribución de frecuencias.

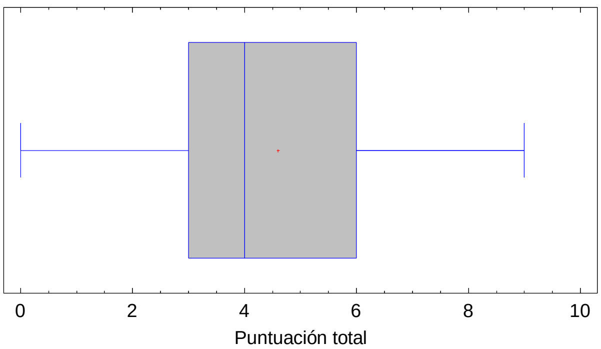


Figura 1. Distribución de la puntuación total en el grado de corrección

La media ha sido de 4,59 (mediana de 4; cuartil inferior, 3; cuartil superior, 6) sobre un total posible de 12 puntos, desviación típica de 2,03, mínimo 0 y máximo de 9. Podemos afirmar en base a estos datos que la tarea solicitada ha resultado difícil para los estudiantes. En la tabla 1 mostramos los resultados para cada una de las seis cuestiones solicitadas. Seguidamente destacamos algunos resultados en cada uno de los ítems.

Tabla 1. Frecuencias y porcentajes de respuestas correctas y erróneas (n = 37)

	Correctas y parcialmente correctas		Erróneas y no responde	
Ítem	Frecuencia	%	Frecuencia	%
1. ¿Ha sido efectivo el entrenamiento?	33	89,2	4	10,8
2. Diferencias chicos/chicas en septiembre	31	83,8	6	16,2
3. Diferencias chicos/chicas en diciembre	30	81,1	7	18,9
4. ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?	13	35,1	24	64,9
5. ¿Hay alumnos atípicos	7	18,9	30	81,1
6. ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos?	13	35,1	24	64,9

Ítem 1: ¿Ha sido efectivo el entrenamiento en el conjunto de la clase?

La resolución de este ítem implica comparar dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) con muestras de igual tamaño. Para responder convenientemente, en primer lugar, se debe hacer una reducción de los datos calculando estadísticos de posición central. Este ítem ha resultado bastante fácil para los estudiantes; solamente 4 equipos han respondido de manera errónea. El procedimiento predominante en los equipos que respondieron de manera correcta ha sido el de comparar las medias (24 de 37); un equipo utilizó, además de la media, la desviación típica haciendo referencia a la dispersión de los datos; 8 equipos justificaron la respuesta sin usar un promedio.

No encontramos ninguna justificación basada en la representación gráfica de las distribuciones de frecuencias. En 6 casos los estudiantes justifican gráficamente que el entrenamiento ha sido efectivo, pero mediante un gráfico “no estadístico”; representan con diagramas de barras los tiempos en septiembre y diciembre para cada uno de los sujetos interpretando visualmente los diagramas.

Ítem 2: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros inicialmente en Septiembre?

Se trata de comparar las distribuciones de frecuencias de dos muestras de distinto tamaño (chicos y chicas), comparando medidas de tendencia central y dispersión, pues de acuerdo con KonoldyPollatsek (2004, 173) la noción de promedio (tendencia central) es inseparable de la noción de dispersión. También es posible utilizar representaciones gráficas para representar los datos y establecer posibles diferencias.

En esta pregunta hay 28 equipos que comparan las puntuaciones medias de los chicos y chicas y afirman que había diferencias, teniendo los chicos una puntuación menor que las chicas. Al igual que en el caso anterior, es destacable el hecho que solo un equipo tiene en cuenta también la dispersión, calculando la desviación típica. 2 equipos comparan medias y medianas, y 6 justifican de manera errónea.

Ítem 3: ¿Hay diferencias entre chicos y chicas en el tiempo en correr 20 metros después del entrenamiento en Diciembre?

Al igual que en el ítem anterior la comparación de las dos distribuciones se hace teniendo en cuenta preferentemente la media aritmética (28 de 37); en ningún caso comparan las dispersiones o la presencia de valores atípicos. En 2 casos hacen comparaciones de tipo gráfico, pero sin considerar las frecuencias relativas y 7 equipos justifican de manera errónea.

Ítem 4: ¿Quién ha mejorado más, los chicos o las chicas?

Para responder este ítem se deben comparar por separados (chicos y chicas) las dos distribuciones (tiempos en septiembre y diciembre) y determinar cuánto ha mejorado cada grupo en relación a su tiempo inicial (tiempo en septiembre). Esta comparación se puede hacer comparando las medias o medianas; también se podrían comparar las dispersiones. En este ítem 13 equipos respondieron de manera correcta, 9 lo hicieron comparando las medias, 3 sin reducir los datos y 1 de los equipos no entregó justificación. De los restantes, 23 respondieron de manera incorrecta y un equipo no respondió. De los 23 que respondieron de manera incorrecta 13 hicieron una interpretación equívoca de la media y 10 cometieron otro tipo de error.

Ítem 5: ¿Hay algún alumno (chico o chica) que se pueda considerar como "atípico" en su capacidad de correr?

Resolver este ítem implica calcular los valores atípicos, para ello, se puede utilizar la fórmula de cálculo indicada en la consigna (se considera como atípico un valor cuando está fuera del intervalo: media ± dos veces la desviación típica). De los 37 equipos solamente 7 dieron una respuesta correcta realizando los cálculos requeridos. Un error recurrente fue que en 24 casos los estudiantes consideraron como atípicos los valores mínimo o máximo de las distribuciones correspondientes.

Ítem 6: ¿Qué se debe hacer con los sujetos atípicos desde el punto de vista estadístico?

En este ítem se espera que el estudiante reconozca que los valores atípicos podrían afectar una interpretación adecuada de los datos y por tanto resulta conveniente analizarlos de manera separada. En este ítem 13 equipos respondieron de manera correcta mientras 23 lo hicieron de manera errónea (solo un equipo no respondió este ítem).

OBSERVACIONES FINALES

En el proyecto de análisis de datos que hemos propuesto a los estudiantes se ha pedido la comparación de pares de distribuciones de frecuencias, lo que permite movilizar y dar sentido al uso de las medidas de tendencia central y de dispersión, así como a la comparación gráfica de los histogramas de frecuencias relativas. El análisis de los datos ha mostrado que el cálculo de la media y desviación típica de las distribuciones mediante el uso de la hoja de cálculo ha sido logrado por los estudiantes, y tales estadísticos han sido aplicados para decidir sobre la efectividad de un tratamiento. Sin embargo, aspectos más avanzados del razonamiento estadístico, como es la comparación de las dispersiones, la identificación de valores atípicos y su interpretación, así como la realización de histogramas de frecuencias representados sobre los mismos ejes cartesianos han supuesto tareas con alto grado de dificultad para los estudiantes que han participado en esta acción formativa. Este resultado coincide con Peters (2009) quien afirma que muchos maestros son capaces de calcular la desviación típica e interpretarla, pero son incapaces de razonar sobre la desviación típica en conjunción con la media.

Como conclusión de este estudio resaltamos que la enseñanza de las matemáticas, y en particular la estadística, debe partir y centrarse en el uso de situaciones - problemas (proyectos de análisis de datos), como una estrategia de dar sentido a las técnicas y teorías matemáticas. De esta manera, además, se hacen posibles los momentos exploratorios de la actividad matemática por parte de los estudiantes. Sin embargo, en la práctica matemática intervienen configuraciones de objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, representaciones) (Godino, Batanero y Font, 2007), los cuales deben ser reconocidos por el formador para planificar su estudio. Tales objetos deben ser progresivamente dominados por los estudiantes si se desea que progresen hacia sucesivos niveles avanzados de conocimiento necesarios para una gestión idónea de la enseñanza. El estudio de tales objetos matemáticos y sus respectivos procesos asociados debe ser planificado por el formador organizando los correspondientes momentos de validación, institucionalización y ejercitación, incrementando de este modo la idoneidad didáctica del proceso formativo.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN), y EDU2012-31869, Ministerio de Economía y Competitividad (MEC).

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Ortiz, J., y Contreras, J. M. (2011). Sentido numérico y gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Publicaciones, 41,* 33-49.

Artigue, M. (2011). L'ingénierie didactique comme thème d'étude. En C. Margolinas, M. Abboud-Blanchard, L. Bueno-Ravel, N. Douek, A. Fluckiger, P. Gibel, F. Vandebrouck & F. Wozniak (Eds.), *En amont et en aval des ingénieries didactiques* (pp. 15-25). Grenoble: La PenséeSauvage.

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. Disponible en, http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm

Batanero, C., Burrill, G., y Reading, C. (2011) (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE Study*. Berlin: Springer.

Batanero, C., y Díaz, C. (Eds.), (2011). *Estadística con proyectos*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Granada. Recuperable en, http://www.ugr.es/local/batanero/publicaciones%20index.htm

Batanero, C., y Godino, J. D. (2003). *Estocástica y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Recuperable en, http://www.ugr.es/local/jgodino/)

Brousseau, G. (1998). La théorie des situations didactiques. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., y Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher, 32,* 1, 9–13.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en Educación Matemática, 11,* 99-119.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82,* 97–124.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 20,* 13-31.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM.

Godino, J. D. Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1-2), 127-135.

Hill, H. C., Ball, D. L., y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39,* 372-400.

Konold, C., y Pollatsek, A. (2004). Conceptualizing an average as a stable feature of a noisy process. En D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 169-200). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Peters, S. A. (2009). *Developing an understanding of variation: AP statistics teachers' perceptions and recollections of critical moments.* PhD. The Pennsylvania State University

ELEMENTOS DE IMPACTO DE LAS PRÁCTICAS INSTRUCCIONALES DE LOS FORMADORES EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS[xxxiii]

Impact elements of mathematics teacher educators instructional practices

Francisco Rojas[a] y Jordi Deulofeu[b]

[a]Pontificia Universidad Católica de Chile, [b]Universitat Autònoma de Barcelona

Resumen

En esta comunicación abordamos las características de las prácticas instruccionales de los formadores de profesores de matemáticas que resultan relevantes o impactantes para estudiantes y formadores. Diseñamos el estudio en base a dos focus group: uno a estudiantes que recién terminan su formación inicial y otro a los formadores que estuvieron involucrados en dicha formación. El análisis se realizó contrastando las opiniones de ambos grupos, surgiendo elementos relativos al grado de relevancia dado al conocimiento matemático específico, así cómo estrategias para impactar en los modelos de profesor que construyen los estudiantes a lo largo de su formación. Concluimos que el mayor elemento de impacto es la coherencia entre las prácticas instruccionales del formador y el modelo didáctico que se quiere que los estudiantes construyan y apliquen en el aula.

Palabras clave*: formación inicial de profesores de matemática, formadores de profesores de matemáticas, racionalidad formativa, modelación instruccional.*

Abstract

In this paper we discuss the characteristics of instructional practices of mathematics teacher educators that are relevant and impactful for students and educators. We designed the study based on two focus groups: one for students who just finished their initial training and one for trainers who were involved in that training. The analysis was performed by contrasting the views of both groups, emerging elements relating to the degree of importance given to specific mathematical knowledge and strategies to impact teacher models that build students throughout their training. We conclude that the most impact element is the consistency between the educator instructional practices and teaching model that we want students to construct and implement in the classroom.

Keywords: *pre-service mathematics teacher education, mathematics teacher educators, teaching rationale, instructional modelling.*

Rojas, F. y Deulofeu, J. (2013). Elementos de impacto de las prácticas instruccionales de los formadores en la formación inicial de profesores de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 475-482). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

El rol que le compete al *formador de profesores* en los procesos de formación, tanto inicial como continua, además de su conocimiento y desarrollo profesional, recién empieza a explorarse de forma sustantiva (Gómez, 2009). Según Jaworski (2008), el formador es aquella persona que, en contextos de formación inicial o permanente, tiene como tarea ayudar a los profesores a desarrollar y mejorar la enseñanza de las matemáticas, siendo a la vez aprendiz y facilitador de aprendizaje (Zaslavsky, 2009), proceso en el cual la reflexión de su práctica juega un rol fundamental (Chapman, 2009).

Las prácticas instruccionales del formador, tanto a nivel de las actividades matemático-didácticas que diseña e implementa como a nivel de la gestión de las mismas en el aula universitaria, y la construcción de los modelos de enseñanza de los futuros profesores, son aspectos fuertemente interrelacionados. De hecho, en el proceso de formación, los formadores tienen como objetivo que el futuro profesor construya un conocimiento y adquiera una experiencia concerniente a las distintas etapas del proceso de enseñanza (Christiansen y Walter, 1986), las cuales se fundamentan en el modelo didáctico elegido por ese formador, equipo de formadores o institución formadora. De este proceso formativo, al menos se esperarían dos aspectos a construir: por una parte, que el cuerpo de formadores ofreciera a los futuros profesores oportunidades de aprender matemáticas tal como se espera que ellos la enseñen (transferencia del modelo didáctico), generando así procesos de modelación de la práctica de enseñanza y, por otra, que el formador planteara actividades que fueran oportunidades de aprender a enseñar matemáticas, en el sentido de planificar la enseñanza, analizar la gestión a través de episodios de aula, y trabajar a partir de realizaciones de alumnos de secundaria, estableciendo una fuerte relación teoría-práctica (Boyd, Grossman, Lankford, Loeb y Wyckoff, 2009; Gellert, 2005).

En esta comunicación nos interesa mostrar lo que perciben estudiantes[xxxiv] y formadores como elementos impactantes de la formación, en particular algunas de las características de las actividades propuestas por los formadores, y su gestión en el aula, y que llevan a la construcción de conocimiento profesional, de acuerdo con las opiniones recogidas en dos Focus Group con estudiantes y formadores del Master de Formación del Profesorado de Secundaria en Matemáticas del curso 2011-2012 de la Universitat Autònoma de Barcelona.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

Jaworski (2008) sostiene que muchas de las condiciones o cualidades que le son exigidas al formador son, en muchos aspectos, las mismas que le son exigidas a los profesores (conocimiento matemático y didáctico, del sistema educativo y del contexto social en el cual se desempeñan). Sin embargo, agrega que necesitan, además, conocimientos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como sobre metodologías para indagar en estos aspectos. Este contexto le demanda al formador no sólo una práctica dirigida a ayudar a construir aprendizaje sobre la enseñanza, sino una práctica que además sea autoreflexiva, y que le permita por tanto mejorar dichos procesos, a la vez que construye un conocimiento profesional específico.

Sanchez y García (2004), definen tres grandes dominios de conocimiento: de los tipos de *conocimiento base del profesor*, *de las distintas formas de caracterizar el proceso de aprender a enseñar matemáticas*, y *del uso del contenido de un contexto de enseñanza de las matemáticas*, las cuales se ven expuestas, según las autoras, en las múltiples relaciones entre formadores, conocimiento matemático y estudiantes. La relación entre la matemática a ser enseñada y el formador, impone que éste conozca las formas en que el contenido se transforma para ser enseñado, lo que implica saber diseñar actividades o tareas a desarrollar con los profesores para construir procesos de generación de conocimiento útil para enseñar. A su vez, la relación entre el formador y los estudiantes se basa en un sistema de interacción, en el cual influyen las estructuras comunicativas que se dan en la formación, lo cual está en la base de la gestión del aula, y las condiciones que permiten compartir significados de los elementos involucrados en el proceso de aprender a enseñar. Por último, la relación entre los estudiantes y el contenido se basa en el proceso de aprender a enseñar, y será el formador quien tendrá la tarea de caracterizar dicho proceso, si lo que busca es comprender cómo aprenden sus estudiantes y, con esa información, mejorar el proceso formativo.

En cuanto al desarrollo profesional del formador, Llinares y Krainer (2006) sostienen que éste se produce por procesos de aprendizaje a través de la práctica, sostenidos por una práctica reflexiva. Para Zaslavsky y Leikin (2004), la práctica reflexiva, que también juega un rol fundamental, se desarrolla en un entorno relacional, donde las interacciones que ocurren al interior de la comunidad de formadores de profesores de matemáticas les ayuda a crecer profesionalmente. Además, entender el proceso de desarrollo profesional de esta manera es particularmente útil para tratar de comprender cómo se llega a ser formador de profesores, proceso que se realiza a través de las reflexiones personales sobre las experiencias que facilitan el aprendizaje a los profesores (Zaslavsky, 2009).

Tanto el conocimiento como el desarrollo profesional del formador de profesores están ligados al modo en que reflexionamos sobre nuestras prácticas instruccionales, y sobre cómo los estudiantes construyen conocimiento para la enseñanza. Sobre la reflexión, Chapman (2009) sostiene que ésta "se inicia cuando el educador se encuentra con un algún aspecto problemático de la práctica, y trata de darle sentido" (p. 125). Sin embargo, para esta autora no es suficiente la sola indagación de la práctica, sino que es necesario que los formadores investiguen además sobre sus propios enfoques de enseñanza (cursos, programas o actividades), con la finalidad de "determinar su efectividad o la relación entre dicho enfoque y un aprendizaje efectivo y significativo" (p. 122).

El crecimiento y desarrollo profesional del formador está relacionado con las distintas dimensiones de la formación que le demandan actitudes y competencias específicas. Zaslavsky (2008) presenta un conjunto de dimensiones a tener en cuenta en la formación, a través de las cuales destacan de manera importante las actividades que realiza el formador, jugando un rol fundamental para lograr que cada una de estas dimensiones lleguen a ser operativas. Estas tareas tienen una alta influencia en la formación de los profesores, siendo su propósito general, en términos de diseño e implementación, permitirles construir el conocimiento necesario para enseñar matemáticas en la escuela, incluyendo lo relativo a la toma de decisiones emergentes, y ayudas para el desarrollo de características personales clave (Zaslavsky, 2007). Además, esta autora sostiene que una parte importante del desarrollo de las tareas depende de cómo el formador las gestiona, es decir, de las maneras en que el formador usa las tareas para mostrar los enfoques didáctico-matemáticos subyacentes, así como las características personales que consideran que los estudiantes deberían desarrollar.

Desde el punto de vista del desarrollo profesional de los formadores, las tareas no sólo son los medios y el contenido por el cual se facilita el aprendizaje de los estudiantes, sino que a través de una reflexión sobre su diseño, implementación y modificación, llegan a ser los medios de aprendizaje del propio formador (Zaslavsky, 2009). Por ello, el proceso por el cual el formador llega a establecer y construir "buenas" actividades, es decir, aquellas para las cuales "la experiencia derivada de la actividad productiva consecuente informa a la práctica futura de los profesores" (Zaslavsky, 2007, p. 439), es recursivo, requiere de reflexiones sobre la práctica de enseñanza, y mucho tiempo para llegar a establecerse.

METODOLOGÍA

El diseño metodológico de este estudio se estableció entendiendo la formación como proceso de cambio, y pensando en las distintas instancias que los futuros profesores experimentan a través de su proceso de formación. Dado que nuestro estudio se enfoca en el formador y su relación con la construcción de conocimiento para la enseñanza de los profesores, se realizaron dos entrevistas grupales semi-estructuradas bajo una modalidad de Focus Group[xxxv], una con los estudiantes (FGE) y otra con los formadores (FGF).

Los participantes del FGE fueron 6 estudiantes que habían cursado el Master de Formación de Profesorado de Secundaria en la Universitat Autònoma de Barcelona en el periodo académico 2011-2012. Este grupo fue seleccionado por haber mostrado altas tasas de participación en el programa, a la vez que una actitud critica respecto de su propio proceso formativo. El FGF se realizó con los formadores que estuvieron involucrados en dicha formación, y que tuvieron directa relación con los principales cursos del ámbito didáctico.

La definición de los temas a trabajar, tanto con estudiantes como con formadores, obedecía a la reflexión de las etapas centrales del periodo de formación. Con la información obtenida en el FGE, es decir, los aspectos más relevantes que los estudiantes consideraron de cada etapa de su formación, se procedió a definir cuestiones clave para ser preguntadas a los formadores. Esta manera de organizar la recolección de datos permitió poner en tensión la reflexión de los formadores en base a la opinión de los estudiantes que habían sido formados por ellos mismos, por lo que se esperaba un conocimiento profundo del contexto de dichas opiniones. Dado este diseño metodológico, el análisis de los datos consistió en estudiar, en primer lugar, lo dicho por los estudiantes observando las opiniones más frecuentes en cada uno de los temas abordados. Para el caso de los formadores, también se realizo un análisis del contenido de su discurso, evidenciado lo más relevante de lo discutido. Además, y tal como se aprecia más adelante, se han realizado algunas conexiones clave entre ambos conjuntos de datos, que permiten concluir aspectos calves de las practicas instruccionales de los formadores en términos de impacto en el aprendizaje para la enseñanza de los futuros profesores. El esquema metodológico seguido en el estudio se puede apreciar en la siguiente figura 1.

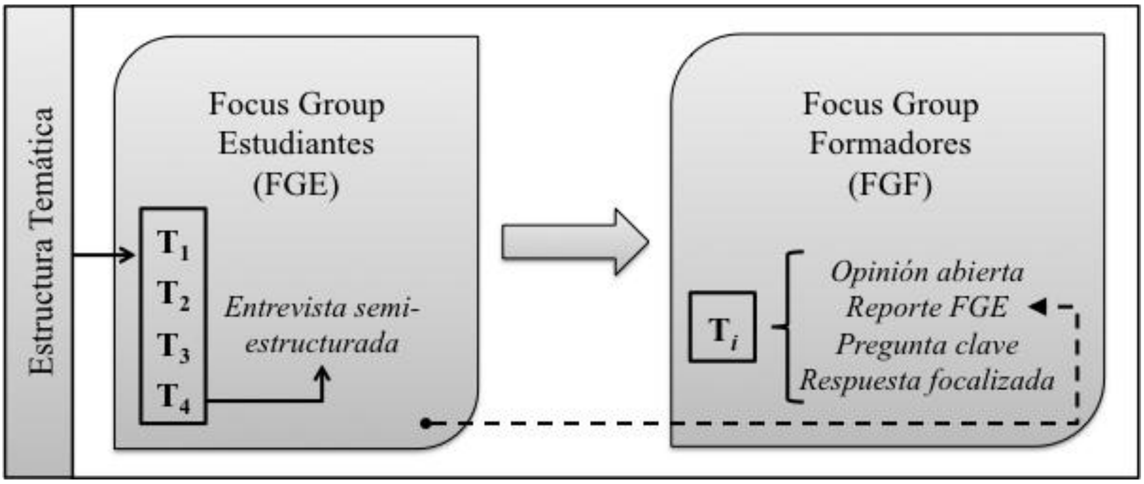


Figura 1: Diseño metodológico para la recogida de datos.

Los Focus Group se estructuraron en 4 temas nucleares: *Necesidad y expectativas de formación*, *Actividades de formación*, *Impacto y dificultades en el practicum*, y *Modelación instruccional*. A partir de la discusión de estos temas con los formadores y con base en lo dicho en el FGE, se les preguntó sobre cuatro cuestiones clave relacionadas con cada tema: (a) sobre el cuestionamiento del conocimiento matemático de base que traen los estudiantes al ingresar al Master, (b) sobre la relación entre las actividades de formación y las tareas profesionales que deberán desempeñar los futuros profesores, (c) sobre cómo se recoge la experiencia práctica en las clases y sobre su rol como tutor de la misma y (d) sobre los logros mínimos que se deberían alcanzar en la formación para ayudar a construir una idea de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas acorde con la *racionalidad formativa* del programa.

Si bien este estudio contempló una reflexión sobre la experiencia del practicum, tanto con los estudiantes como con los formadores, no la consideraremos en el análisis de resultados, ya que deseamos centrar nuestras reflexiones en las prácticas instruccionales de los formadores, tanto a nivel de las actividades propuestas como de la gestión en el aula, que han resultado impactantes para los estudiantes y les han llevado a la construcción de conocimiento profesional inicial.

RESULTADOS

En el FGF se conversó con los formadores sobre cada uno de los temas que se discutieron en el FGE. Al ser cuestionados por las necesidades y/o expectativas que creen que tienen los estudiantes al entrar al master, ven una clara diferencia entre el conocimiento matemático que se posee de la formación inicial y aquel que es necesario para la enseñanza. Sin embargo, los estudiantes no mencionan el conocimiento matemático específico como una necesidad de formación del master, pues consideran que saben suficientes matemáticas como para enseñar en la escuela: *"lo que no quería del master, sobre todo, era que me explicaran el temario, yo no quería que me enseñaran más del temario de matemáticas de secundaria, porque eso ya me lo sabia o ya me lo aprenderé" (E2*[xxxvi]*).*

De esto surge una pregunta clave a los formadores: ***¿cómo afrontan en los cursos que imparten en el Master el hecho de que los estudiantes no cuestionen su conocimiento matemático de entrada?*** Los formadores sostienen que el cuestionamiento del conocimiento matemático es un elemento significativo de la planificación de los cursos, por lo que es parte sustancial de las actividades de formación. Como estrategia para ello, los formadores ven en la resolución de problemas matemáticos escolares una vía para el conflicto del conocimiento matemático de entrada de sus estudiantes: *"una de las vertientes del programa del master, creo yo, es poner al alumno delante de situaciones, alumnos del master, en que su alumno del colegio o el instituto se verá puesto durante las clases de matemáticas" (F3)*. Esto permite, según este formador, que los estudiantes del master vivencien las dificultades que tendrían sus alumnos en la construcción del conocimiento matemático.

Sobre las actividades o formas de trabajo que impactan mayormente a los estudiantes, los formadores resaltan una en particular: *"yo, no tengo duda, las que traen situaciones del aula a la clase" (F1)*. Según ellos, estas actividades permiten formar a los estudiantes en la observación de la comprensión que los alumnos van construyendo de un determinado tema de estudio. Por otra parte, la presentación de actividades problematizadoras, tanto didácticas como matemáticas, tienen alto impacto en los estudiantes, dada la cultura de enseñanza aprendizaje que estos estudiantes tienen: *"esto creo que les impacta porque fundamentalmente nunca han trabajado así. Las clases que han recibido en donde sea, eh?... la tarea del profesor es exponer, explicar, muy bien o muy mal, es igual…" (F4)*. Este tipo de actividad problematizadora desarrollada en el master concuerda con la alta valoración que dan los estudiantes a la resolución de problemas: *"…plantear un problema, (…) y ver cómo desde un problema muy sencillo, de una cuestión casi casi trivial, puedes llegar a construir muchísimo, y sobre todo que puedes diseñar esos problemas para que todo el mundo sea capaz de llegar, (…) eso me pareció fascinante" (E5)*.

Considerando que la formación prepara para la práctica profesional, a los formadores se les pide reflexionar sobre la ***relación entre las actividades de formación y las tareas profesionales*** que el profesor deberá desempeñar en sus contextos laborales, y en particular si las primeras deben estar enfocadas a simular las segundas. Entre los formadores hay consenso en que existe un grupo de actividades de formación sobre las cuales debe lograrse una identificación con la profesión, es decir, que determinadas actividades que se presentan en la formación son precisamente aquellas tareas que tendrán que desarrollar los estudiantes en su contexto laboral. Entre ellas, los formadores distinguen como mínimo tres tareas profesionales nucleares: planificación, entendida como la creación de actividades de enseñanza aprendizaje de acuerdo con el currículum, gestión de la interacción y comunicación del conocimiento matemático a partir de las actividades elaboradas, y evaluación en el sentido de identificación del grado de logro de procesos y conceptos matemáticos en los alumnos.

Respecto del impacto de las prácticas instruccionales desarrolladas por los formadores, los estudiantes reconocen en ellas coherencia, es decir, consideran que desarrollan su práctica de la misma forma en que señalan que ellos deberían hacerlo en la escuela: *"a nivel de formadores, en la parte más de matemáticas, pues casi todos, excepto uno que era más tradicional, te la hacían del modo que querían… que al final las clases se hacían del modo cómo querían ellos que aprendieses, y con eso… o sea, aprendes más con la práctica y cómo te están cuestionando los mismos formadores (...) en general, a mi lo que es la parte de matemáticas, hacían las mates, pues con problemas, y aunque habían otras más tradicionales, en principio, predicaban con el ejemplo" (E2).* Asimismo, los estudiantes señalan que la formación es inclusiva y que está basada en la reflexión. Considerando estas características de su formación, los estudiantes señalan que han podido percibir la complejidad de la enseñanza, tanto en lo matemático como en lo didáctico. Además, señalan el cambio que han vivido en cuanto al foco del conocimiento profesional: desde la idea inicial de que para enseñar no se necesita más matemática que la que ya se sabe, se descubre la necesidad del cómo enseñar, y a partir de aquí se sostiene que existen tanto unas matemáticas específicas para la enseñanza, como un conocimiento sobre matemáticas necesario para desarrollarla: *"Pero incluso en el 'qué', yo pensaba: en realidad yo no vengo a aprender aquí matemáticas porque ya sé suficientes como para secundaria. Y al ver que tampoco, (tampoco se suficiente), cuanta matemática has de tu aprender para poder ser profesor de secundaria (…) No tenia tan claro el concepto este de: qué matemáticas tenemos que saber para ser profesores de secundaria (…) Aunque no sea el contenido que directamente se enseña, pero ese otro contenido que tiene que envolver aquello que se enseña, pues yo no… arrogantemente quizá no era tan consciente de eso" (E1).*

A partir del cambio de ciertas creencias evidenciadas por los estudiantes, se discute con los formadores ***cuáles serían los aspectos fundamentales que debe abordar la formación en cuanto la imagen que tienen los estudiantes de la enseñanza, el aprendizaje y las matemáticas***. Los formadores sostienen que hay dos aspectos deseables que debiera cumplir un programa de formación: el quiebre epistémico-profesional y la obtención y manejo de herramientas (conceptuales y técnicas). Para lograr esto, los formadores discuten qué modelo de formación sería más propicio: el modelo transversal (planificación, gestión, evaluación) o el modelo temático (didácticas de temas específicos). Dado que lo que impacta a los estudiantes es la coherencia de las prácticas instruccionales, para los formadores sería la gestión de las actividades y del aprendizaje en general lo que contribuye a lograr estos mínimos, y no tanto el tipo de estructura curricular a la cual están expuestos los estudiantes durante su formación.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS Y CONCLUSIONES

A partir de los resultados, se pueden evidenciar diversos aspectos relacionados con el impacto de la actividad instruccional de los formadores de profesores de matemáticas. En primer lugar, se puede apreciar un cambio en la idea que tienen los estudiantes respecto del lugar que ocupa el conocimiento matemático en la enseñanza de la matemática escolar. Por medio de diversas estrategias (e.g. poner a los estudiantes en situación de alumnos) y la aplicación de actividades de formación desafiantes, se logró que los estudiantes consideraran la necesidad de tener un conocimiento matemático específico para la enseñanza (Ball, Thames y Phelps, 2008), y ya no solo el conocimiento matemático general que traían de su formación académica y/o escolar.

Este cambio se basa en el enfoque didáctico del programa, la Resolución de Problemas, altamente valorado por los estudiantes, y también en el diseño e implementación de las actividades de formación. Los formadores establecieron en estas actividades una relación teoría-práctica permanente (e.g. utilización de casos de aula para el análisis didáctico por parte de los estudiantes), basando el aprendizaje de la enseñanza a partir del estudio de la práctica (Zaslavsky, 2008), lo cual tiene una alta influencia en la formación de los profesores y permite construir el conocimiento necesario para la enseñanza (Zaslavsky, 2007).

Además de las actividades didáctico-matemáticas que el formador diseña e implementa, para los formadores la gestión es un aspecto crucial en la relación entre el formador y el estudiante (Sanchez y García, 2004), ya que dicha gestión permite evidenciar los enfoques didácticos que subyacen la actividad instruccional del formador (Zaslavsky, 2007).

El impacto de las prácticas instruccionales del formador, dada la naturaleza dual del modelo de formación (transversal y temático), se constituye por los actos formativos que se desarrollan, tanto a nivel de actividades como de gestión de clases, en su función de elementos modeladores de la práctica. No obstante, el impacto no está sólo en ambos elementos de manera puntual, ni tampoco únicamente en su relación, sino en la coherencia que presenta el formador (y, en general, el programa: *racionalidad formativa*) entre lo que se hace (actos formativos) y lo que se dice que se debe hacer en los procesos de enseñanza aprendizaje. Esta coherencia será lo que permitirá evidenciar la racionalidad formativa del programa, y por tanto entregar el modelo que se busca que utilicen los profesores en su práctica, al menos en las etapas noveles.

Creemos que es muy relevante para la formación de profesores ahondar en la *racionalidad formativa* que evidencia el formador, para lo cual esperamos indagar en cuál es el sustento teórico del formador en relación a la elección de tareas, del discurso que usa para justificar dicha elección, de la estructura de las tareas, de la interacción con los profesores durante la actividad, y de las formas en que el formador promueve la reflexión sobre la experiencia de aprendizaje producida (Zaslavsky, 2007).

Referencias

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. C. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of teacher education, 59*(5), 389 - 407.

Boyd, D. J., Grossman, P. L., Lankford, H., Loeb, S., & Wyckoff, J. (2009). Teacher Preparation and Student Achievement. *Educational Evaluation and Policy Analysis, 31*(4), 416-440.

Chapman, O. (2009). Educators reflecting on (researching) their own practice. In R. Evan & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 121 - 126). New York: Springer.

Christiansen, B., & Walter, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 243 - 307). Reidel: Reidel Publishing company.

Gellert, U. (2005). La formación docente entre lo teórico y lo práctico. En I. M. Gómes-Chacón & E. Planchart (Eds.), *Educación Matemática y Formación de Profesores. Propuestas para Europa y Latinoamérica*. Bilbao: Univeridad de Deusto.

Gómez, P. (2009). Mathematics educators' activities and knowledge. In R. Evan & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 103-104). New York: Springer.

Jaworski, B. (2008). Mathematics teacher educator learning and development. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional. Handbook of Mathematics Teacher Education.* (Vol. 4, pp. 1 - 13). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Hanbook of research on the Psycology of Mathematics Education (PME)*. Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Sanchez, V., & García, M. (2004). Formadores de profesores de matemáticas: una aproximación teórica a su conocimiento profesional. *Revista de Educación, 333*, 481 - 493.

Zaslavsky, O. (2007). Mathematics-related task, teacher education, and teacher educator. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10*(4-6), 433 - 440.

Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of task that facilitate teacher learning. In B. Jaworski & T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional. Handbook of Mathematics Teacher Education.* (Vol. 4, pp. 93 - 114). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Zaslavsky, O. (2009). Mathematics educators' knowledge and development. In R. Evan & D. L. Ball (Eds.), *The professional education and development of teachers of mathematics. The 15th ICMI Study* (pp. 105 - 111). New York: Springer.

Zaslavsky, O., & Leikin, R. (2004). Professional developmentof mathematics teacher educators: growth through practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 7*, 5-32.

[xxxiii] Esta comunicación es presentada en el marco de la estancia post doctoral realizada por el primer autor en la Universitat Autònoma de Barcelona entre agosto de 2012 y febrero de 2013, bajo la supervisión del segundo autor.

[xxxiv] En este artículo, utilizamos “estudiantes” para referirnos a los profesores en formación inicial, y “alumnos” para referirnos a los aprendices en el contexto escolar.

[xxxv] Estas entrevistas se realizaron en el mes de octubre de 2012, una vez los estudiantes ya habían defendido su trabajo final de Master, y finalizado formalmente su formación.

[xxxvi] Las transcripciones usadas como evidencia seran nominadas con una E cuando corresponada a lo dicho por un estudiantes en el FGE, y por una F cuando sea algo dicho por un formador en el FGF. El número que le acompaña a cada letra identifica a un estudiante o formador en particular.

INFLUENCIA DE GEOGEBRA EN LA ADQUISICIÓN DE COMPETENCIAS GEOMÉTRICAS Y DIDÁCTICAS

GeoGebra influence in the acquisition of geometric and pedagogical competencies

Natalia Ruiz López y César Sáenz de Castro

Facultad de Formación de Profesorado y Educación

Universidad Autónoma de Madrid

Resumen

La investigación que presentamos pretende analizar la influencia sobre la mejora de las competencias geométricas y didácticas de los estudiantes de Magisterio, del software de geometría dinámica GeoGebra. Para ello hemos realizado un diseño cuasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente. El instrumento de medida ha consistido en un cuestionario formado por los ítems de contenido didáctico-geométrico liberados del estudio internacional TEDS-M. El análisis estadístico de los resultados nos lleva a afirmar que la utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Educación Primaria, frente al recurso lápiz y papel.

Palabras clave: *GeoGebra, competencias didáctico-geométricas, formación de profesorado, TEDS-M.*

Abstract

The present research aims to analyze the influence of the dynamic geometry software GeoGebra on improving geometric and pedagogical competencies in pre-service teachers. We therefore performed a quasi-experimental design pretest-posttest with nonequivalent control group. The measuring instrument consisted of a questionnaire that included geometric and pedagogical content knowledge items from the international study TEDS-M. Statistical analysis of the results leads us to conclude that the use of GeoGebra favors the development of geometric and didactic skills in students of the Degree of Primary Teacher Training, versus pencil-paper resource.

Keywords: *GeoGebra, geometric and pedagogical competencies, teacher training, TEDS-M.*

INTRODUCCIÓN

Con la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior los estudios de grado de Magisterio en Educación Primaria estructuran sus enseñanzas a partir de la adquisición de competencias del alumnado. En las nuevas titulaciones se tienen que implementar metodologías que ayuden a desarrollar esas competencias, básicas y específicas, y que permitan su evaluación. Entre las competencias que los futuros maestros tienen que adquirir durante su formación inicial se encuentran las competencias geométricas básicas. Esta necesidad, junto con la opinión compartida por los autores de que un cambio metodológico podría beneficiar el aprendizaje de los conceptos didáctico-geométricos, que tantas dificultades plantean a nuestros alumnos, nos ha llevado a realizar esta investigación.

Ruiz, N. y Sáenz de Castro, C. (2013). Influencia de Geogebra en la adquisición de competencias geométricas y didácticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 483-491). Bilbao: SEIEM.

Los métodos tradicionales de enseñanza de la geometría basados en la resolución de problemas de lápiz y papel, en recursos manipulativos o multimedia se han analizado en múltiples investigaciones. Sin embargo aún hace falta más información sobre cómo contribuye el software de geometría dinámica (en adelante, SGD) a la adquisición de competencias geométricas. En los últimos cursos en los que hemos impartido docencia en geometría y su didáctica hemos podido experimentar los cambios que produce el uso de un SGD en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Esto nos ha convencido de que introducirlos de manera habitual en las clases puede beneficiar la adquisición de competencias geométricas en los alumnos. Los sistemas de geometría dinámica permiten realizar construcciones en las que es necesario conocer las propiedades geométricas y las relaciones entre los distintos elementos de las figuras. Además, el "arrastre" de los objetos por la pantalla permite hacer generalizaciones y comprobar propiedades que con los métodos tradicionales a menudo no pueden realizarse. El uso de los SGD en la enseñanza produce cambios en la actuación docente en el aula y en las características del conocimiento que construye el alumno, como muestran muchos de los estudios realizados hasta la fecha (Carrillo & Llamas, 2005; Laborde & Capponi, 1994; Laborde, 2001; Murillo & Fortuny, 2003).

Sin embargo, no hay muchas investigaciones realizadas sobre la influencia de los SGD en la formación de profesorado de matemáticas y las que hay son fundamentalmente referidas al profesorado de educación secundaria. En cuanto a formación inicial de profesores de primaria, encontramos varias publicaciones en el seno del grupo de investigación *Aprendizaje de la Geometría* de la SEIEM. El profesor Ricardo Barroso expone una investigación realizada desde el paradigma de investigación-acción donde analiza si el uso de Cabri II ayuda a la comprensión de propiedades geométricas en un entorno de resolución de problemas con futuros maestros de Primaria (Barroso, 2003; Barroso, 2004).

Después de revisar la literatura sobre este tema, creemos que hace falta seguir investigando los aspectos relacionados con la adquisición de competencias didáctico-geométricas y el uso de SGD en estudiantes de magisterio, en concreto vamos ahora a centrarnos en GeoGebra, que es el software que hemos elegido.

PLANTEAMIENTO DE LOS OBJETIVOS DE INVESTIGACIÓN

Como ya hemos dicho, en esta investigación el problema que se pretende abordar es cómo interviene el software de geometría dinámica GeoGebra en el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en la formación inicial del profesorado de Primaria (Ruiz-López, 2012a). Para ello hemos planteado los siguientes objetivos:

- Identificar las competencias geométricas que deben desarrollarse durante la formación inicial del profesorado de Educación Primaria.
- Analizar cuáles de estas competencias pueden mejorar con el uso de GeoGebra.
- Estudiar si mejoran las competencias geométricas y didácticas con la utilización de GeoGebra respecto al recurso "lápiz y papel" a través del diseño de una investigación pertinente.
- Examinar la influencia del uso de GeoGebra en las creencias sobre las matemáticas y su enseñanza de los estudiantes de Magisterio.
- Analizar qué tipología de alumnos obtiene mejores resultados con GeoGebra en relación a su nivel de competencia digital.

En este artículo nos vamos a centrar en la descripción de cómo se ha abordado el tercer objetivo planteado, la metodología utilizada, el análisis de los datos obtenidos y las conclusiones a las que hemos llegado.

MARCO TEÓRICO

Como marco teórico se ha utilizado el estudio TEDS-M [xxxvii] (*Teacher Education Study in Mathematics*) que supone la primera comparativa internacional sobre adquisición de competencias matemáticas y análisis de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza entre futuros profesores. El marco teórico de TEDS-M define que el conocimiento matemático necesario en la formación del profesorado se compone de dos dominios: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico-didáctico [xxxviii]. A su vez, este último conocimiento se subdivide en al menos tres componentes: conocimiento curricular (conocimiento sobre medios y recursos para la enseñanza de las matemáticas, incluidos libros de texto y tecnología), conocimiento sobre la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y conocimiento sobre las representaciones de conceptos y procedimientos matemáticos para la enseñanza y aprendizaje. Estas tres componentes corresponden aproximadamente con las categorías enunciadas por Shulman (2005) y por Fan & Cheong (2002).

La participación española en el proyecto TEDS-M[xxxix] persigue analizar y caracterizar, sobre una sólida base empírica, cómo es la formación matemática inicial del profesorado de primaria en España, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas de acción que contribuyan a mejorarla (Gutiérrez et al., 2012).

Conocimiento de Contenidos Matemáticos

El marco de referencia seguido en TEDS-M para medir el Conocimiento de Contenidos Matemáticos (MCK) de los futuros profesores de primaria ha sido el mismo que se siguió en el estudio TIMSS 2007, con objeto de poder establecer relaciones útiles entre los resultados obtenidos con los estudiantes de primaria y la formación que reciben los profesores de esta etapa. Se acordó que la investigación debía centrarse en los contenidos que los profesores tenían que enseñar.

Los dominios que componen el conocimiento de contenidos matemáticos que se desarrollan en los cuestionarios son: Números, Geometría, Álgebra y Datos. Además se adoptaron los tres componentes principales del estudio TIMSS 2007 para el dominio cognitivo (Tabla 1). Para los profesores de primaria se priorizaron los ítems del subdominio Conocimiento, seguidos de Aplicación y Razonamiento. El grado de dificultad de cada ítem se categorizó en tres niveles: principiante (contenidos de la etapa educativa en la que el futuro profesor enseñará), intermedio (contenidos de uno o dos cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará) y avanzado (contenidos de tres o más cursos superiores a la etapa educativa en la que el profesor enseñará). La mayoría de los ítems correspondieron al nivel intermedio.

Conocimiento del Contenido Pedagógico-didáctico

El marco teórico en el que se basa la medida del Conocimiento del Contenido Pedagógico-Didáctico (MPCK) se desarrolló en el estudio de viabilidad de TEDS (Schmidt et al., 2007) y en investigaciones previas en este campo. Los dominios estudiados de MPCK, tanto para el cuestionario de Primaria como para el de Secundaria son: conocimientos matemáticos curriculares, conocimientos de planificación de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas y representaciones matemáticas para la enseñanza-aprendizaje. En el estudio final se combinaron los dos primeros subdominios en el subdominio llamado currículo/planificación.

Tabla 1 – Subdominios cognitivos del Conocimiento de Contenidos Matemáticos

CONOCIMIENTO	
Recordar	Recordar definiciones; terminología; propiedades numéricas; propiedades geométricas; notación.
Reconocer	Reconocer objetos matemáticos, formas, números y expresiones; reconocer equivalencias.
Calcular	Resolver procedimientos algorítmicos de suma, substracción, multiplicación y división con números enteros, fracciones, decimales; estimar cálculos; resolver procedimientos algebraicos.
Interpretar	Interpretar información de gráficos, tablas u otras fuentes; leer escalas simples.
Medir	Usar instrumentos de medida; usar apropiadamente las unidades de medida; estimar medidas.
Clasificar/ordenar	Clasificar/agrupar objetos, formas, números y expresiones según sus propiedades; tomar decisiones correctas sobre los elementos de una clase; ordenar números y objetos según sus atributos.
APLICACIÓN	
Seleccionar	Seleccionar una operación, método o estrategia apropiada y eficiente para resolver problemas donde se conocen los algoritmos o métodos de solución.
Representar	Mostrar datos en diagramas, tablas, cuadros o gráficos: generar representaciones equivalentes para una expresión dada.
Modelizar	Generar un modelo adecuado, como una ecuación o diagrama, para resolver problemas.
Reproducir	Seguir y ejecutar un conjunto de instrucciones matemáticas; dibujar figuras y formas de acuerdo a las especificaciones dadas.
Resolver problemas rutinarios	Resolver rutinas o tipos de problemas familiares (por ej. usar propiedades geométricas para resolver problemas); comparar diferentes representaciones de datos; usar datos de cuadros, tablas, gráficos y mapas para resolver problemas rutinarios.
RAZONAMIENTO	
Analizar	Usar relaciones entre variables u objetos en situaciones matemáticas; usar razonamiento proporcional; descomponer figuras geométricas para simplificar problemas; dibujar el desarrollo de un sólido; visualizar transformaciones de figuras tridimensionales; comparar representaciones diferentes de los mismos datos; realizar inferencias válidas de informaciones dadas.
Generalizar	Generalizar el dominio de validez de un problema o razonamiento matemático.
Justificar	Justificar si una proposición, un resultado o una propiedad es verdadera o falsa.
Resolver problemas no rutinarios	Resolver problemas en contextos reales y aplicar procedimientos matemáticos en contextos no familiares complejos; usar propiedades geométricas para resolver problemas no rutinarios.

Los cuestionarios

Los cuestionarios[xl] que se han utilizado se componen de ítems clasificados en las dos dimensiones del conocimiento según su contenido que hemos descrito en los epígrafes anteriores, MCK y MPCK. Antes de su aplicación se realizó un profundo estudio estadístico para verificar que los ítems elegidos reunían las condiciones apropiadas de fiabilidad y validez y al final se eligieron los siguientes:

- 24 items de MCK (9 de álgebra, 6 de geometría, 7 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según el subdominio cognitivo: Conocimiento (15), Aplicación (8) y Razonamiento (1).
- 10 items de MPCK (2 de álgebra, 2 de geometría, 3 de números y 2 de tratamiento de la información), distribuidos de la siguiente forma según los dos subdominios: planificación/currículo (6) y representaciones (4).

METODOLOGÍA

El problema de investigación que vamos a analizar aquí emana del tercer objetivo que nos planteamos en este estudio y lo hemos formulado de la siguiente forma:

P1- ¿La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria con respecto al recurso "lápiz y papel"?

Para contestar esta pregunta hemos propuesto un diseño experimental que integra los enfoques cuantitativo y cualitativo. Desde la metodología cuantitativa se ha realizado un diseño cuasi-experimental pretest-postest con grupo de control no equivalente (muestreo disponible con grupos ya formados). La población ha consistido en los estudiantes de 2º curso del Grado de Magisterio de la Universidad Autónoma de Madrid matriculados en la asignatura "Matemáticas y su Didáctica II" el curso 2010-2011, con un tamaño de 319 alumnos. Para formar la muestra se eligieron dos grupos de tarde y se asignó aleatoriamente a cada uno ser el grupo experimental (51 alumnos) y el grupo control (49 alumnos). Para controlar que no hubiera diferencias iniciales entre los grupos que pudieran influir en los resultados se realizó un pretest de manera que pudiera estudiarse si las medias entre los grupos eran equivalentes. Así podíamos asegurar la validez interna del diseño. Otro aspecto que queríamos controlar era la influencia de la intervención del profesor en ambos grupos, para ello se decidió que fuese la misma persona.

Las variables involucradas en nuestro problema de investigación son las siguientes:

- Variable independiente: Tipo de recurso. Esta variable toma dos valores: GeoGebra y lápiz-papel.
- Variable dependiente: La competencia geométrica y didáctica del alumnado.

Hemos elegido como instrumento de medida de la variable dependiente un cuestionario que podemos considerar fiable y válido, ya que es una prueba estandarizada, formado por los ítems liberados del estudio TEDS-M del dominio de Geometría. Por lo tanto, la prueba que hemos utilizado como pretest y postest consta de 8 ítems relativos a Geometría y Conocimientos Didácticos sobre Geometría.

El tratamiento o intervención educativa ha tenido dos componentes diferenciadas: 1) un proceso formativo común a los grupos experimental y control; 2) un proceso formativo específico para cada uno de los grupos. Es importante precisar que se ha intentado realizar una intervención en el grupo control lo más parecida posible a la realizada en el grupo experimental. Por eso se decidió desde el primer momento que en los dos grupos que iban a participar en la investigación la profesora fuera la misma. Se pretendió que la única diferencia fuese el uso de GeoGebra en el grupo experimental para resolver los problemas geométricos que el grupo control resolvería con lápiz y papel. El resto de los métodos docentes han sido iguales en ambos grupos.

Para apoyar y dar más significado a los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo, se ha realizado además un estudio de casos que nos ha permitido analizar profundamente el proceso de resolución de problemas de geometría mediante GeoGebra en parejas de estudiantes (Ruiz-López, 2012b).

ANÁLISIS DE LOS DATOS

Para analizar los datos obtenidos en el estudio cuantitativo se ha realizado un estudio estadístico descriptivo de la variable Mejora Total, que es la diferencia de puntuaciones para cada alumno en la prueba de competencias geométricas y didácticas entre el postest y el pretest. Hemos estudiado las tablas de frecuencias, los estadísticos descriptivos y los diagramas de caja (Figura 1) e histogramas con ajuste normal, para el grupo experimental y el grupo control. También hemos realizado un análisis descriptivo de la normalidad. Además, hemos realizado un estudio descriptivo exhaustivo de cada ítem de la prueba de competencias geométricas y didácticas.

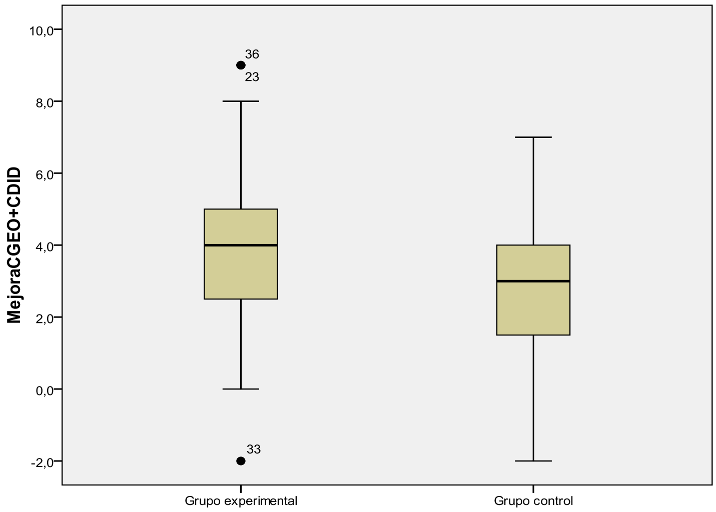


Figura 1. Diagramas de caja para P1

Observando los datos podemos concluir lo siguiente:

Los dos grupos mejoran en el postest, pero la media de mejora del grupo experimental es superior en más de un punto (1,133) a la del grupo control. La mediana y la moda del grupo experimental son superiores en un punto a las del grupo control. En los diagramas de caja de la Figura 1 se observa que los alumnos del grupo experimental han mejorado más que los del grupo control.

Una vez que el análisis descriptivo nos ha permitido comprobar un mejor comportamiento del grupo experimental frente al grupo control respecto al problema P1, tenemos que ver ahora hasta qué punto esa mejora es significativa desde el punto de vista estadístico. Para ello hemos realizado el análisis inferencial: hemos utilizado un ANCOVA para analizar la variable Total, que es la suma de las puntuaciones obtenidas en los ítem de competencias geométricas (CGEO) y los ítem de competencias didácticas (CDID), Total =CGEO+CDID, considerando como covariable la medida del pretest. Además, se realizó el Modelo Lineal General (MLG) de Medidas Repetidas con la variable Total para comprobar los resultados obtenidos en el ANCOVA. Los gráficos de perfil nos han permitido comparar los grupos experimental y control y analizar si hay interacciones.

Tabla 2 – ANCOVA para la variable TOTAL

ANCOVA para la variable TOTAL					
Variable dependiente:Puntuación total postest					
Origen	Suma de cuadrados tipo III	gl	Media cuadrática	F	Sig.
Modelo corregido	141,523[a]	2	70,761	25,097	,000
Intersección	511,986	1	511,986	181,585	,000
TOTAL1	138,679	1	138,679	49,185	,000
Grupo	12,721	1	12,721	4,512	,037
Error	245,299	87	2,820		
Total	6653,500	90			
Total corregida	386,822	89			

a. R cuadrado = ,366 (R cuadrado corregida = ,351)

Analizando la variable Total, obtenemos que hay diferencias significativas entre el pretest (Total 1) y el postest (Total 2) en ambos grupos (sig = 0,000, en la Tabla 2). Además, hay diferencias significativas según el grupo, experimental o control (sig=0,037<0,05). Estos datos se corroboran en el MLG de medidas repetidas (sig = 0,009 < 0,05). Ambos grupos han obtenido un avance en los resultados de la prueba de conocimientos geométricos y didácticos, pero el grupo experimental partía de una media más baja en el pretest y ha obtenido una media más alta en el postest que el grupo control. Podemos ver claramente la interacción entre los grupos en la Figura 2.

CONCLUSIONES

Después del análisis estadístico de los datos obtenidos en la prueba de conocimientos didáctico-geométricos realizada a los estudiantes participantes en el estudio, podemos responder afirmativamente a nuestra pregunta de investigación P1: *La utilización de GeoGebra favorece el desarrollo de competencias geométricas y didácticas en el alumnado del Grado de Magisterio de Ed. Primaria, frente al recurso lápiz-papel.*

La metodología empleada en esta investigación con los estudiantes integrantes de los grupos experimental y control, ha resultado eficaz para desarrollar sus competencias didáctico-geométricas. El grupo experimental, que ha seguido el mismo proceso formativo que el grupo control añadiendo el entorno GeoGebra para la resolución de problemas geométricos, ha obtenido resultados estadísticamente significativos en la mejora de competencias didáctico-geométricas, a pesar de haber utilizado como instrumento de medida una prueba de lápiz y papel. Los ítems en que el grupo experimental ha obtenido mejores resultados (respecto al grupo control) son los de aplicación, dentro del dominio TEDS-M de contenidos geométricos, y de planificación del currículo, dentro de los didácticos.

También es interesante analizar la opinión de los alumnos del grupo experimental, recogida en una encuesta al final del Taller de GeoGebra. Mayoritariamente (entre el 85% y el 92%) expresan que este Taller les ha ayudado a comprender mejor los conocimientos geométricos y a explorar, experimentar, hacer conjeturas y comprobarlas. Prefieren este recurso a la hora de resolver problemas nuevos que el método tradicional de papel y lápiz (59%). Además, opinan que es un buen recurso para la enseñanza de la geometría en Primaria (81%).

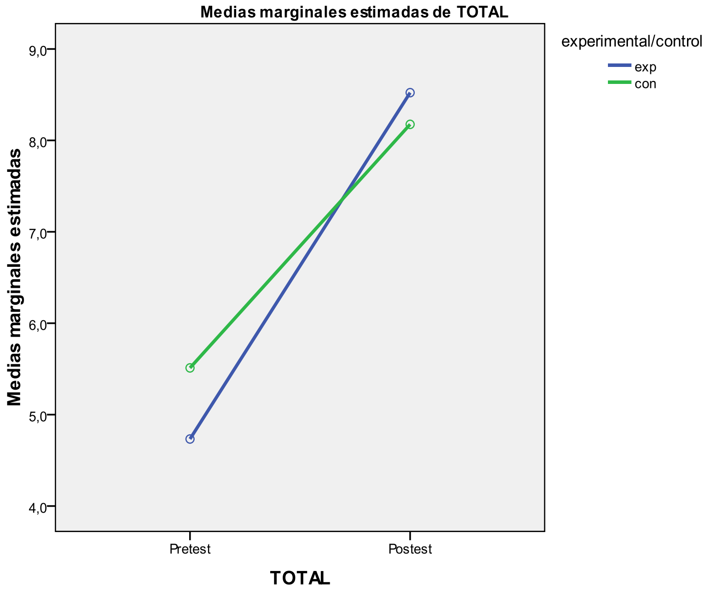


Figura 2. Gráficos de perfil de la variable Total

Referencias

Barroso, R. (2003). Elección de cuatro problemas geométricos para una investigación sobre la comprensión de propiedades geométricas. Una justificación. *Investigación En Educación Matemática: Actas del VII Simposio De La SEIEM*, Granada. 139-152.

Barroso, R. (2004). Estado actual de la investigación sobre el "estudio sobre la influencia del software de geometría dinámica en la visualización y descubrimiento de propiedades geométricas". *Actas Del VIII Simposio De La SEIEM*, La Coruña. (8) 1-9.

Carrillo, A., & Llamas, I. (2005). *Cabri géomètre II plus una aventura en el mundo de la geometría*. Madrid: Ra-Ma.

Fan, L., & Cheong, N. P. C. (2002). Investigating the sources of singaporean mathematics teachers' pedagogical knowledge. *Mathematics Education for a Knowledge-Based Era*, Singapore. *2*, 224-231.

Gutiérrez, A., Gómez, P., Rico, L. (2012). Conocimiento en Didáctica de la Matemática de estudiantes españoles de Magisterio en TEDS-M. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.). *Investigación en Educación Matemática: Actas del XVI Simposio De La SEIEM*, Jaén. 341-351.

Laborde, C. (2001). Integration of technology in the design of geometry tasks with cabri-geometry. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*, 283-317.

Laborde, C., & Capponi, B. (1994). Cabri-Géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géomètrique. *Recherches en Didactique del Mathématiques, 14*(12), 165-210.

Murillo, J., & Fortuny, J. M. (2003). Interactividad en la red con actividades CABRI. *Contextos Educativos, 6-7*, 295-315.

Ruiz-López, N. (2012a). *Análisis del desarrollo de competencias geométricas y didácticas mediante el software de geometría dinámica GeoGebra en la formación inicial del profesorado de primaria.* Tesis doctoral. Universidad Autónoma de Madrid, Madrid. Retrieved from http://tdx.cesca.cat/handle/10803/109694

Ruiz-López, N. (2012b). Resolución de problemas geométricos con GeoGebra en la formación de profesores de educación primaria: Un estudio de casos. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional De São Paulo, 1*, 37-50. Retrieved from http://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/8607/6577

Schmidt, W., Tatoo, M. T., Bankov, K., Blomeke, S., Cedillo, T., Cogan, L., Schwille, J. (2007). *The preparation gap: Teacher education for middle school mathematics in six countries.* (MT21 report). East Lansing, MI: Michigan State University. Retrieved from http://hub.mspnet.org/index.cfm/14977

Shulman, L. (2005). Conocimiento y enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. [Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform] *Profesorado. Revista De Currículum y Formación Del Profesorado, 9*(2), 1-30. Retrieved from http://www.ugr.es/~recfpro/rev92ART1.pdf

---

[xxxvii] La presentación pública oficial del TEDS-M se encuentra en http://teds.educ.msu.edu. La página de TEDS-M España es http://www.ugr.es/~tedsm/

[xxxviii] En inglés, Mathematics Content Knowledge (MCK) y Mathematics Pedagogical Content Knowledge (MPCK).

[xxxix] El profesor Luis Rico Romero es el Coordinador Nacional de Investigación y responsable de la dirección científica del estudio en España.

[xl] Los ítems liberados del estudio TEDS-M se encuentran disponibles en la dirección: http://www.ugr.es/~tedsm/resources/Informes/Result_Viejo/PrimariaItemsLiberados.pdf

EDUCACIÓN DE ADULTOS EN ENTORNOS VIRTUALES: DISEÑO DE TAREAS PARA APRENDIZAJES DE GEOMETRÍA A TRAVES DE CONTENIDOS DE GEOGRAFÍA

Adult education in virtual environments: Design of tasks for geometry learning through geography contents

Jesús Salinas y Verónica Hoyos

CCH-UNAM y UPN (México)

Resumen

Se contribuye en la indagación de aplicaciones metodológicas que utilizan ciclos de diseño de tareas en entornos virtuales, en el caso de trabajadores adultos aprendiendo geometría. Primero se identifica el modelo educativo que subyace en un curso de matemáticas llamado Geometría y Geografía propuesto en un programa virtual de nivel bachillerato llamado BUNAM (http://www.bunam.unam.mx/), en donde los estudiantes considerados en el estudio son adultos mexicanos trabajadores en USA. Enseguida se realiza el análisis cognitivo de una de las tareas que ejemplifican al curso mencionado y también se clasifican los logros de los estudiantes al resolverla. El trabajo realizado se basa en la aplicación de un ciclo de diseño de tareas en la modalidad educativa virtual para avanzar en promover mejoras de los participantes en el aprendizaje de la geometría.

Palabras clave: *Educación en Entornos Virtuales, Ciclo de Diseño, Aprendizaje de la Geometría a través de la Geografía, Educación de Adultos*

Abstract

We contribute to the issue of design experiments in educational research, specifically dealing with the design of tasks for online adult education in geometry. We identified the educative model that underlies a mathematics course called Geometry and Geography proposed at BUNAM (http://www.bunam.unam.mx/), an online educative program for high school level. The population in this study was Mexican workers living in USA. Here we carried out a cognitive analysis of a representing task belonging to this course, and a classification of students' achievements as well. This work is based on the application of design experiments methodology in virtual environments to help promoting participant's improvement in geometry learning.

Keywords: *Online Education, Design Experiments, Geometry Learning Through Geography Contents, Adult Education*

INTRODUCCIÓN

Hay muy pocos trabajos de investigación sobre programas educativos virtuales cuyas características y resultados hayan sido reportados en foros internacionales como PME, ICME o SEIEM. Esto tal vez ocurre debido a la transparencia de Internet (Ponte et al., 2009) o debido a una resistencia general institucional en las escuelas en contra de la incorporación de las nuevas tecnologías (Ruthven, 2008). Sin embargo en la actualidad cada vez hay más investigadores que tratan de utilizar Internet como un instrumento para ofrecer programas educativos alternativos o complementarios y/o para la realización de investigación en educación matemática en entornos virtuales (Bardelle & DiMartino, 2012; Herbst, 2012; Borba 2009). La explosión de la oferta educativa virtual así como la investigación de sus alcances hacen necesario avanzar en la

Salinas, J. y Hoyos, V. (2013). Educación de adultos en entornos virtuales: Diseño de tares para aprendizajes de Geometría a través de contenidos de Geografía. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVII (pp. 493-499). Lugar: SEIEM.

elaboración de estándares para reportar los resultados obtenidos, los cuales refieran al menos a la identificación de los modelos educativos que subyacen en los programas educativos virtuales, así como a las evaluaciones o análisis de sus resultados en cuanto al aprendizaje que genera su instrumentación. El análisis de las competencias desarrolladas por los participantes en un programa virtual se vislumbra muy productivo por las características del almacenamiento de los datos (como la fidelidad) en la plataforma, pues esto hace posible instrumentar un ciclo de diseño de tareas (Callejo, M. L., Valls, J. & Llinares, S. 2007; DBRC, 2003) y formular sugerencias o incorporación de cambios para avanzar en la mejora del aprendizaje que se logra en esta modalidad.

El trabajo que aquí se presenta constituye un reporte de una primera fase de un proyecto de investigación que gira en torno de la exploración del impacto de un ciclo de diseño de tareas en la mejora del aprendizaje vía Internet. Las tareas que se revisan han sido propuestas en el marco de las actividades básicas que desarrollan estudiantes inmigrantes que viven en Estados Unidos, adultos matriculados en un programa educativo virtual de nivel bachillerato llamado *BUNAM* (http://www.bunam.unam.mx/). Los resultados obtenidos se vislumbran muy productivos desde el punto de vista de la investigación educativa debido al impacto que puede tener el aumento del nivel educativo de los participantes en su entorno familiar.

MARCO TEÓRICO

La integración de las matemáticas con otras disciplinas es importante en la consideración de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En particular, en los *Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares* de la NCTM (2000) se sugiere: "Las ideas geométricas son útiles para representar y resolver problemas en otras áreas de las matemáticas y en situaciones del mundo real, por lo que la geometría debe integrarse cuando sea posible en otras áreas "(p. 41). En trabajos más recientes sobre el desarrollo del razonamiento geométrico con adultos (Blair 2004) se retoma este enfoque.

Por otro lado, es interesante poner de relieve una serie de oportunidades investigativas y educativas que están presentes en la educación matemática en entornos virtuales (Borba 2009; Herbst, 2012; Bienkowsky, M., Feng, M. & Means, B. 2012), tales como la realización de exploraciones y el diseño de experimentos en contextos educativos determinados que permiten una mejor comprensión de las ecologías de aprendizaje (Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lesh. R. & Schauble, L. 2003) en juego, específicamente el establecimiento de ciclos de diseño de tareas (Callejo et al., 2007), o la exploración de fenómenos básicos de la educación matemática ahora en escenarios completamente nuevos (Herbst, 2012). En este estudio la modalidad virtual del programa *BUNAM* se apunta en cuanto a uno de sus aspectos funcionales (Cobb et al., 2003), el cual permitió llevar a cabo el experimento de diseño que aquí se presenta. En particular, el acceso a la plataforma digital de distribución del programa *BUNAM* favoreció la revisión de todas las respuestas de los estudiantes a las tareas propuestas, gracias a las ventajas de almacenamiento y reproducción de los datos que presentan los *Sistemas de Gestión del Aprendizaje* (*LMS*) subyacentes en los escenarios educativos virtuales (Loan & Teasley, 2009; Bienkowsky et al., 2012).

En esta primera fase del proyecto (y de la configuración del ciclo de diseño), se analizan las tareas del curso de *Geometría y Geografía* y las respuestas de los participantes a una de ellas. Se utilizan dos taxonomías, la del modelo de van Hiele y la SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) desarrollada por Biggs & Collis (1982), las cuales se juzgan compatibles y complementarias (Huerta, 1999). La taxonomía del modelo de van Hiele para el razonamiento geométrico (1986) se utiliza para sugerir mejoras en las tareas considerando un pensamiento progresivo de los estudiantes (Blair, 2004), y (ii) la taxonomía SOLO se usa para analizar las respuestas de los estudiantes a la tarea que se considera. En el modelo de van Hiele, al igual que en la taxonomía SOLO, los diferentes niveles pueden coexistir en el mismo tema y desarrollarse al mismo tiempo pero en diferentes grados. Esta situación, en ambas taxonomías, sugiere la viabilidad de una estrategia de enseñanza que ayuda a los estudiantes a desarrollar su razonamiento a través de "un enfoque integrador que incluya múltiples tipos de conocimiento" (Blair, 2004, p. 1).

Nivel de van Hiele	Objeto de pensamiento
Visual	Figura(s) como un todo
Descriptivo	Propiedades individuales de figuras
Abstracción	Relación entre propiedades
Deducción	Redes de relación en un sistema
Rigor	Relación entre sistemas

Tabla 1. Objetos de pensamiento en acuerdo con los niveles de van Hiele (Blair, 2004)

METODOLOGÍA Y ANÁLISIS

El ciclo de diseño se concreta en dos fases distintas. La primera fase, de la cual aquí se presentan características y resultados, se estructuró con base en el análisis de las competencias matemáticas que desarrollan los adultos que participan en el programa educativo virtual *BUNAM*. La segunda fase del proyecto está relacionada con el cierre del ciclo de diseño, con una organización colectiva para la revisión de las tareas del curso, y con el montaje en la plataforma de las modificaciones a las mismas. Sin embargo, en esta comunicación sólo se abordan detalles relativos a la primera fase del estudio. En esta fase, el análisis de las ejecuciones de los participantes se llevó a cabo teniendo en cuenta las facilidades que para su realización presenta el almacenamiento de datos en la plataforma de administración del programa educativo en juego (una del tipo *moodle*). Este almacenamiento hace posible instrumentar ciclos de diseño de las tareas matemáticas propuestas (Callejo et al., 2007; DBRC, 2003).

Otros aspectos metodológicos de la primera fase de nuestro estudio, importantes a destacar, están relacionados con las características de la población y de los programas de estudio. Al respecto mencionaremos que la población que aquí se considera son adultos trabajadores mayores de 30 años de edad que viven fuera de México, en Estados Unidos de Norteamérica (USA). Al inicio del programa de bachillerato *BUNAM*, cuentan con educación básica (primaria y secundaria). Cada curso en la modalidad virtual del programa *BUNAM* se lleva a cabo en un mes de trabajo en Internet, durante 20 horas a la semana, durante 4 semanas. Los diferente cursos se conectan con el contenido de una disciplina diferente (en el caso que se examina es la geografía, pero en otros casos, los cursos están integrados en una rama de la física o la biología o las ciencias sociales). De hecho, las matemáticas se estudian y utilizan como una herramienta. De esta manera, el contenido de cada curso de matemáticas corresponde aproximadamente a 20% del total disponible.

El análisis de la tarea discutida en este trabajo, la cual pertenece a la primera unidad, muestra que el aspecto geométrico prácticamente está ausente, lo que indica la necesidad de rediseñar la tarea de manera que integre la geometría con la geografía más allá de una vaga alusión a las formas geométricas implicadas. De esta manera, sería posible capitalizar esta tarea para mover a los estudiantes de un nivel de manejo descriptivo de una situación a la elaboración de una representación más abstracta.

Como Biggs & Collis (1982) señalan,

> el análisis SOLO puede ser de ayuda específica al profesor de geografía tanto en las áreas de contenidos como en los procesos (conocimientos y habilidades). Tal vez en la geografía más que en otras materias, el profesor puede capitalizar la experiencia inmediata del estudiante de su espacio inmediato y del medio ambiente y pasar de ello a una representación más abstracta de dicho entorno. La taxonomía SOLO parece particularmente útil para aislar aquellos aspectos que los estudiantes utilizan en la construcción de conocimientos y

> habilidades, y parecería ventajoso para los profesores aislar estos y construir sobre ellos en la planeación de sus lecciones (pp. 142-143).

A continuación se muestran las respuestas de los alumnos a la actividad mencionada. Cabe señalar que la mayoría de las respuestas de los estudiantes se adhieren casi exclusivamente a una transcripción literal de las declaraciones de Aristóteles, las cuales se proporcionaron en un texto disponible en la plataforma del programa.

La pregunta a resolver en todos los casos que enseguida se exponen es la siguiente: Explique qué validez científica ha tenido la evidencia que Aristóteles dio sobre la forma curva de la Tierra.

Tipo preestructural de respuestas

E1 (Estudiante 1): La tierra es esférica porque la comparó con los demás astros. Además, al observar los eclipses lunares la sombra que la tierra proyecta sobre la luna es curva. Con este fenómeno puede explicarse que la tierra tiene forma de una esfera.

E2: La tierra es esférica, porque tal es la forma aparente de los demás astros, tal es también la forma que toma un cuerpo, como una gota de agua, sometida a la sola presencia de sus partes y tal es la forma que nos revela la sombra terrestre en los eclipses de luna. Las ideas aristotélicas influenciaron las ideas sobre la esfericidad de la tierra durante la edad media en Europa.

E3: Esta teoría tuvo una vigencia científica de siglos dado que era utilizada por la mayor parte de las religiones. Y principalmente por los científicos que continuaron con los estudios de la tierra.

Puede notarse que, en cada una de estas respuestas, los estudiantes no responden a la pregunta planteada, simplemente repiten la información consultada. Y, aunque en la segunda respuesta, la pregunta se menciona explícitamente, en realidad, lo que el estudiante hace es repetir una parte de la información dada. La tercera respuesta podría ser transicional, ya que utiliza incorrectamente datos (era utilizada por la mayor parte de las religiones) potencialmente relevantes (el uso de la teoría aristotélica por otros científicos).

Tipo uniestructural de respuestas

E4: Las pruebas que aportó Aristóteles sobre la forma curva de la tierra fueron: La tierra es esférica porque las comparó con los demás astros. Además que al observar los eclipses lunares la sombra que la tierra provecta sobre la luna es curva. Con este fenómeno puede explicarse que la tierra tiene forma de una esfera.

En esta respuesta el estudiante reconoce el problema y tratan de responder. Retoma información de un aspecto relevante de una prueba científica: la constatación empírica u observacional de un enunciado y se restringe a éste.

Tipo multiestructural de respuestas

E5: Aristóteles aportó evidencias de la forma esférica de la tierra al observar la forma aparente de los demás astros. Al observar los eclipses de luna se dio cuenta de que la sombra proyectada por la tierra era circular, las dimensiones de la tierra no deben ser desmesuradas puesto que con el cambio de lugar varían el aspecto y número de las estrellas visibles.

En esta respuesta el estudiante consideran dos aspectos importantes, el aspecto observacional (la forma aparente de los demás astros) y deductivo (las dimensiones de la Tierra), pero no los integran.

Tipo relacional de respuestas

E6: Por supuesto la validez que asienta Aristóteles en sus observaciones son de gran peso e importancia para el mundo científico, es el quien aporta los primeros argumentos sólidos contra la tradicional teoría de la Tierra plana, haciendo notar que las estrellas parecen cambiar su altura en el horizonte según la posición del observador en la Tierra. Este fenómeno puede explicarse partiendo de la premisa que la Tierra es una esfera; pero resulta incomprensible suponiendo que sea plana.

En las respuestas de tipo relacional, como la que se muestra, los estudiantes usan gran parte de la información relevante y han integrado los aspectos empíricos y deductivos, como elementos de validación de una prueba científica. Sin embargo, al igual que en todas las otras respuestas, no se utilizan conocimientos básicos de la geometría para caracterizar e interpretar la forma de la Tierra.

DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Se puede observar que la dificultad de la tarea examinada se basa principalmente en la comprensión de lectura de un texto. Sin embargo, es importante tener en cuenta que una respuesta que vaya más allá de la repetición de lo que Aristóteles dijo requiere la consideración de otros aspectos. Por una parte, los estudiantes debieran tener una idea de lo que es una prueba científica. De esa manera, tendrían que analizar el material que se proporciona y seleccionar la información relevante para poder explicar qué validez científica tienen los argumentos que propuso Aristóteles para afirmar que la forma de la Tierra es esférica. Sin entrar a discutir con rigor que se entiende por una prueba científica, aquí hemos considerado como una respuesta más completa aquella que conjuga dos aspectos centrales, la observación y la teoría. En términos generales, se establece que una prueba científica consiste en contrastar empíricamente un enunciado que forma parte de una teoría.

Por otra parte, acorde con el propósito general de la unidad correspondiente, los estudiantes requieren aplicar conocimientos básicos de la geometría, es decir, realizar una representación geométrica de la interacción entre el Sol, la Tierra y la Luna que se alude en la tarea. Una representación esquemática del fenómeno de eclipse de Luna, como el de la Figura 1, permitiría visualizar elementos importantes del círculo (diámetro, arco, tangente, etc.) y relaciones geométricas (igualdad de ángulos, semejanza de triángulos) que podrían abstraerse del fenómeno, cuando la Tierra se encuentra alineada entre el Sol y la Luna. Por lo cual, sería conveniente pedir a los alumnos que elaboren una interpretación geométrica de la visualización del fenómeno y que utilicen sus nociones geométricas de manera informal. Posteriormente, se podría avanzar en un tratamiento más formal de tales conceptos. Nótese que este análisis de las posibles modificaciones a la tarea corresponde a una aplicación que aquí hemos llevado a cabo de la caracterización de los objetos del pensamiento según el modelo de van Hiele (Blair, 2004. Ver Tabla 1).

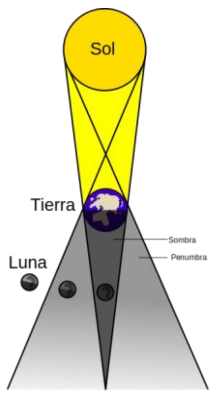


Fig. 1. Diagrama de un eclipse de Luna

Fig. 2. Fotografía de la secuencia de un eclipse de Luna

En general, los estudiantes en sus respuestas describieron de manera textual lo que supone la observación de figuras o formas geométricas. Sin embargo, si lo que se observa se relaciona con una imagen similar a la que aparece en la Figura 2, donde no hay curvas definidas, es evidente para el lector la dificultad que conlleva establecer una contrastación empírica del enunciado.

La compatibilidad que hay entre las taxonomías que se consideraron, la SOLO y la de van Hiele (Huerta 1999), sugiere que la trayectoria de aprendizaje que se elaboró y se presentó aquí podría ayudar a los estudiantes a desarrollar su razonamiento en el sentido que Blair (2004) establece: "el razonamiento empleado por los estudiantes "es complejo, y no se mapea sobre una clara secuencia de diferentes tipos de razonamiento. Esto sugiere que los estudiantes podrían beneficiarse de una instrucción diseñada para ayudarles a desarrollar su razonamiento a través de un enfoque integral que involucra múltiples tipos de conocimiento "(p.1). Puesto que las tareas en el contenido del programa *BUNAM* combinan contenidos de geografía con propiedades geométricas básicas, éstas podrían ser rediseñadas y completadas añadiendo material y/o actividades que ayuden a los estudiantes a comprender mejor los contenidos de geometría ahí involucrados.

Por otro lado, la necesidad de incorporar modificaciones a la tarea haría posible capitalizar su resolución para mover a los estudiantes de un nivel de manejo descriptivo de una situación hacia una representación más abstracta. Estarían entonces avanzando en el desarrollo del razonamiento geométrico en acuerdo con el modelo de van Hiele (1986), lo que evidenciaría que el énfasis en el rediseño o en la configuración de un ciclo de diseño potencia las posibilidades del aprendizaje de los participantes en las modalidades virtuales, como ya ha sido señalado por otros autores (Callejo et al., 2007).

Finalmente, los avances de la investigación en torno del impacto del contexto familiar o de la participación de los adultos en la educación de los niños en torno de las matemáticas básicas (Civil, 2009), potencian los alcances de la educación de adultos en modalidades como la que ofrece el programa *BUNAM*, por la posible transformación de las condiciones de desventaja y segregación de la población inmigrante. Aunque en esta comunicación no se abundará en este aspecto, vale la pena mencionar que ya Gadsden (1994) había hecho notar que la educación de adultos inmigrantes debía ser considerada desde una perspectiva amplia, teniendo en cuenta su dimensión social y familiar.

CONCLUSIONES

La elaboración del presente reporte, a partir de la instrumentación de la primera fase de un ciclo de diseño de tareas en un ambiente virtual de aprendizaje, se centró en el análisis y reflexión sobre el diseño de las tareas de uno de los cursos del programa educativo virtual *BUNAM* (http://www.bunam.unam.mx/), en parte para avanzar en la utilización de la geometría como herramienta para el desarrollo de un razonamiento cada vez más complejo. Además se mostró el potencial investigativo que tienen los *Sistemas de Gestión de Aprendizaje* (*LMS*) en relación con el análisis, rediseño e incorporación de cambios convenientes en las tareas, generando ciclos de diseño. Por último, se argumentaron posibles avances de los adultos inmigrantes en cuanto a sus aprendizajes en el curso de *Geometría y Geografía* del programa BUNAM, y también se habló del posible impacto social y familiar de su mejora educativa (Civil, 2009).

Referencias

Bardelle, C. & Di Martino, P. (2012). E-learning in secondary-tertiary transition in mathematics: for what purpose? *ZDM*, *44*, 787-800.

Bienkowsky, M., Feng, M. and Means, B. (2012). *Enhancing teaching and learning through educational data mining and learning analytics.* US Department of Education. Office of Educational Technology: SRI International.

Biggs J. B. and Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of Learning. The SOLO Taxonomy (Structure of the Observed Learning Outcome).* Academic Press, Inc.

Blair, S. (2004). Describing undergraduates geometry thinking via an object of thought interpretation of the Van Hiele model. *Paper presented at the TSG 10 of ICME 10*. Monterrey (Mexico). Retrieved at: http://descartes.ajusco.upn.mx/varios/tsg10/index.html.

Borba, M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematics classroom. *ZDM, 41*, 453-465

Callejo, M. L., Valls, J. y Llinares, S. (2007). Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional. *Investigación en la Escuela* No. 61.

Civil, M. (2009). Mathematics Education, Language and Culture: Ponderings From a Different Geographic Context. In R. Hunter, B. Bicknell & T. Burgess (Eds.), *Crossing divides: Proceedings of the 32nd anual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1)*. Palmerston North, NZ: MERGA.

Cobb, P., Confrey, J., Disessa, A., Lesh. R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1). 9-13.

Design Based Researcher Collective (2003). Design Based Research: An Emergent Paradigm for Educational Inquiry. *Educational Researcher, 32*(1), 5-8.

Gadsden, V. L., (1994). Understanding family literacy: Conceptual Issues Facing the field. *Teachers College Record*.

Herbst, P. (2012). Online Mathematics Education: A Research Agenda. Document of work, non- published. Ann Arbor: University of Michigan.

Huerta, M. P. (1999). Los niveles de van Hiele y la Taxonomía SOLO: Un análisis comparado, una integración necesaria. *Enseñanza de las Ciencias, 17* (2), 291-309.

Lonn, S. and Teasley, S. (2009). Saving time or innovating practice: Investigating perceptions and uses of Learning Management Systems. *Computers and Education, 53*, 686-694.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. USA: NCTM.

Ponte, J.P. et al. (2009). Tools and settings supporting mathematics teachers learning. *15th ICMI Study*, 185-209. New York: Springer.

Ruthven, K. 2008. Mathematical technologies as a vehicle for intuition and experiment. Paper prepared for the *ICMI Centennial Simposium*, Rome.

Van Hiele, P. (1986). *Structure and insight, a theory of mathematics education*. Orlando, FL: Academic Press.

EL DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE ESTUDIANTES PARA PROFESOR DE MATEMATICAS DE EDUCACION SECUNDARIA EN IDENTIFICAR LA COMPRENSION DE LA DERIVADA EN ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Developing prospective secondary mathematics teachers' noticing of high students' understanding of derivative

Gloria Sánchez-Matamoros[1]; Ceneida Fernández[2]; Salvador Llinares[2] y Julia Valls[2]

[1]Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Sevilla

[2]Departamento de Innovación y Formación Didáctica. Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación estudia el efecto de un módulo de enseñanza sobre la manera en la que estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria identifican la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. Los resultados indican que el desarrollo de esta competencia está vinculada a los elementos matemáticos de la noción de derivada que los estudiantes para profesor son capaces de considerar al identificar evidencias de la comprensión de la derivada en las respuestas de los estudiantes e interpretarlas.

Palabras clave: *aprendizaje del estudiante para profesor, analizando el trabajo de los estudiantes, desarrollo de la mirada profesional*

Abstract. *This study investigates the effects of a teaching intervention on prospective secondary mathematics teachers' noticing of high students' understanding of derivative concept. Results revealed that the development of noticing of student's understanding was linked to mathematics elements of derivative identified as relevant and considered by prospective teachers when interpreting the students' problem solving.*

Key words: *preservice teacher's learning, analyzing student work, development of noticing*

INTERPRETAR LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA DE LOS ESTUDIANTES

Observar con sentido el aprendizaje de las matemáticas es considerada una competencia relevante para el profesor (Jacobs, Lamb, & Philipp, 2010; Mason, 2002), entendida como la capacidad de *identificar* evidencias de la comprensión matemática e *interpretarlas* para *decidir* cómo responder. Recientemente, algunas investigaciones están aportando información para caracterizar esta competencia y su desarrollo (Bartell, Webel, Bowen, & Dyson, 2013; Fernández, Callejo, & Márquez, 2012; Fernández, Valls, & Llinares, 2011; Fortuny, & Rodríguez, 2012; Rivas, Godino, & Castro, 2012; Sánchez-Matamoros et al., 2012; Spitzer et al., 2011). Los resultados de estas investigaciones indican que cuando los estudiantes para profesor consideran relevantes los aspectos procedimentales, entonces interpretan la comprensión vinculada a los pasos procedimentales y a la corrección de la respuesta con ausencia de explicaciones conceptuales. En este contexto, el desarrollo de la habilidad de observar el pensamiento matemático de los estudiantes es considerado un objetivo en la formación de profesores y define un objetivo de investigación. El objetivo de la investigación presentada aquí es caracterizar cómo los futuros profesores aprenden a reconocer la evidencia de la comprensión del concepto de derivada. Es decir, cómo la capacidad de observar con sentido el pensamiento matemático de los estudiantes se desarrolla en un contexto diseñado ad hoc.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Llinares, S. y Valls, J. (2013). El desarrollo de la competencia de estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria en identificar la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 501-509). Bilbao: SEIEM

Por otra parte, distintas investigaciones han mostrado la dificultad que tienen los estudiantes de bachillerato en la construcción de los significados de la derivada (Tall, 1990; Asiala, Cottrill, Dubinsky, & Schwingendorf, 1997; Baker, Cooley, & Trigueros, 2000; Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008) mostrando el papel relevante que desempeñan los sistemas de representación para dotar de significado al concepto de derivada. Con estas referencias previas nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

- ✓ ¿En qué medida los estudiantes para profesor de matemáticas identifican e interpretan la comprensión de los estudiantes de Bachillerato después de participar en un entorno de aprendizaje diseñado ad hoc?

MÉTODO

Participantes y contexto

Los participantes son 8 estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas matriculados en una asignatura de Didáctica de la Matemática en Educación Secundaria dividida en dos bloques: un bloque sobre análisis de la enseñanza y otro bloque sobre análisis del aprendizaje matemático. Uno de los objetivos de esta asignatura es que los estudiantes para profesor empiecen a desarrollar una mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas.

Diseño del módulo de enseñanza

Para desarrollar la competencia docente de reconocer evidencias de la comprensión de la derivada, se diseñó un módulo con siete sesiones de 2 horas de duración (1 sesión por semana) (Figura 1).

En la primera y última sesión los estudiantes contestaron un cuestionario que tenían como objetivo obtener información sobre su capacidad de observar el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. Las otras cinco sesiones tenían como objetivo presentar información relativa a la demanda cognitiva de las tareas y sobre las características de la comprensión del concepto de derivada en estudiantes de bachillerato. En cada una de estas sesiones los estudiantes para profesor (EPMs) con el apoyo de información teórica resolvían en parejas tareas centradas en identificar los elementos matemáticos del concepto de derivada y la demanda cognitiva de diferentes problemas e identificar características de la comprensión de la derivada en estudiantes de Bachillerato. Al final de cada sesión había una discusión en gran grupo donde se debatía sobre la tarea realizada.

Los cuestionarios

Los cuestionarios estaban formados por tres tareas cada uno (Figura 2) siguiendo la misma estructura que investigaciones previas (Sánchez-Matamoros et al., 2012). El cuestionario inicial constaba de 3 tareas, cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 1º Bachillerato (16-17 años) a tres problemas de derivada en un punto. El cuestionario final constaba de 2 tareas, cada tarea consistía en las respuestas de un estudiante de 2º Bachillerato (17-18 años) a dos problemas de la función derivada. Cada respuesta a los problemas de derivada iba acompañada de extractos de entrevistas en las que los estudiantes explicaban cómo los habían resuelto. Las respuestas de los estudiantes que configuraban el cuestionario reflejaban diferentes aspectos de la comprensión sobre la derivada proporcionados por investigaciones previas. Los estudiantes para profesor tenían que responder a tres cuestiones en cada una de las tareas. Dos de estas cuestiones en el cuestionario inicial fueron:

1. *Describe cómo ha resuelto el estudiante X cada problema, indicando los elementos del concepto de derivada utilizados y si el procedimiento usado es adecuado y por qué.*
2. *A partir de las descripciones de cómo el estudiante ha realizado los tres problemas, ¿es posible identificar alguna característica de cómo el estudiante X comprende el concepto de derivada?*

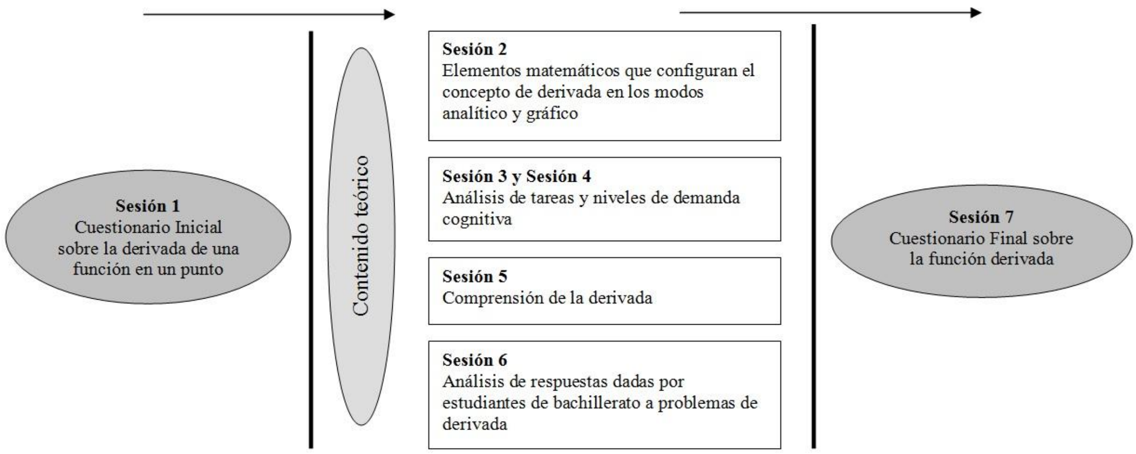


Figura 1. Esquema del diseño del módulo de derivada

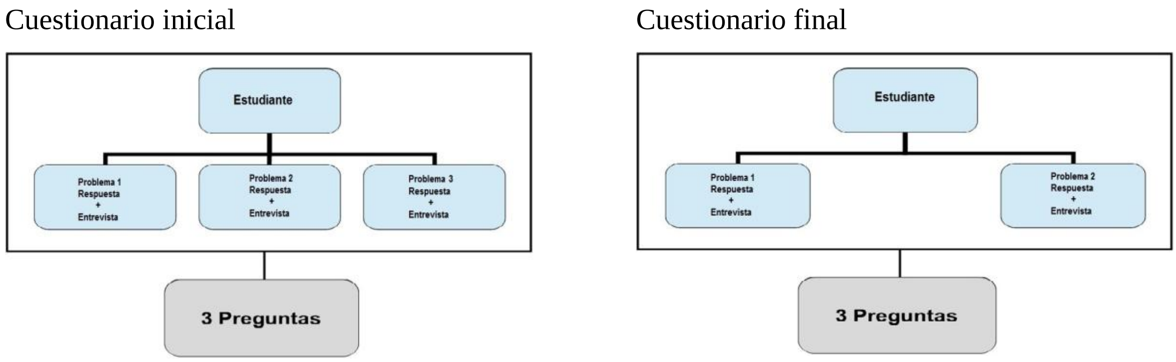


Figura 2. Estructura de las tareas en el cuestionario inicial y final

En el cuestionario final las cuestiones planteadas a los estudiantes para profesor eran las mismas excepto que hacían referencia a las respuestas a los dos problemas. Los problemas del cuestionario inicial mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada de una función en un punto en los modos de representación analítico y gráfico que se habían mostrado relevantes en la caracterización de la comprensión de la derivada (figura 3). De esta manera el cuestionario proporcionaba diferentes respuestas que mostraban diferentes niveles de comprensión de la derivada. Así, el estudiante 1 usa elementos de la derivada de una función en un punto solo en el modo analítico (Nivel Intra). El estudiante 3 usa elementos de la derivada de una función en un punto en el modo analítico y es capaz de usar la aproximación numérica de la derivada de una función en un punto a través de la expresión analítica como límite del cociente incremental pero tiene dificultades en usar algunos elementos en modo gráfico y/o establecer algunas relaciones necesarias en algún problema (Nivel Inter). Y finalmente, el estudiante 2 usa todos los elementos de la derivada de una función en un punto en todos los modos de representación, relacionándolos cuando es necesario en la resolución de los problemas (Nivel Trans).

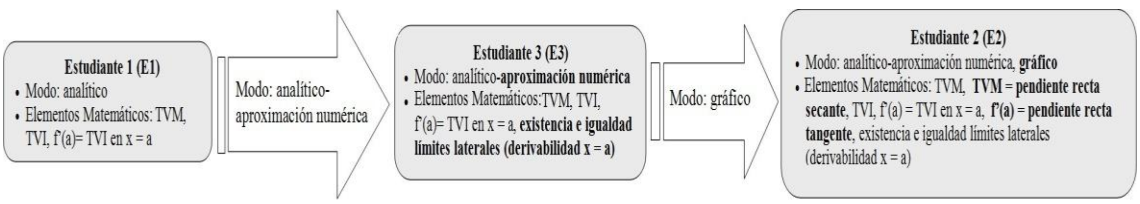


Figura 3. Caracterización de los niveles de la comprensión de los tres estudiantes de Bachillerato usados para diseñar el cuestionario inicial

Los dos problemas del cuestionario final también mostraban diferentes elementos matemáticos del concepto de función derivada en los modos de representación analítico y gráfico (figura 4) que permitían ejemplificar niveles de la comprensión de los estudiantes puestos de manifiesto por sus respuestas (Figura 5). En este cuestionario, el estudiante 1 usa elementos de la función derivada en modo analítico y no en modo gráfico (Nivel intra), el estudiante 2 usa elementos de la derivada en modo analítico y en modo gráfico sólo con carácter puntual (derivada de la función en un punto) (nivel inter) mientras que el estudiante 3 usa todos los elementos de la derivada en los diferentes modos de representación (nivel trans) (Figura 6).

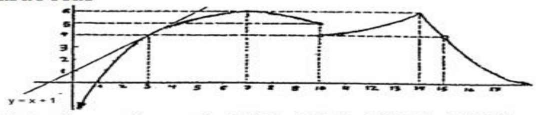
Problema 1	**Problema 2**
Sea $f(x)=\begin{cases}2x^3+2x+a & x<1\\ bx^2+1 & x\geq 1\end{cases}$ Calcula a y b para que f sea derivable en x = 1	Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas  a. Obtén los valores de f'(3), f'(7), f'(10), f'(14) y f'(15). Explicando cómo los obtienes b. Realiza un esbozo de la gráfica de f'. Explica como lo has obtenido
Elementos	**Elementos**
M 1.1 Si f es derivable, entonces f es continua M 1.2 existencia e igualdad de los límites laterales de f ' en x=1 sii f ' continua en x =1	M 2.1 f '(a) = pendiente de la recta tangente a la función en x =a M 2.2 si f derivable en x =a, entonces f continua en x =a (negación) M 2.3 Si x=a extremo o punto de inflexión de la función f, entonces f '(a)=0 M 2.4 si f creciente, entonces f ' >0, y si f decreciente, entonces f ' <0 M 2.5 existencia e igualdad de los límites laterales del cociente incremental (como proceso, aproximación a través de las tablas de valores) para que exista $f'(a)$. M 2.6 punto cúspide/ anguloso: si es f continua en (a, b), derivable en (a, b)-{c}, y f´ cambia de signo entorno a x=c entonces x=c es punto anguloso o cúspide. M2.7 operador derivada: Si f es una parábola, entonces f ' es una recta.

Figura 4. Elementos matemáticos en la resolución de los problemas del cuestionario final

Análisis de datos

Los dos cuestionarios fueron diseñados para valorar antes y después del módulo cómo los EPMs reconocían la comprensión de la derivada viendo las respuestas de los estudiantes. Nosotros analizamos de forma conjunta las respuestas de cada EPM a las dos primeras preguntas de los cuestionarios (Figura 7) teniendo en cuenta los niveles de comprensión de la derivada.

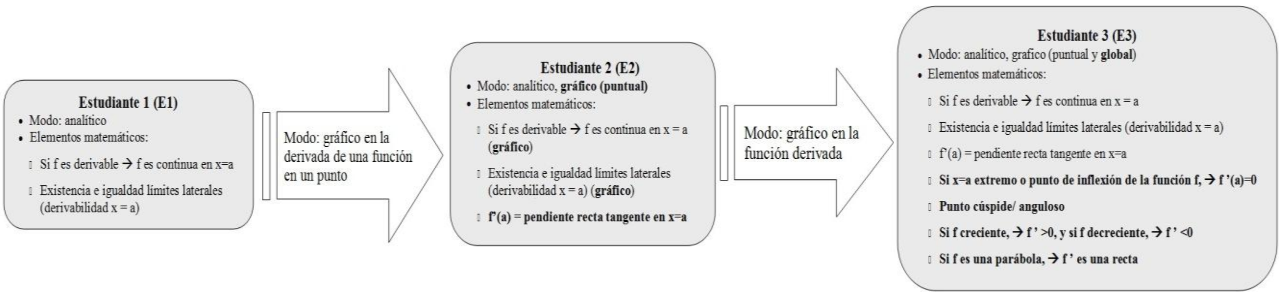
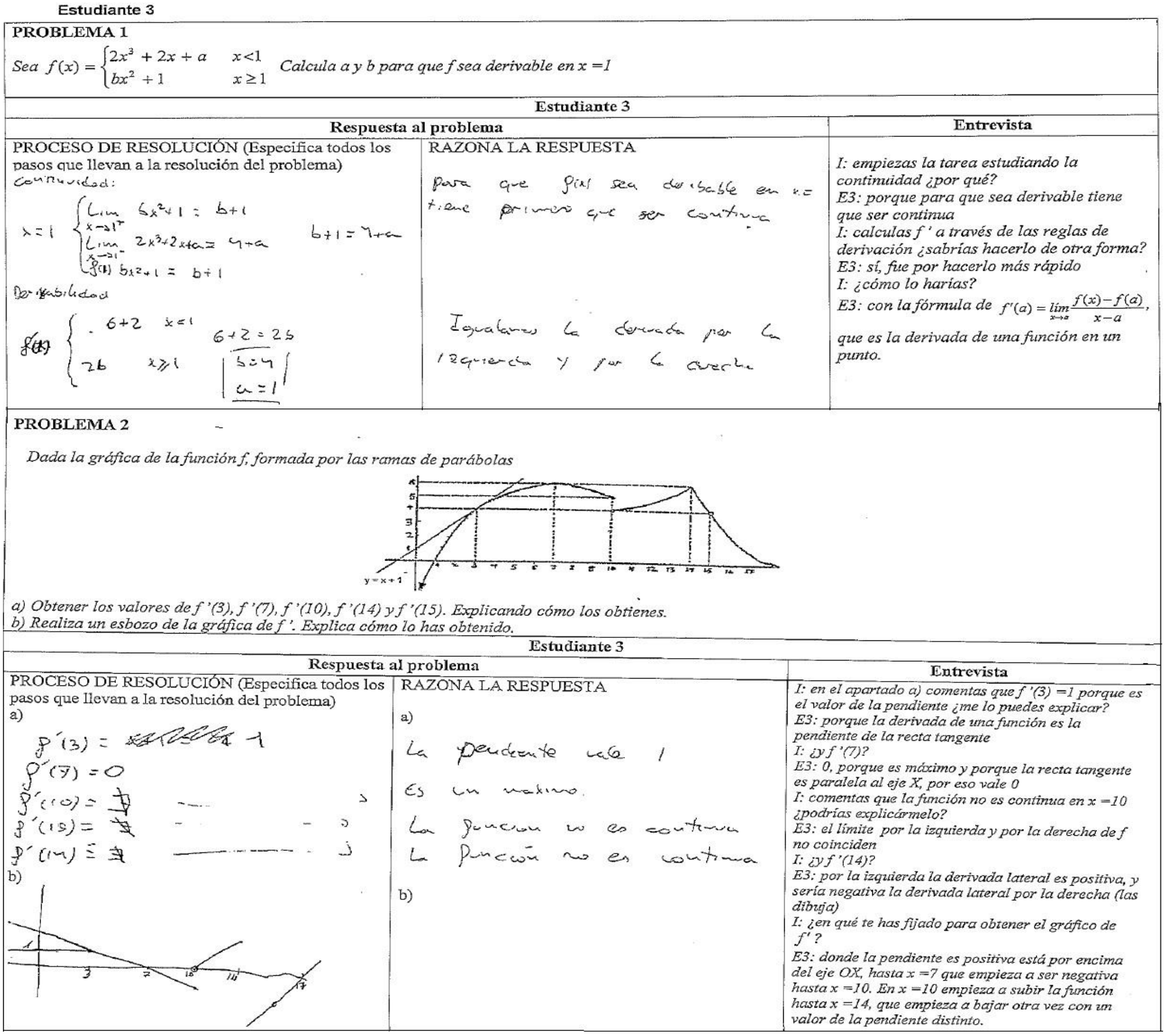


Figura 5. Caracterización de los niveles de la comprensión de los tres estudiantes de Bachillerato usado en el diseño del cuestionario final


Estudiante 3

PROBLEMA 1

Sea $f(x)=\begin{cases}2x^3+2x+a & x<1\\ bx^2+1 & x\geq 1\end{cases}$ Calcula a y b para que f sea derivable en x =1

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema)	RAZONA LA RESPUESTA	I: empiezas la tarea estudiando la continuidad ¿por qué? E3: porque para que sea derivable tiene que ser continua I: calculas f ' a través de las reglas de derivación ¿sabrías hacerlo de otra forma? E3: sí, fue por hacerlo más rápido I: ¿cómo lo harías? E3: con la fórmula de $f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, que es la derivada de una función en un punto.

PROBLEMA 2

Dada la gráfica de la función f, formada por las ramas de parábolas

a) Obtener los valores de f '(3), f '(7), f '(10), f '(14) y f '(15). Explicando cómo los obtienes.
b) Realiza un esbozo de la gráfica de f '. Explica cómo lo has obtenido.

Estudiante 3

Respuesta al problema		Entrevista
PROCESO DE RESOLUCIÓN (Especifica todos los pasos que llevan a la resolución del problema) a) b)	RAZONA LA RESPUESTA a) b)	I: en el apartado a) comentas que f '(3) =1 porque es el valor de la pendiente ¿me lo puedes explicar? E3: porque la derivada de una función es la pendiente de la recta tangente I: ¿y f '(7)? E3: 0, porque es máximo y porque la recta tangente es paralela al eje X, por eso vale 0 I: comentas que la función no es continua en x =10 ¿podrías explicármelo? E3: el límite por la izquierda y por la derecha de f no coinciden I: ¿y f '(14)? E3: por la izquierda la derivada lateral es positiva, y sería negativa la derivada lateral por la derecha (las dibuja) I: ¿en qué te has fijado para obtener el gráfico de f ' ? E3: donde la pendiente es positiva está por encima del eje OX, hasta x =7 que empieza a ser negativa hasta x =10. En x =10 empieza a subir la función hasta x =14, que empieza a bajar otra vez con un valor de la pendiente distinto.

Figura 6. Cuestionario final: Respuestas del Estudiantes 3 a los dos problemas

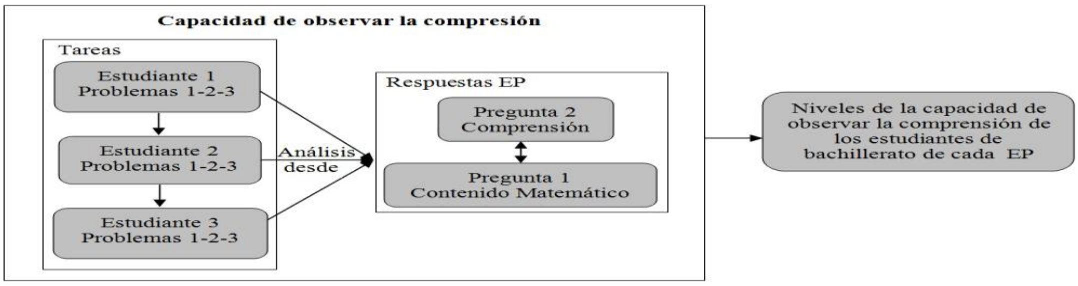


Figura 7. Esquema de análisis

Para realizar el análisis nos centramos en cómo el EPM describía la comprensión del estudiante de bachillerato del concepto de derivada y de qué manera usaba los elementos matemáticos y los modos de representación del concepto para identificar la demanda cognitiva del problema. Aplicando este procedimiento de manera sistemática a las respuestas dadas por los EPMs identificamos lo que consideraban como evidencia de la comprensión antes y después de participar en el módulo de enseñanza. En la fase 2 del análisis comparamos los resultados obtenidos desde los dos cuestionarios con el fin de generar descriptores del desarrollo. Estos nos permitieron caracterizar tres niveles de desarrollo.

- Nivel bajo: cuando los EPMs consideran la comprensión de los estudiantes como "todo o nada".

- Nivel medio: cuando los EPMs identifican algunas características de la comprensión de los estudiantes de bachillerato en relación a algunos elementos matemáticos.
- Nivel alto: cuando los EPMs identifican las diferentes características de la comprensión de los estudiantes.

RESULTADOS

La tabla 1 muestra los cambios en la competencia de los EPMs de identificar e interpretar lo que es relevante en relación al comportamiento de los estudiantes de Bachillerato cuando resolvían los problemas de derivada.

Tabla 1. Niveles de noticing

		Cuestionario Inicial	Cuestionario Final
Niveles de reconocimiento de la comprensión matemática	Bajo	AAC; SAP; JGM; RLS; JMI; ABPG; ARP; MV (8)	SAP; ABPG (2)
	Medio	(0)	JGM; RLS; ARP; MV (4)
	alto	(0)	AAC ; JMI (2)

El análisis de los cuestionarios inicial y final indica que en general la participación en el módulo mejoró la competencia de reconocer la comprensión, ya que 6 EPMs mejoraron en alguna medida. Esta mejora estuvo vinculada a la manera en la que los EPMs identificaban como relevante cómo los estudiantes de Bachillerato usaban las siguientes relaciones en la resolución de los problemas,

- La relación entre el límite del cociente incremental y el significado de la derivada como pendiente de la recta tangente
- La relación entre la derivabilidad de la función y su continuidad, y
- La manera en la que se usaba la información obtenida desde la función o la función derivada alrededor de los puntos de inflexión y el punto cúspide (entendido como la manera de interpretar el comportamiento de la función derivada para inferir información sobre el comportamiento de la función)

Antes del módulo

En el cuestionario inicial los 8 EPMs se referían a la comprensión de los estudiantes de Bachillerato como “o todo o nada”. 5 de los EPMs reconocieron el uso de la TVM, la TVI en x =a y la TVI = f`(a) indicando que los estudiantes conocían algunos elementos matemáticos relativos a la idea de derivada, sin embargo los EPMs no supieron relacionarlo con las evidencias de los otros estudiantes. En cierto sentido, estos EPMs reconocieron las características del nivel de comprensión intra de la derivada de una función en un punto identificando que las respuestas de alguno de los estudiantes indicaban que comprendían elementos matemáticos aislados pero sin relacionarlo con las evidencias de los otros estudiantes.

Los otros 3 EPMs relacionaron entre sí la manera en la que los estudiantes de Bachillerato estaban resolviendo los problemas y reconocieron los dos extremos de la comprensión. Es decir, identificaron que el estudiante 1 sólo era capaz de usar la representación analítica de los diferentes elementos matemáticos pero que tenía dificultades cuando la resolución del problema implicaba manejar la representación geométrica y el paso al límite del cociente incremental en la aproximación numérica, y que el estudiante 2 podía usar adecuadamente estas ideas para resolver los problemas. De esta manera, estos EPMs identificaron las características de la comprensión del nivel intra y trans pero no lo que podría ser considerado una transición entre estas dos formas de comprender, que sería el comportamiento del estudiante 3 (inter).

Por ejemplo, JGM sólo reconoce las características de la comprensión de la derivada de una función en un punto que se ponen de manifiesto en el modo analítico pero no infiere información del comportamiento del estudiante de la aproximación numérica y la necesidad de la igualdad de los límites laterales. En consecuencia, sólo identifica que el estudiante 1 (nivel intra) usa los elementos matemáticos TVM y TVI en modo analítico y se fija en los modos de representación cuando reconoce la dificultad que tiene este estudiante en el modo gráfico y las tablas: "*Ante las tres respuestas considero que el alumno no tiene una buena compresión de la derivada no relaciona los conceptos de TVM y TVI cuando se le pide las imágenes de una función como su derivada no ha sabido interpretar las gráficas ni tomar las funciones correctas. Tampoco sabe relacionar una tabla de valores con la existencia o no de derivada en un punto".*

Esta respuesta es un ejemplo de cómo los EPMs no interpretaban los comportamientos de los estudiantes de Bachillerato como rasgos de diferentes niveles de comprensión de la derivada haciendo mención genérica a los elementos matemáticos y sus relaciones.

Después del módulo

Después de participar en el módulo de enseñanza 6 EPMs fueron capaces de reconocer la existencia de diferentes niveles de comprensión de los estudiantes de bachillerato en alguna medida.

De esos 6 EPMs, 2 describieron e interpretaron las respuestas de los estudiantes de Bachillerato apoyándose en la manera en la que los estudiantes usaban los diferentes elementos matemáticos y los modos de representación para dar cuenta de los diferentes niveles de comprensión. De esta manera, estos dos EPMs reconocieron que las respuestas dadas por el estudiante 1 mostraban sus dificultades en usar los significados de la derivada en modo gráfico (nivel intra de comprensión de la idea de función derivada), que el estudiante 2 comprendía y usaba los elementos matemáticos en modo analítico y en modo gráfico con carácter puntual (derivada de una función en un punto) cuando era necesario pero tenía dificultades en usar los significados geométricos con carácter global (función derivada) (nivel inter de comprensión de la idea de derivada). Finalmente, estos dos EPMs fueron capaces de identificar al estudiante (estudiante 3) que no tenía dificultades en usar los diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada en los diferentes modos de representación (nivel trans de comprensión del concepto de derivada).

Por último, 4 EPMs después del modulo de formación solo identificaban algunas características de la comprensión del concepto de derivada y no siendo capaces de describir claramente las diferencias en el comportamiento de los estudiantes. Esta manera de proceder fue debido a que no reconocían la diferencia en la comprensión de los estudiantes que se ponía de manifiesto en su diferente resoluciones cuando resolvían el problema que implicaba analizar el comportamiento de la función alrededor del punto cúspide (cuestionario final, problema 2, comportamiento de la función en x=14. En este sentido, al no reconocer la información que se podía derivar de la manera en la que los estudiantes resolvían este problema les impidió interpretar de manera adecuada la respuesta dada por el estudiante 3 (nivel trans). El punto cúspide supone un máximo de la función sin cambio de curvatura lo que obliga a establecer relaciones entre aproximaciones globales y puntuales, es decir, pensar conjuntamente en el comportamiento de la función en intervalos y el comportamiento puntual de la función (Baker, Cooley y Trigueros, 2000).

Por ejemplo, JGM en el cuestionario final hace un mayor uso de los diferentes elementos matemáticos al describir las respuestas de los estudiantes reconociendo las diferentes demandas de cada uno de los problemas, sin embargo, no fue capaz de identificar la información relevante procedente de la existencia del punto cúspide que explícitamente considera un máximo " ... *dice* (el estudiante) *que no existe f'(14) porque la derivada por la izquierda y por la derecha son positiva y* *negativa respectivamente y no se da cuenta* (el estudiante) *de que si ocurre eso es porque en x = 14 hay un máximo. Debería haber utilizado ese elemento de la derivada que es global analítico".* De esta manera, el hecho de que JGM confunda el punto cúspide de abscisa x=14 con un máximo condiciona la interpretación que realiza de la comprensión del estudiante 3 (nivel trans) (figura 7). JGM considera que: *"En general este alumno tiene una comprensión bastante aceptable aunque en el ejercicio* (problema) *uno le falta asimilar algunos conceptos o elementos de la derivada al igual que en el ejercicio 2 que parece que lo comprende* (el estudiante) *pero no ve que en un máximo la derivada es cero si este máximo no viene dado por un trozo de función suave".*

CONCLUSIONES

Los resultados indican que el módulo diseñado tuvo un éxito relativo en mejorar la capacidad de los estudiantes para profesor para reconocer la comprensión de la derivada puesta de manifiesto a través de las respuestas a problemas por parte de estudiantes de Bachillerato. Después del módulo, los EPMs se apoyaban en la identificación de un mayor número de elementos matemáticos lo que les permitió a la mayoría de ellos superar planteamientos superficiales. Este resultado sugiere que el desarrollo de esta competencia docente está vinculado a centrar la mirada sobre aspectos que puedan mostrar información relevante de la manera de proceder de los estudiantes de Bachillerato. La capacidad de mira con más detalle las respuestas de los estudiantes y de reconocer lo que es relevante diferenciándolo de lo que es irrelevante para el aprendizaje se convierte en indicadores de esta competencia. Finalmente, el hecho de que no todos los estudiantes para profesor que participaron en este experimento de enseñanza fueran capaces de mejorar su competencia de reconocer la comprensión de los estudiantes muestra que su desarrollo es complejo y puede requerir más posibilidades de participar en este tipo de actividades.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España, y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante. España.

Referencias

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. (1997). The development of students` graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(4), 399-431.

Baker, B., Cooley, L. & Trigueros, M. (2000). A calculus graphing schema. J*ournal for Research in Mathematics Education, 31*(5), 557-578.

Bartell, T.G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(1), 57-79

Fernández, C., Callejo, M.L., & Márquez, M. (2012). Valoración de respuestas a problemas de división-medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp.219-238). Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM Mathematics Education*, *44*, 747-759.

Fernández, C., Valls, J., & Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J. M., & Rodriguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*, 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., & Philipp, R.A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*, 169-202.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Rivas, M.A., Godino, J.D., & Castro, W.F. (2012).Desarrollo del conocimiento sobre la enseñanza de la Proporcionalidad en futuros profesores de Primaria. *BOLEMA-Boletim de Educaçao Matemática, 26* (42B), 559-588.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *RELIME-Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11*(2), 267-296.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesores interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato. La derivada de la función en un punto. En A. Estepa, A. Contreras, J. Delofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordoñez (eds.) *Investigación en Educación Matemática XVI*, (pp.497-508). Jaén: SEIEM.

Spitzer, S.M., Phelps, Ch.M., Beyers, J.E., Johnson, D., & Sieminski, E. (2011). Developing prospective elementary teachers' abilities to identify evidence of student mathematical achievement. *Journal of Mathematics Teacher Education, 14*(1), 67-87.

Tall D. (1989). Concept image, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics, 9*(3), 37-42.

Van Es, E. (2010). A framework for learning to notice student thinking. En Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (Eds), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 134-151). New York: Routledge.

EL VOLUMEN. OBSERVACIÓN DE PROCESOS DE APRENDIZAJE DE CONTENIDOS DE LA ENSEÑANZA SECUNDARIA

Volume. Contents learning-process observation of secondary education

Sonia Sanchis [a] y Gregoria Guillén[b]

Universitat de València[a], Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universitat de València[b]

Resumen

Este estudio se refiere a la observación de procesos de aprendizaje de contenidos relativos al volumen de algunos sólidos, magnitud de gran importancia en la educación matemática desde Primaria a la Universidad. Diseñamos una secuencia de actividades que implican diferentes aspectos de la medición y diferentes procedimientos de resolución y la desarrollamos con estudiantes de segundo de la ESO. Analizamos las respuestas de los estudiantes a estas actividades y determinamos tipos de respuestas, errores y dificultades relativos a contenidos geométricos y de medición y en relación con la resolución de problemas, concluyendo algunas sugerencias para la instrucción.

Palabras clave*: volumen, capacidad, área de una superficie, resolución de problemas.*

Abstract

This study is concerned with the observation about learning process of related to the volume from some geometric fields, magnitude of great importance in mathematics education from elementary to College. We design a sequence of activities that involve different aspects of measurement and different procedures of resolution and develop it with second ESO students. We analyzed the responses of students to these activities and determine types of replies, errors and difficulties related to geometric content and measurement and in relation to the problems solving, concluding suggestions for instruction.

Keywords*: volume, capacity, a surface area, problems solving.*

Sanchís, S. y Guillén, G. (2013). El volumen. Observación de procesos de aprendizaje de contenidos de la enseñanza secundaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 511-522). Bilbao: SEIEM.

PRESENTACIÓN

Diferentes estudios realizados en Didáctica de las matemáticas han llamado la atención sobre cómo se realiza la enseñanza de la superficie y el volumen de los sólidos (Sáiz, 2002). La diversidad de sugerencias que se han dado para la enseñanza/aprendizaje de esta materia no se ven muy reflejadas en las clases de la Enseñanza Obligatoria (ESO) (Del Olmo, Moreno & Gil., 1989). Los profesores se sienten más seguros al enseñar el volumen, cuando lo hacen a través de tratamientos cuantitativos, siendo la fórmula el procedimiento más frecuente (Sáiz, 2002). En el caso del volumen, el considerarlo como medida es el aspecto predominante, quedando en segundo plano las actividades encaminadas a la adquisición del concepto de volumen. De las diferentes posibilidades que tenemos para medir el volumen, la que nunca falta en los libros de texto de secundaria es el uso de las fórmulas, justificación de las cuales se obvia (González, López & Flores, 2001). Asimismo, estudios previos realizados con profesores de la ESO de la Comunidad Valenciana (Pérez y Guillén, 2008) o tomando como objeto de análisis libros de texto para la ESO de diferentes editoriales (García y Guillén, 2010) han llevado a concluir que las tareas que más se proponen en las clases para trabajar los sólidos son de medición y se refieren a la utilización de la unidad de medida y fórmulas para calcular áreas y volúmenes. Se presta poca atención a la enseñanza de relaciones entre diferentes sólidos y/o sus representaciones a pesar de que éstas pueden surgir de nuevo en la enseñanza/aprendizaje de la superficie y el volumen de éstos.

El trabajo realizado pretende obtener información sobre los objetos mentales[xli] que los estudiantes de la ESO construyen de conceptos relacionados con el volumen de los sólidos al desarrollar la instrucción diseñada teniendo en cuenta resultados de la investigación en didáctica de las matemáticas. Centramos la atención en las ideas que se tienen de los conceptos implicados y en el establecimiento de relaciones, que entraña la comparación entre: i) el volumen y capacidad y sus unidades de medida, ii) volúmenes de prismas rectos y oblicuos, ii) la superficie[xlii] y el volumen, iii) el volumen y capacidad, iv) volúmenes de diferentes sólidos. Además, contemplamos el recubrimiento con unidades, transformaciones que mantienen el volumen de los sólidos implicados y el uso de métodos de composición y descomposición. Se pretende también obtener información sobre el uso que se hace de los contenidos tratados en la instrucción en la resolución de problemas de aplicación.

La información obtenida la hemos organizado distinguiendo tipos de respuestas para las actividades y dificultades y errores[xliii], referidos a contenidos geométricos, aspectos de la medición y a la resolución de problemas, y desde ella concluimos algunas sugerencias para la instrucción.

MARCO TEÓRICO. REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Este trabajo forma parte del estudio del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas, (Sanchis, 2012). Desarrollado en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Universitat de València, se sitúa en la línea de investigación que se centra en la enseñanza/aprendizaje de los procesos matemáticos a partir de la geometría de los sólidos y contempla otras dos líneas de investigación que se refieren a la medición y a la resolución de problemas.

El marco de referencia de la geometría de los sólidos ya lo hemos descrito en trabajos previos (Guillén, 2010). Subrayamos la importancia que se da a los contextos con un doble papel; en primer lugar se utilizan para producir significados de los contenidos tratados y en segundo lugar se utilizan como campo de aplicaciones (Treffers, 1987).

Relativo a la medición, cabe destacar las investigaciones que han realizado un análisis del concepto de volumen (Sáiz, 2002), un análisis fenomenológico de su enseñanza (Freudenthal, 1983), han determinado dificultades y errores y han dado sugerencias para la instrucción (Del Olmo et al. , 1993) o se contemplan en el análisis de los datos (San Miguel & Salinas, 2011).

La resolución de problemas de medición la examinamos como describimos en Guillén y Siñériz (2012), usando las fases cuyo perfil se contempla en Polya (1965) y distinguiendo además aspectos cognitivos reformulados desde Schoenfeld (1985). También hemos considerado la distinción que hace Puig (1996) entre tres aspectos en el proceso de resolución de problemas. Siguiendo a este autor, usamos *resultado* para indicar lo que se contesta a la pregunta del problema, *solución* para indicar la presentación final del conjunto de pasos que conducen de los datos a la incógnita y *resolución* para indicar el conjunto de las acciones del resolutor durante el proceso, que pueden conducir a obtener la solución o no (p. 34). Y hemos considerado la adaptación que se hace en Murillo y otros (2011) para la resolución de problemas geométricos. Los problemas que hemos considerado en el estudio contienen cantidades intensivas y extensivas. Las cantidades extensivas son aditivas, en el sentido de que los números pueden sumarse, manteniendo inalterada la unidad que los acompaña. Las cantidades intensivas son razones, tienen unidades compuestas, formadas por el cociente de dos cantidades extensivas (Puig y Cerdán, 1988, pp. 125-129). Los problemas corresponden a los que Butts (1980) denomina *Problemas de aplicación* y *Problemas de investigación abierta*. En los primeros, la resolución implica formular los problemas simbólicamente y después manipular esos símbolos de acuerdo a varios algoritmos. Los segundos son problemas que no contienen la estrategia de resolución en el enunciado.

METODOLOGÍA. CONTEXTO PARA LA EXPERIMENTACIÓN

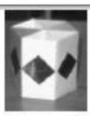
La experimentación se desarrolló en el IES Pou Clar de Ontinyent (València) con un grupo de 17 alumnos de 2º de ESO en 15 sesiones de 55 minutos cada una, centrando el estudio en el volumen de los sólidos que se trabajan en la ESO (prismas, pirámides y sólidos de revolución). Para el trabajo que presentamos en este informe se contempla el volumen de los prismas, pirámides, troncos de pirámide y cilindros.

Actividades	Actividad matemática y contexto en el que se desarrolla.
1ª Sesión: Video de los Simpson	Identificando sólidos y sus elementos
2ª Sesión: Sobre las unidades de medida.	Resolución de problemas y unidades de medida no estándar. Resolución del problemas: Cambios de unidades de capacidad y de unidades de volumen. Cambios de unidades de volumen a otras de capacidad y viceversa.
3ª Sesión: El volumen y la superficie de los paralelepípedos.	Un problema de empaquetar: Elaboración de la fórmula del volumen del ortoedro por cubrimiento con cubitos. Elaboración de la fórmula del volumen de los paralelepípedos (no ortoedros) mediante la descomposición y composición. Los desarrollos de los ortoedros y su superficie en un contexto de construcción. La superficie de los paralelepípedos en un contexto de resolución de problemas.
4ª Sesión: El volumen y la superficie de los prismas.	Generalización de la fórmula del volumen de un prisma triangular recto a partir del volumen de los paralelepípedos y al relacionar los prismas y los polígonos de sus bases. Justificación de la fórmula de un prisma regular mediante la descomposición y la composición. La superficie de los prismas rectos en un contexto de construcción y de resolución de problemas.
5ª Sesión: El volumen, la capacidad y la superficie del cilindro.	Resolución de problemas: Cálculo del área, volumen y capacidad de diferentes envases, donde algunos precisan de la descomposición y composición.
6ª Sesión: Volumen de la piràmide.	Contexto de puzzles: Justificación de la fórmula del volumen de la pirámide cuadrangular a partir de la descomposición del cubo en 3 y seis pirámides. Generalización del volumen de la pirámide mediante objetos manipulativos.

Cuadro 1: Organización de las sesiones de la instrucción y descripción de las actividades que se trataron en ellas.

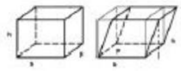
La secuencia de actividades, diseñada teniendo en cuenta resultados obtenidos en la investigación, constaba de dos tipos de tareas; unas para realizar la instrucción en la primera parte de la experimentación y otras para la toma de datos, en la segunda parte de la misma. En la primera parte se trabajó en un contexto de clase, interactuando el profesor y el alumno vía pregunta- respuesta; se pretendía producir significados de los contenidos implicados en las actividades tratadas; se trabajó desde contextos, usando material manipulativo, realizando las acciones implicadas en los procedimientos geométricos que se abordaban y se usó la resolución de problemas y la elaboración de fórmulas como contenido objeto de enseñanza y también como contexto para seguir ampliando las ideas que se tenían sobre los contenidos implicados así como para producir significados de otros conceptos que se compararon con los de volumen de los sólidos, entre ellos los asociados a la superficie de éstos y a la capacidad. En el Cuadro 1 describimos brevemente la organización de las 6 sesiones de esta primera parte relacionadas con los datos que presentamos aquí.

En la segunda parte de la experimentación los estudiantes trabajaron en grupos. Se resolvieron un total de 18 actividades. El Cuadro 2 muestra las 10 actividades desde cuyas respuestas hemos extraído los datos que presentamos en este informe. El diseño de las mismas se explica desde lo que se pretende en el estudio señalado en la presentación.

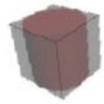


A1.- a) El volumen del cubo pequeño es 6cm^3 ¿cuál crees que es el volumen del paralelepípedo? b) El volumen del prisma triangular es 7m^3. ¿Cuál es volumen del prisma hexagonal?

A 2.- a) Sabemos que el volumen del paralelepípedo recto, ¿cuál crees que es el volumen del paralelepípedo oblicuo? ¿Por qué? b) ¿Crees que pasa lo mismo con el área?



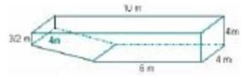
A3.- Sabiendo que el volumen de cualquier prisma pentagonal recto, ¿cuál crees que es el volumen de un prisma pentagonal oblicuo con misma base y altura? ¿Por qué?



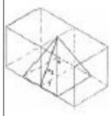
A4.- Calcula el volumen comprendido entre un cubo de 6cm de arista y el cilindro inscrito en él.

A5.- El cilindro de un automóvil es dónde se realizan las explosiones de combustible, para dar fuerza al vehículo para que se mueva. Una cilindrada es el volumen útil del cilindro, que normalmente está expresada en cc (centímetros cúbicos). Recuerda que en las carreras de MGP, siempre se expresa por carrera de motos de 125cc, 250cc, 500cc. Es a decir nos dicen constantemente el volumen del cilindro. Una moto de 125cc, tiene un cilindro de 56mm de diámetro, ¿cuánto vale su altura? ¿Cuántos litros de combustible caben al interior del cilindro?

A6.- Una piscina tiene la forma que se muestra a la figura. a) ¿Cuántos litros se necesitan para llenarla por completo? c) Llega el verano y se quiere llenar. ¿Cuánto tiempo tardará en llenarla una manguera que aboca a la piscina 100 litros por minuto?



A7.- Las pirámides de Egipto fueron construidas como sepulcros de los faraones hace miles de años. Son regulares (pirámides rectas de bases polígonos regulares) y cuadrangulares. La mayor de ellas es la pirámide de Keops, tiene 160m de altura y el lado de la base es 240m. a) ¿Qué superficie ocupa la pirámide? b) Calcula su área y su volumen.



A8.- El volumen del prisma cuadrangular constituido por los dos cubos es 128 cm^3. ¿Cuánto mide el volumen de la pirámide? Justifica tu respuesta.

A9.- Tienes dos pirámides con la misma base cuadrangular, pero una pirámide tiene el doble de altura que la otra. ¿Qué relación hay entre los volúmenes? ¿Por qué?

A10.- El recipiente siguiente tiene 12cm de altura, sus bases son hexágonos regulares de lados 3cm y 6cm, y apotemas 2´6 cm y 5´2 cm respectivamente. ¿Tiene más de un litro de capacidad?

Cuadro 2: Actividades para la toma de datos.

Esquema y organización del análisis

Las preguntas que han guiado el análisis se han centrado en: i) Contenidos relativos a los sólidos; ii) ideas y procedimientos geométricos para determinar el volumen, la capacidad y el área; iii) la unidad de medida); iv) la propiedad aditiva y de conservación del área y del volumen; v) relaciones que implican diferentes objetos geométricos o diferentes magnitudes; vi) diferentes representaciones de los sólidos; vii) el uso del lenguaje geométrico; viii) el uso del lenguaje algebraico.

Para cada problemática nos cuestionamos sobre las ideas que se muestran, los procedimientos que se usan y las dificultades y errores que se presentan. Por ejemplo, algunas cuestiones en relación con ii) son: ¿Qué ideas muestran los alumnos sobre el concepto de volumen? ¿Qué procedimientos utilizan en actividades que implican recubrimientos? ¿Recubren con unidades? ¿Dibujan el recubrimiento o parte de él? ¿Qué errores y dificultades muestran? Para iii) se examina si se usan de manera correcta, si se acompañan o no al número que se indica como una medida, y para iv) nos preguntamos: ¿Cómo se percibe la transformación de un prisma recto en oblicuo (manteniendo la altura y la base de los mismos) en relación con el volumen y superficie de los prismas correspondientes? ¿Y cuándo se realiza en ellos la transformación de cortar y pegar? ¿Se pueden realizar estas transformaciones? ¿Se pueden dibujar estas transformaciones y las formas geométricas obtenidas? ¿Qué dificultades y/o errores se observan?

Relacionado con la resolución de problemas, siguiendo a Murillo y otros (2011) tenemos en cuenta si el alumno: R1) Convierte el enunciado real en un enunciado matemático. R2) Traduce el enunciado matemático en una forma geométrica. R3) Identifica, selecciona y aplica los conceptos relacionados construidos anteriormente. R4) Aplica y adopta estrategias necesarias para resolver el problema. R5) Se observa que el alumno reflexiona y controla el proceso de resolución. R6) Comunica acerca del modelo y sus resultados dando una solución justificada del problema.

Para las respuestas de cada actividad se hizo un análisis detallado como el que se muestra en el Anexo 1 para la actividad 7. Puede notarse que se hicieron observaciones relativas a tipos de respuesta, dificultades y errores y a aspectos sobre el proceso de resolución de problemas.

Actividades		**Llegan al resultado correcto**	**No llegan al resultado correcto**	**Blanco**
A1	a)	5	3	1
	b)	8	0	1
A4		3	2	1
A5	altura	3	2	1
	capacidad	3	1	2
A6	a)	2	2	2
	b)	2	2	2
A7	a)	2	3	1
	b)	4	1	1
	c)	3	2	1
A8		5	0	1
A9		5	0	1
A10		2	3	1

Cuadro 3: Número de grupos que han llegado o no al resultado al resolver las actividades.

Al conjugar los datos obtenidos a partir de las actividades del cuadro 2, se registraron en tablas las observaciones de cada tipo (véase los cuadros 3 y 4) y se organizaron como indicamos en el apartado siguiente.

Puede notarse que en el Cuadro 3 no se han incluido las actividades A2 y A3, por las características de la respuesta esperada. El Cuadro 4 no contempla las actividades A1 a A3 ya que no se incluyeron en la secuencia con el propósito de determinar los aspectos de resolución de problemas, nombrados como Ri, que hemos indicado en este apartado como que se iban a tener en cuenta en el análisis.

Actividades	R1	R2	R3	R4	R5	R6
A4	0	3	5	5	4	2
A5	0	3	5	5	3	2
A6	4	3	3	3	3	1
A7	3	2	4	3	2	3
A8	2	5	5	5	5	5
A9	2	5	5	5	5	5
A10	0	2	5	5	5	2

Cuadro 4: Número de grupos (sobre 6) que cumplen los aspectos R1 a R6 relativos a la resolución de problemas.

TIPOS DE RESPUESTA Y DIFICULTADES Y ERRORES

Tipos de respuesta

Los que se han determinado para cada actividad están en relación con los aspectos de la medición o de resolución de problemas que se pretendía reforzar con ellas. Dada la brevedad del informe sólo indicamos la distinción de tipos de respuesta para tres de las actividades desarrolladas. Para cada tipo, entre paréntesis indicamos el número de grupos que la han reflejado en relación con el nº total de grupos que ha llegado a la solución. El nº total de grupos que participó en la resolución de A1 fue 9 mientras que en las restantes sólo se formaron 6 grupos.

Para la A1, siguiendo a San Miguel y Salinas (2011), las distinguimos según el reflejo de la concepción del volumen como: Magnitud trilineal (producto de dimensiones lineales) (2/6); magnitud bilineal con el uso de un proceso multiplicativo (se calcula el área de una base y se multiplica por la altura) (2/6); magnitud bilineal con el uso de un proceso aritmético (se halla el nº de cubitos de una capa y se suman los cubitos que hay en todas las capas) (0/6) y magnitud lineal (se cuentan los cubitos que hay en total) (2/6). Además, hemos contemplado también, por un lado, si reflejan (o no) que se percibe (o no) la conservación del volumen, la tridimensionalidad, la relación entre volúmenes del cubo y el ortoedro y/o de diferentes prismas, y, por otro, el uso que se hace de los diferentes procedimientos geométricos que se han utilizado al recubrir con unidades cúbicas para el cálculo de volúmenes y que llevan a ideas diferentes del mismo.

La A6 está dirigida a reforzar la relación entre volumen y capacidad, la conservación del volumen (al usar métodos de composición y descomposición) y diferentes procedimientos para el cálculo del volumen. Se distinguen 2 tipos de respuestas: los que reflejan de manera explícita que se determina el volumen del sólido por procedimientos geométricos (3/4), o se determina éste mediante cálculos (1/4). Entre los primeros distinguimos los que lo han realizado por descomposición y composición (1/4) o por composición y descomposición (el cuerpo geométrico se completa para formar un prisma, se calcula el volumen del prisma completo y se le resta el volumen de la parte añadida) (2/4).

En el Anexo 1 incluimos los tipos de respuesta delimitados para la A7 y el nº de grupos en los que se ha reflejado.

Dificultades y errores

El listado de los errores que determinamos para cada actividad, al considerarlos en su conjunto los organizamos según el aspecto geométrico, de medición o de resolución de problemas al que corresponden.

1) Al calcular la superficie de la pirámide, cuando ésta no se representa en el plano, no se identifica la apotema del cuadrado ni la altura de la cara lateral (G3-A7). Asimismo, con la representación en el plano en los cálculos se considera el cuadrado de la base en vez del triángulo de la cara lateral y se toma la altura de la pirámide en vez de la altura de la cara lateral (G4 y G5-A7).
2) Se interpreta y usa inadecuadamente el significado de "la superficie que ocupa". Se considera la superficie que ocupa como la superficie del sólido correspondiente (G1, G2, G5-A7).
3) No se han usado las unidades cúbicas del volumen (G1- A1). No se simbolizan correctamente las unidades de longitud, superficie y/o volumen (G5 y G6-A2, A3). Se iguala una fórmula y las unidades, sin indicar el número que indica la medida (G3-A3).
4) No se considera la altura o la profundidad para hallar el volumen del prisma. Se hallan los cubitos que rellenan la primera capa y ya no se sigue rellenando ni considerando la altura como que refleja el número de capas. (G1, G5 y G6- A1).
5) Se considera que los prismas que tienen igual volumen tienen también igual superficie (G1-A3). Al calcular el área de la superficie de un sólido se entrelazan las fórmulas del área y el volumen (G5-A10).
6) Se calcula la capacidad con la fórmula del volumen sin tener en cuenta el cambio de unidades (G2-A6).
7) El dibujo de un paralelepípedo se identifica como el de un cubo (G5 y G6-A2). Se traduce el enunciado matemático en una forma geométrica incorrecta. Se dibuja el desarrollo plano del paralelepípedo oblicuo como el desarrollo de un paralelepípedo recto (G7-A2). No se utilizan las representaciones planas y se tienen dificultades para determinar algunas dimensiones (G3-A7). Se tienen dificultades para realizar y usar representaciones de los sólidos y para transformar el problema en un problema matemático (G1,G2,G3,G4,G5-A4, A5 y A.10; G1,G2 y G5-A7, G2,G3 y G5-A8).
8) No se reflexiona sobre el significado de los datos (G2-A6; G1, G2 y G5-A7). Se halla el volumen del paralelepípedo como producto de los tres datos del problema. Se identifican las dimensiones que se muestran visualmente (con la base descompuesta en cuadritos) y para la altura se toma el volumen del cubo (G1-A1).
9) Se selecciona la fórmula del volumen del cubo para la justificación de volumen de un paralelepípedo (G5 y G6-A2).
10) Se aplican y adoptan cálculos no necesarias para resolver el problema (G3-A7). Se omite el cálculo de elementos necesarios para la resolución del problema (G1, G2, G3, G4 y G5-A10).
11) Se interpreta y usa la fórmula del volumen de un sólido de manera incorrecta para la obtención del resultado. (G2-A6). Se sustituyen los datos del problema de manera inadecuada en el proceso de resolución (G4-E10).
12) Se usa la fórmula pero no se es capaz de expresar verbalmente lo que relaciona (G7-A3).
13) Se usa la terminología del plano para las figuras geométricas del espacio (G1-A1, G2-A4).
14) No se identifica correctamente la operación aritmética. Al escribir la fórmula en vez de un producto se usa una adición (G5 y G6-A3). No se manipula correctamente con las operaciones aritméticas (G3- A1, G2-A4, G2-A5, G1-A10). No se hacen correctamente los cálculos aritméticos. (G3-A6).
15) Al restar dos monomios, se le baja un grado al monomio resultante (G2-A4). No se despeja una variable en una ecuación (G1-A5).

Cuadro 5: Ejemplos de errores y/o dificultades.

Hemos distinguido los referidos a: 1) la identificación de sólidos y sus elementos; 2) ideas de conceptos; 3) el uso de la unidad de medida; 4) el cambio de dimensión en el objeto geométrico; 5) relaciones entre superficie y volumen y entre volúmenes de diferentes prismas; 6) relaciones entre volumen y capacidad; 7) el paso del enunciado del problema en un enunciado matemático- las representaciones planas de los sólidos; 8) la reflexión sobre las propiedades de los datos; 9) la selección de las fórmulas en la resolución de problemas; 10) los procedimientos para resolver los problemas; 11) el control del alumno del proceso de resolución; 12) la manera de comunicar el proceso de resolución y sus resultados; 13) el uso del lenguaje geométrico; 14) las expresiones aritméticas; 15) las expresiones algebraicas.

El Cuadro 5 muestra algunos ejemplos clarificadores de cada tipo, con la misma numeración que el tipo de error al que corresponden, y entre paréntesis indicamos el grupo/s que ha reflejado el error o dificultad (Gi) y la actividad en cuya respuesta se ha mostrado (Ai).

CONCLUSIONES. SUGERENCIAS PARA LA INSTRUCCIÓN

Como conclusiones del estudio cabe destacar las siguientes que corroboran resultados obtenidos en otros trabajos.

1) Con los objetos mentales que los estudiantes constituyen para el volumen de los sólidos se tiene dificultad para diferenciar o relacionar el volumen con otras magnitudes. Las actividades que implican relaciones entre el volumen con el área (A7) o la capacidad (A6 y A10) son las que han presentado más dificultades (véase el cuadro 3). En la enseñanza previa, en repetidas ocasiones se hizo sentir la necesidad de prestar más atención al estudio de los sólidos y sus elementos, a su descripción y clasificación. Los datos obtenidos reflejan que esta atención no fue suficiente. Asimismo, sugerimos trabajar con objetos que sean medibles respecto del volumen y otros que sean medibles respecto de la capacidad (Sáiz, 2007), siendo el experimento de inmersión el más recomendado (González et al. 2001). En Del Olmo et al. (1989, pp. 99-101) se muestran una gran variedad de situaciones para ello.

2) Se han reflejado dificultades para recubrir mentalmente cajas con unidades cúbicas que no correspondan al cubo unidad. El cuadro 3 muestra que hay grupos que no han llegado al resultado de la actividad A1a). Realizar tareas de recubrimiento con unidades no estándar puede favorecer que la medición no se realice sólo mediante algoritmos y que se precise la manera de expresar la medida de áreas y volúmenes de sólidos con las unidades adecuadas.

3) Se ha mostrado habilidad para relacionar volúmenes de diferentes cuerpos geométricos (Véase las filas A4, A8 y A9 del Cuadro 3). No obstante, al igual que en Dickson et al. (1984), hemos comprobado una tendencia a usar fórmulas memorísticamente y que ello haya conllevado una dificultad en la resolución de problemas (véase las filas de A6, A7a y A10 del Cuadro 3). La justificación de las fórmulas a partir de métodos de descomposición, puzzles u otros procedimientos utilizados en la enseñanza previa no fue suficiente para que los diferentes grupos superaran las dificultades que se tenían para establecer relaciones entre sólidos al determinar el volumen de éstos (véase A2, A6 y A10). Consideramos que en la enseñanza previa no se dedicó suficiente tiempo a este tipo de actividades ya que aún con estudiantes de la ESO no se pueden obviar.

4) Se ha reflejado una creencia muy generalizada de que la función de la resolución de un problema sea obtener el resultado. Como se apunta en Puig (1996), se refleja la no traducción del enunciado real al enunciado matemático, la no identificación explícita de los datos del problema, y el uso de operaciones y algoritmos sin tener un orden y sin especificar la dirección. El cuadro 4 refleja una cierta mejora en los grupos en relación con R3 a R6 a medida que se han ido resolviendo los problemas. Ahora bien, en lo que concierne a R1 (la traducción del problema real al matemático) esta mejoría no se ve tan clara. Insistimos en la conveniencia de trabajar estos elementos de la resolución de problemas, necesarios para mejorar los procesos de resolución y evitar la aplicación de algoritmos sin comprensión.

5) Se ha observado dificultad para usar el lenguaje geométrico y el lenguaje algebraico. Posiblemente se encuentre la explicación en la poca enseñanza previa en la geometría de los sólidos y en la introducción temprana del lenguaje algebraico.

6) Finalizamos el trabajo haciendo referencia a la secuencia que propone Freudenthal (1983, pp. 392-396) para la constitución del objeto mental volumen. Aún con estudiantes de la ESO queremos subrayar la necesidad de, desde situaciones cotidianas, realizar un estudio integral de la cualidad y de su medida que permita aislarla, comparar objetos respecto de ella, plantear la necesidad de la unidad de medida, conocer y utilizar diferentes unidades, estimar la medida del volumen de un objeto y además aplicar todos estos conocimientos a nuevas situaciones de la vida cuotidiana.

Referencias

Butts, T. (1980). Posing problems properly. En S. Krulik & R. E. Reys (Eds.), *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 23 – 33). Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics.

Del Olmo, M.A., Moreno, M.F., & Gil. F (1993). *Superficie y volumen, ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Holanda: Reidel Pub.

González- López, M., & Flores, P. (2001). Conocimiento profesional del profesor de secundaria sobre las matemáticas: El caso del volumen. *Educación Matemática*, *13*(1), 35-54.

Gil, F., y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(1), 27-47.

Guillén, G. (2010). ¿Por qué usar los sólidos como contexto en la enseñanza/aprendizaje de la geometría? ¿Y en la investigación? En M. Moreno; A. Estrada; J.Carrillo, J. & T.Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 21- 68). Lleida: SEIEM.

Guillén, G., & Siñeriz, L. (2012). El caso de la circunferencia tangente a otras dos. Análisis de la actuación de una profesora de Magisterio. En A. Estepa; A. Contreras; J. Deulofeu; M. Penalva, M; F. García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 331-340). Jaén: SEIEM.

Polya, G. (1957). *How to solve it*. (2). Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana: Cómo plantear y resolver problemas. México: Trillas, 1965].

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares. Col. Mathema.

Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis.

Sáiz, M. (2007). *El volumen, ¿por dónde empezar?* Recuperado de http://www.matedu.cinvestav.mx .

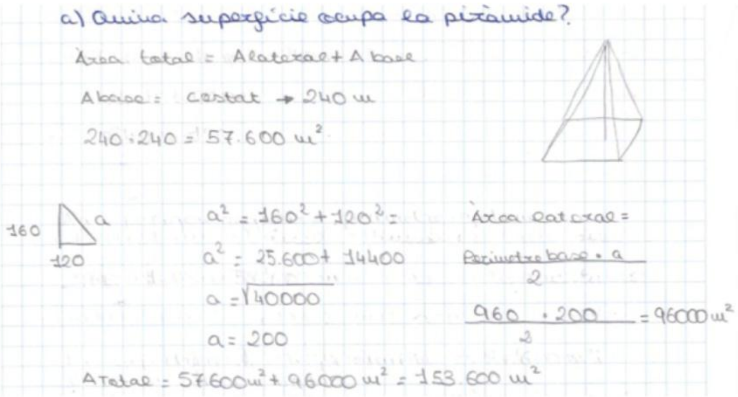
San Miguel, M., & Salinas, M.J. (2011). Dificultades del razonamiento del alumnado de 2o, ESO relacionadas con el concepto de volumen y su medida. En M. Marín.; G. Fernández; L. Blanco & M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV (pp. 543-555). Ciudad Real: SEIEM.

Sanchis, S. (2012*). L' ensenyança / aprenentatge de l'àrea y el volum*. Memoria del Proyecto fin de Máster de Profesor/a de Secundaria, especialidad de matemáticas. Universitat de València. Valencia.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.

ANEXO 1: COMENTARIOS REFERIDOS A LA ACTIVIDAD A7

Grupos 1, 2 y 5: La superficie que ocupa se calcula como la de la pirámide. Ejemplo:



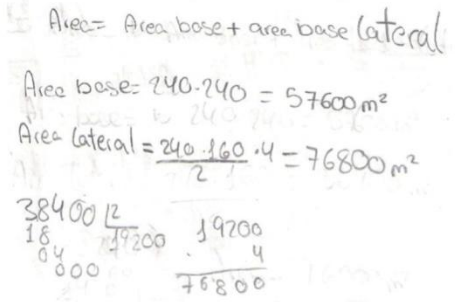
Respuesta a A7. Grupo 1

También se tienen dificultades para identificar los elementos que corresponden a los datos y/o que intervienen en las fórmulas que usan. En el ejemplo se observa que el Grupo 1, al calcular el área de cada cara lateral de la pirámide (CL) usan la fórmula del área de un polígono regular, aunque no lo es. Calculan el perímetro de la base en lugar del de la CL y toman como apotema el valor hallado que no corresponde a ella.

Grupo 3: Al calcular el área de la pirámide no se representa gráficamente la figura; no se ha calculado la apotema del cuadrado ni la altura de la cara lateral.

Grupo 4: En el cálculo del área se toma la altura de la pirámide en lugar de la apotema de la CL.

Grupos 5: Se usa la altura de la pirámide como la altura de la cara lateral.



Respuesta a A7. Grupo 5

Tipos de respuestas:

Para a) se distinguen respuestas en las que la hora de escribir las fórmulas parten de la fórmula del área del cuadrado (1 grupo de los 2 grupos que han resuelto el problema: 1/2) o de la del paralelogramo y/o rectángulo. En este caso, se indica “Base cuadrangular. Los lados son iguales. A= Base x altura” y luego sustituyen los datos (1/2).

Para b) distinguimos los que usan el desarrollo en el plano y calculan el área a partir de la suma de las áreas de la base y de las caras laterales (2/ 3), y los que al faltar la altura de la cara lateral consiguen el resultado mediante otras fuentes (1/ 3).

Para c) distinguimos entre los que usan la fórmula (4/5) y los que calculan el volumen de la pirámide a partir del del prisma con la misma base y altura (1/5).

Relativo a resolución de problemas:

Nº grupos	R1		R2		R3		R4		R5		R6	
	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)	a)	b)
6	2	3	2	2	3	4	3	3	1	3	3	2

Tabla A7.1: Número de grupos que cumplen los aspectos R1 a R6 relativos a la resolución de problemas.

[xli] Utilizamos el término de *objeto mental* con el significado de Freudenthal (1983).

[xlii] Usamos la distinción entre superficie de un sólido y el área de la misma que indica su medida.

[xliii] Como hemos apuntado en trabajos previos, compartimos con Gil y Rico (2003) la idea de que los errores de los estudiantes pueden servir tanto para diagnosticar el conocimiento y corrección de deficiencias como para valorar y reconsiderar la planificación o programación; y también como factor o condición para el aprendizaje. De ahí que hemos considerado como una de las temáticas de nuestro estudio la referente a dificultades y errores.

CONCEPTUALIZACIÓN Y USO DE REPRESENTACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE LÍMITE EN DOCENTES DE BACHILLERATO

Conceptualization and use of representations on the limit concept in high school teachers

Evelyn Ward[a], Santiago Inzunsa[a], Salvador Hernández[b] y Fidencio López[a]

[a]Universidad Autónoma de Sinaloa, [b]Centro de Ciencias de Sinaloa

Resumen

El presente trabajo expone resultados de una investigación que tiene por objetivo analizar las concepciones que poseen los docentes de bachillerato en relación al concepto límite. Para describir las características de las conceptualizaciones de los docentes se consideraron las creencias epistemológicas, los sistemas de representación semióticas y las funciones cognitivas. Entre los resultados encontramos que los docentes identifican distintas representaciones del concepto límite, realizan transformaciones internas en el sistema representacional identificado, se les dificultan las conversiones entre diferentes sistemas, y su conceptualización está ligada principalmente al cálculo numérico.

Palabras clave: c*onceptualización, representaciones semióticas, funciones cognitivas.*

Abstract

This paper presents results of a research that aims to analyze the conceptions held by high school teachers in relation to the limit concept. To describe the features of the conceptualizations of teachers were considered epistemological beliefs, systems of representation and cognitive functions. The results included that teachers identify different representations of the limit concept, make internal changes in the representational system identified, they are difficult conversions between different systems, and that its conceptualization is linked mainly to numerical calculation.

Keywords: *conceptualization, semiotics representations, cognitive functions.*

Ward, E., Inzunsa, S., Hernández, S. y López, F. (2013). Conceptualización y uso de representaciones sobre el concepto de límite en docentes de Bachillerato. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 523-533). Bilbao: SEIEM.

ANTECEDENTES DEL PROBLEMA

El concepto de límite es fundamental para el estudio del cálculo, en particular para el desarrollo y comprensión de conceptos que forman parte de su estructura vertebral, como es el caso de la derivada y la integral. Courant y Robins (2002) mencionan que la importancia del concepto límite en las matemáticas y las ciencias radica en que muchos conceptos y números importantes se definen como límites de funciones o sucesiones, por lo que el concepto de límite es central para el desarrollo del pensamiento matemático avanzado. Sin embargo, diversas investigaciones realizadas en educación matemática han mostrado evidencia que el concepto de límite es un concepto complejo tanto para estudiantes como para docentes.

Las investigaciones acerca del concepto de límite que se reportan en la literatura se enfocan desde distintas perspectivas y consideran diversos aspectos que subyacen al concepto. Por ejemplo, Claros, Sánchez y Coriat (2009) realizaron una revisión amplía de investigaciones sobre el concepto de límite, entre las cuales se estudian las concepciones de los alumnos y se caracterizan, analizan y contrastan distintas definiciones sobre el límite (por ejemplo, Blázquez y Ortega, 2000; Contreras, García y Sánchez, 2005). Por su parte, en investigaciones que se ocupan de la conceptualización del límite, algunas proponen una nueva definición y utilizan distintas representaciones semióticas del límite. En este contexto, los trabajos de Blázquez, Gatica, Ortega y Benegas (2006) contrastan la definición métrica de límite dada por Weierstrass, con la nueva definición de límite funcional como aproximación óptima de Blázquez y Ortega (2002), y aún cuando en sus resultados estos autores reportan mejoras en los procesos de enseñanza aprendizaje relacionadas con la compresión de los estudiantes, en estas amplias investigaciones no se estudian específicamente las concepciones de los docentes.

Se ha observado que en la enseñanza de límites existe una fuerte tendencia a enfatizar la parte operativa. En este sentido, es característico que las actividades de enseñanza de los docentes estén encaminadas a establecer la definición intuitiva del límite a manera de enunciado y a partir de ella, se enfocan en resolver repetidamente ejercicios de límites, dejando con frecuencia relegada la comprensión. De esta manera, para los estudiantes, los límites son un procedimiento más, no le dan significado, y aún cuando ven distintas representaciones del concepto, no logran modificar la idea intuitiva. En este sentido, Fernández-Plaza, Castro, Rico y Ruiz-Hidalgo (2012) formulan la conjetura de que los ejemplos gráficos empleados en la enseñanza son los que pueden estar pronunciando la percepción intuitiva de los estudiantes.

Las fuentes de dificultad que impiden una adecuada comprensión del concepto de límite reportadas en la literatura (por ejemplo, Tall y Vinner, 1981; Sierpinska, 1985; Oehrtmann, 2009) son de diversa índole; entre ellas sobresalen el infinito, los tipos de definiciones en los libros de texto, la propuesta curricular, los ejemplos utilizados, los significados personales e institucionales y las representaciones matemáticas utilizadas en su definición.

La investigación sobre la conceptualización del límite, se ha enfocado mayormente sobre los estudiantes, por lo que planteamos investigar la conceptualización que los docentes de bachillerato poseen en relación a los límites, en lo cual es importante el uso de representaciones semióticas, ya que en matemáticas las operaciones sobre los objetos dependen directamente del sistema de representación semiótico utilizado. Por ejemplo, cuando resolvemos un límite observamos una dependencia de los procedimientos de solución y su escritura, ya sea en tabla numérica, gráfica, formula algebraica o lenguaje natural.

MARCO TEÓRICO

La teoría de sistemas de representación semiótica (Duval, 1998, 1999a) plantea que los objetos matemáticos no son objetos que pueden ser directamente percibidos u observados, su acceso está restringido al uso de sistemas de representación que permiten su designación. Esto requiere que la actividad sobre los objetos matemáticos se realice sólo por medio de representaciones semióticas y advierte que la construcción de un concepto en matemáticas requiere vincular coherentemente por lo menos dos sistemas de representación.

Una representación semiótica es una construcción (registro) que utiliza signos para representar un objeto matemático y la constituyen tres elementos: el objeto de la representación, el contenido de la representación y la forma de la representación. En la formación de los conceptos, el sujeto usa la representación semiótica del concepto, sin tomar conciencia de que esta representación no contiene todos los rasgos esenciales que caracterizan el concepto. Duval señala que para que una representación semiótica sea un registro de representación debe cumplir con las siguientes funciones cognitivas: primero, la representación es identificable a través de una frase, un dibujo, una gráfica, una tabla, una formula; segundo, la representación permite tratamiento, que es una transformación interna en el mismo sistema de representación; y tercero, la representación admite la conversión, que es una transformación externa a otro sistema de representación. Para construir el concepto matemático se parte de un sistema de representación, se identifica ese sistema, se tiene capacidad de transformarlo internamente para luego convertirlo a otro sistema de representación, en la medida que se articulan los diferentes sistemas se construye el concepto.

Representaciones semióticas y registros del concepto límite

Los objetos matemáticos generalmente son multi-representacionales. Las representaciones pueden ser mentales o externas y son producidas intencionalmente por el uso de un sistema semiótico: oraciones, gráficas, diagramas, dibujos (Duval, 1999b). Su distinción se refiere a su modo de producción, así pues, como se tienen varios registros de representación y sistemas para visualizarlos, en el caso del concepto límite consideraremos las que se muestran a continuación.

Representación numérica de registro aritmético (ver Tabla 1):

Tabla 1. Aproximaciones numéricas para el $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

$\boldsymbol{x}$	-0.1	-0.11	-0.001	0	0.001	0.01	0.1
$\boldsymbol{x-2}$	-2.1	-2.01	-2.001	?	-1.999	-1.99	-1.9

Representación geométrica de registro geométrico (ver Figura 1):

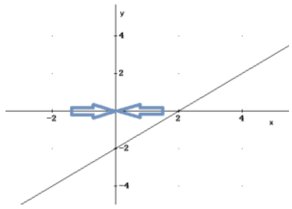


Figura 1. Gráfica del $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

Representación simbólica o analítica de registro algebraico: $\text{lím}_{x\to 0}(x-2)$

Representación en texto descriptivo de registro lenguaje natural: el límite de equis menos dos cuando equis tiende a cero.

METODOLOGÍA

El estudio se llevó a cabo en verano de 2012 mientras los docentes tomaban un curso de cálculo con tecnologías. La muestra estuvo conformada por diez docentes de matemáticas. El instrumento de recopilación de los datos fue un cuestionario, el cual fue aplicado el primer día del curso antes del uso de las calculadoras y de iniciar la discusión de los temas de cálculo. El tiempo promedio para resolverlo fue de hora y media aproximadamente.

En la figura 2 describimos la pregunta, los propósitos y el sistema de representación para cada uno de los ítems del cuestionario, mismo que tuvo por objetivo caracterizar la conceptualización de los docentes en relación al concepto límite. Para definir la caracterización nos apoyamos en las ideas de Pons, Valls, y Llinares (2011) sobre los elementos matemáticos considerados en el concepto límite. Por otra parte las aportaciones de Páez (2004) y Cantoral y Farfán (2004) nos permitieron identificar los registros de representación y las funciones cognitivas puestas en juego por los docentes. A continuación se detalla cada una de las preguntas del cuestionario.

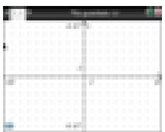
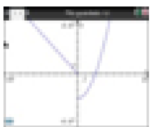
PREGUNTA	PROPOSITO Y SISTEMA DE REPRESENTACION
1. ¿Qué entiendes por aproximación?	Indagar significado matemático de aproximación y su relación con el límite Sistema de representación: lenguaje natural. Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011).
2. ¿Qué es un proceso infinito y qué es una situación límite?	Conocer las ideas de los docentes respecto a los procesos infinitos y la situación límite; además de indagar si establece alguna relación con el concepto límite. Sistema de representación: lenguaje natural. Cantoral y Farfán, (2004).
3. Considere la función continua f sobre el intervalo (a,b). Tomemos un punto x_0 en el interior del intervalo. Para cada una de las siguientes afirmaciones construya un bosquejo de la gráfica de una función que cumpla con: a) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$ b) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$ c) $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	Indagar si el docente comprende simbólica y geométricamente el límite y lo aplica en la continuidad de una función. Sistema de representación: simbólico. Cantoral y Farfán, (2004).
4. Explica el significado de que el número L sea el límite de f(x) cuando x tiende a un número fijo a.	Investigar lo qué el docente entiende por límite y el tipo de planteamiento que proporciona. Sistema de representación: lenguaje natural. Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011).
5. Bosqueja la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^2-9}{x+3}$  a. Determina el límite de f(x) cuando $x\to -3^+$ b. Determina el límite de f(x) cuando $x\to -3^-$ c. Determina el límite de f(x) cuando $x\to -3$	Identificar el tratamiento que se le da al límite en registro algebraico y el proceso de conversión de la representación simbólica a la geométrica. Sistema de representación: simbólico. Páez, M. (2004).
6. Sea la función f(x) definida por la gráfica:  a. Determina el límite de f(x) para $x\to 0^+$ b. Determina el límite de f(x) para $x\to 0^-$ c. Determina el límite de f(x) para $x\to 0$	Explorar el proceso de conversión de representación geométrica a simbólica. Sistema de representación: geométrico. Páez, M. (2004)

Figura 2. Propósito, sistema de representación y fuente de cada pregunta del cuestionario

Realizamos un análisis cualitativo de las representaciones según la propuesta de Duval (1999b), considerando dos niveles: primero analizamos el contenido de una representación en un registro dado, y segundo, el funcionamiento del registro escogido para representar el límite.

RESULTADOS Y DISCUSION

En lo sucesivo haremos referencia al docente utilizando la letra D y un número, por ejemplo: el docente 1, como D1.

Pregunta 1

1. *¿Qué entiendes por aproximación?*

Las respuestas de los docentes a esta pregunta fueron difusas, sólo D7 relaciona el concepto límite con aproximación. Todos los docentes se refieren a la aproximación como "acercarse" pero no queda claro qué tanto es el acercamiento, proporcionan una definición muy subjetiva de aproximación, relacionada con la idea de los infinitamente pequeños y ligada al cálculo numérico; todo esto apunta a una noción infinitesimal del límite. Esto coincide con los resultados de Pons, Valls y Llinares (2012) respecto a que la idea de aproximación a un número en el dominio se apoya en el cálculo de valores de la función dada en modo algebraico.

> Cuando tenemos una función f(x), una aproximación de esta es buscar el límite de dicha función, es decir encontrar el valor que toma està, cuando nos acercamos algún valor de x

Respuesta de D7

En esta pregunta la totalidad de los docentes utiliza la representación en texto descriptivo para su respuesta. Ningún docente realiza transformación interna pues no ejemplifican o describen en texto la aproximación; de igual manera no convierten a otro sistema de representación, ya que no utilizan gráficas, ni símbolos, ni sucesiones numéricas en sus explicaciones.

Pregunta 2

2. *¿Qué es un proceso infinito y qué es una situación límite?*

En las respuestas de los docentes a la pregunta 2 se observa confusión en cuanto a proceso infinito y situación límite. Todos los docentes representan su respuesta en texto descriptivo, cinco de los docentes no logran identificar proceso infinito ni situación límite, y un docente no responde a la pregunta. Las respuestas dadas por D6, D8, D9 y D10 indican que identifican un proceso infinito y situaciones límite.

> Proceso infinito, puede ser una secuencia que nunca termina osea, un proceso que nó tiene límite.
> Una situación límite se refiere a un proceso que se limita a un valor fijo, dicho límite puede ocurrir en un proceso infinito ó finito.

Respuesta de D9

> Cuando siempre puede haber un siguiente sin llegar jamás al último.
> El concepto de límite en matemáticas es básico e intuitivo. Una asintota es una especie de límite de una curva.

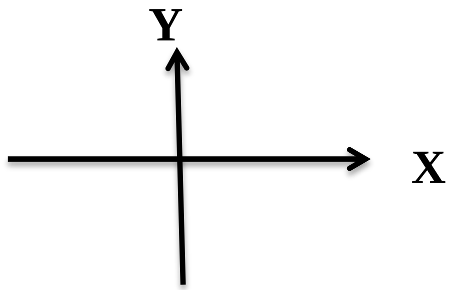
Respuesta de D6

Sin embargo, D9 en la primera parte de su respuesta expresa un proceso infinito pero la segunda parte presenta una inconsistencia, ya que un proceso infinito, no es un proceso que no tiene límite. Únicamente D6 señala lo que es una situación límite (la asíntota de una curva), lo que indica que realiza tratamiento interno. En las respuestas de los docentes también se puede observar que no logran convertir a otro sistema de representación, no utilizan gráficas, sucesiones numéricas ni símbolos. Podemos concluir que siete de los docentes poseen una noción infinitesimal del límite, ligada al cálculo numérico, y D6, D9 y D10 una noción numérica del límite.

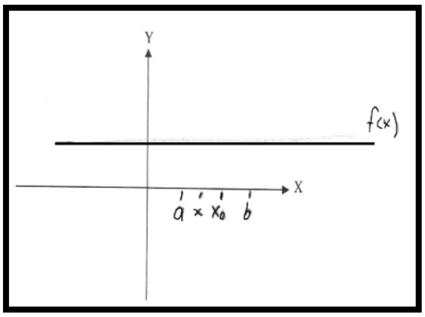
Pregunta 3.

3. *Considere la función continua f sobre el intervalo (a,b). Tomemos un punto x_0 en el interior del intervalo. Para cada una de las siguientes afirmaciones construya un bosquejo de la gráfica de una función que cumpla con:*

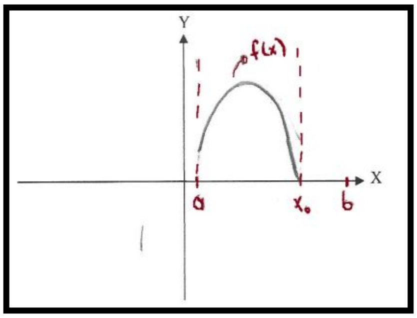
$a)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$



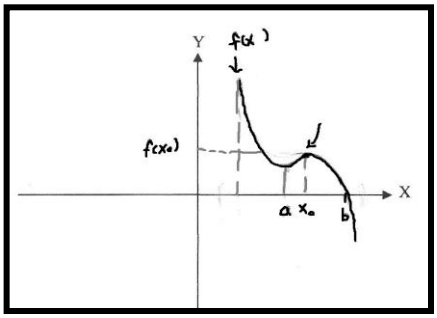
Este inciso no lo contestaron D1, D2 y D3; los otros siete docentes identificaron y transitaron del registro simbólico al geométrico. Los docentes señalan el punto x_0 en el interior del intervalo (a, b) y bosquejaron una función continua.



Bosquejo de D4

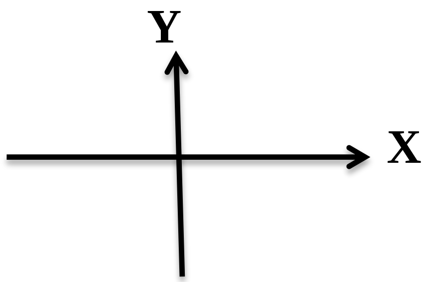


Bosquejo de D5

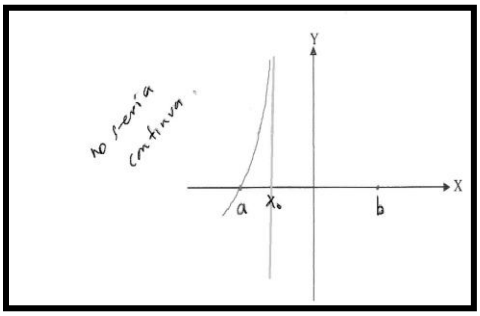


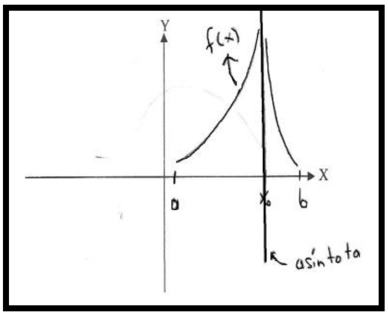
Bosquejo de D7

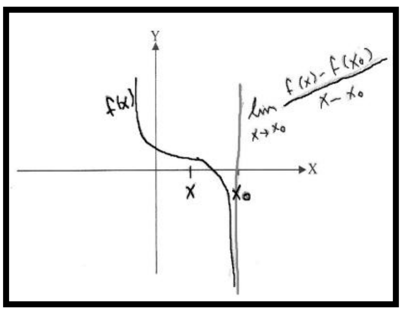
$b)\ \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$



Este inciso lo contestaron cinco docentes, ellos bosquejaron una gráfica, es importante señalar que no cumple con la condición inicial de ser una función continua, sólo D10 señala que la gráfica no sería continua, lo que indica que él realiza una conversión coherente del registro simbólico al geométrico.



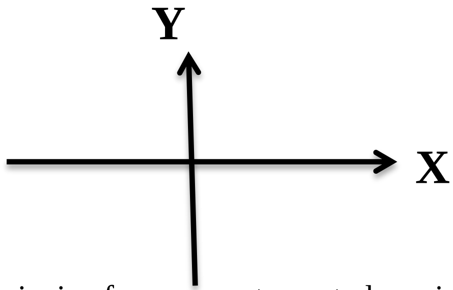




Bosquejo de D10 Bosquejo de D5 Bosquejo de D9

Las respuestas de los docentes a este inciso indican que identifican los registros simbólicos y geométricos, sin embargo no logran cumplir con la condición inicial de continuidad, esto muestra que los docentes tienen alguna idea del límite pero desvinculado de otros conceptos de cálculo.

$c)\ \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$

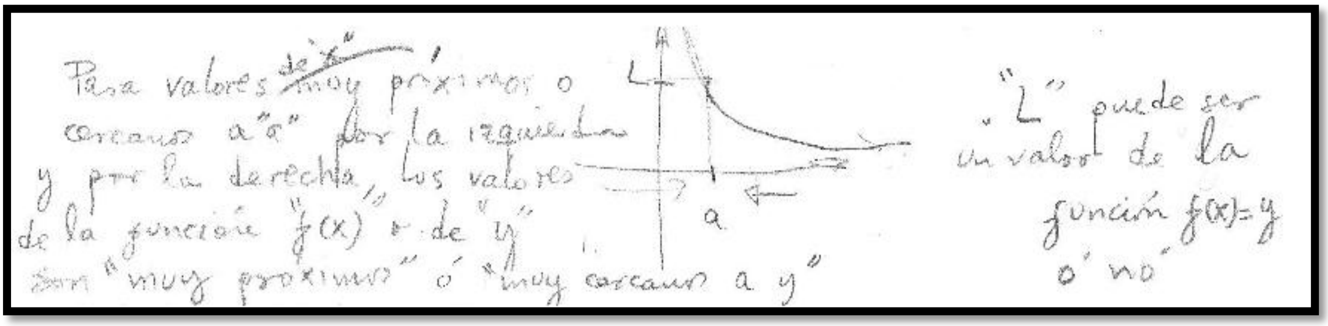


Las respuestas de los docentes a este inciso fueron exactamente las mismas que para el anterior, en ellas observamos que la mitad de los docentes identifican los registros geométricos y simbólicos pero no logran transitar coherentemente entre ellos.

Pregunta 4

4. *Explica el significado de que el número L sea el límite de f(x) cuando x tiende a un número fijo a.*

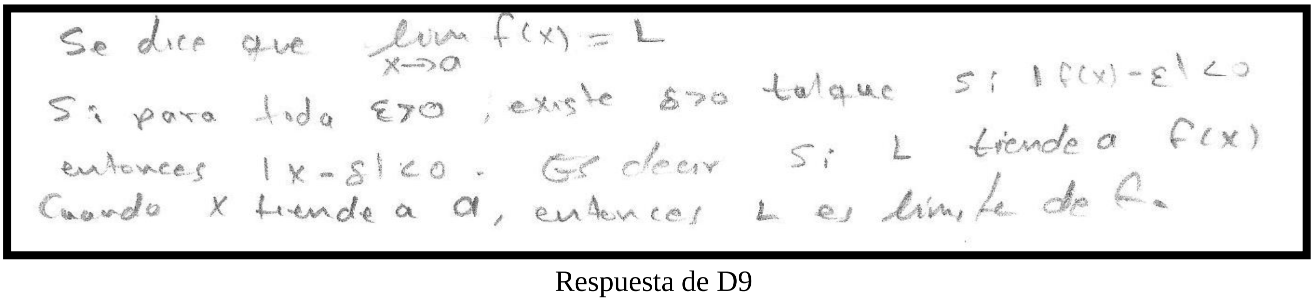
La pregunta cuatro no la contestaron D1 y D2, mientras que D3, D4, D5, D6 y D7 enuncian en texto descriptivo el significado que se les solicitó, en sus explicaciones utilizan límites laterales y acercarse a un valor, sin quedar claro que significa “acercarse a”.


Para valores de "x" muy próximos o cercanos a "a" por la izquierda y por la derecha, los valores de la función "f(x)" o de "y" son "muy próximos" o "muy cercanos a y"

"L" puede ser un valor de la función f(x)=y o no

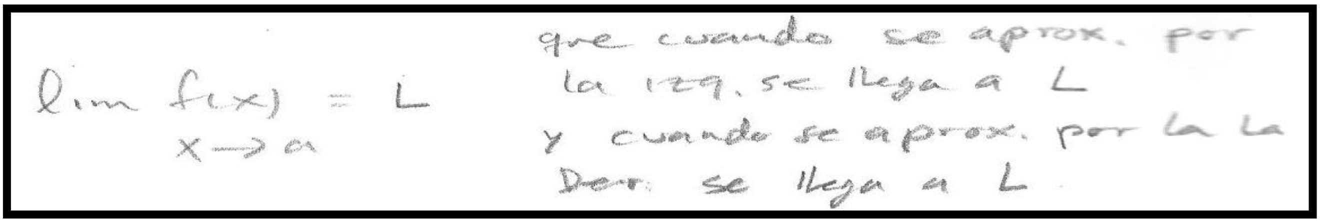
Respuesta de D8

En la respuesta de D8 se observa que enuncia su explicación en dos sistemas de representación: texto descriptivo y una gráfica, lo que indica que el docente identifica estas representaciones, además realiza conversión coherente entre ellas. Su noción del límite es numérica ya que utiliza expresiones como: “muy próximos” o “muy cercanos a” sin quedar completamente claro que tan próximos o cercanos; su conceptualización está ligada al cálculo numérico.


Se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|f(x) - \varepsilon| < \delta$ entonces $|x - \delta| < \varepsilon$. Es decir si L tiende a f(x) cuando x tiende a a, entonces L es límite de f.

Respuesta de D9

La respuesta de D9 indica que, el docente identifica simbólicamente el límite de una función, y que trató de recordar la definición formal del límite, al enunciar textualmente todos sus elementos: épsilon, delta, la función $f(x)$, el valor a al que tiende x y el valor L al que tiende $f\ x$, sin embargo no expresa correctamente las relaciones entre estos elementos.

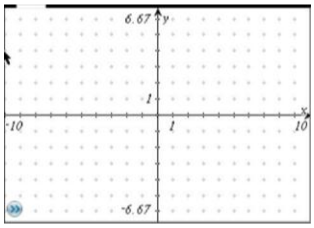


Respuesta de D10

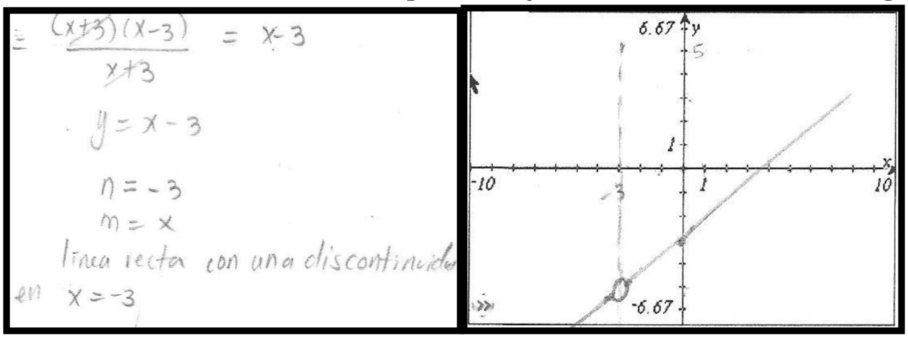
Se observa en la respuesta de D10, que él recurre a las representaciones: simbólica y texto descriptivo para expresar el concepto de límite. En el texto descriptivo no utiliza la idea de límites laterales adecuadamente; D10 identifica la representación simbólica del límite y al utilizar frases como "se aproxima" y "se llega" su noción de límite es numérica, ligada al cálculo numérico.

Pregunta 5

5. *Bosqueja la gráfica de la función* $f\ x\ = \frac{x^2-9}{x+3}$
a) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3^{+}$
b) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3^{-}$
c) *Determina el límite de f(x) cuando* $x \to -3$

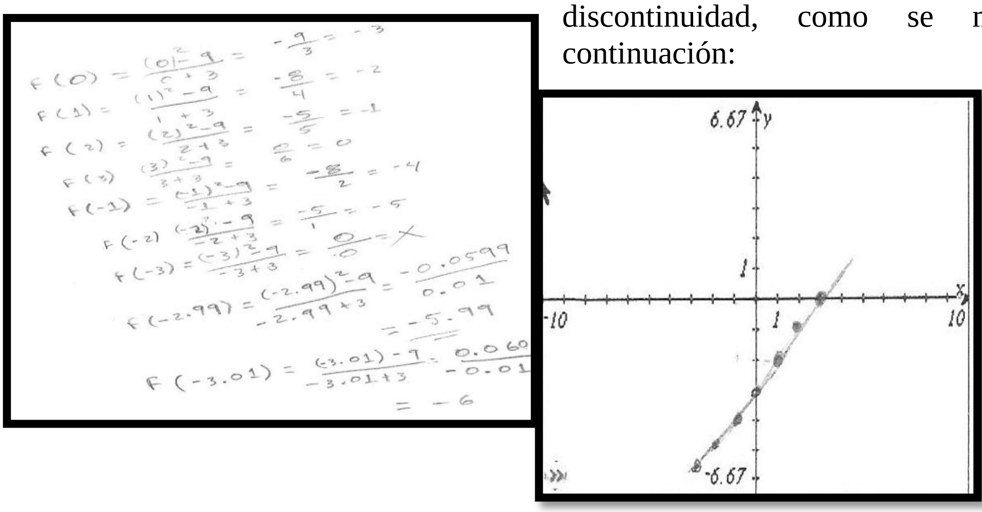


En esta pregunta se observó que para bosquejar la gráfica seis docentes primero resuelven analíticamente, analizan la función tomando en cuenta los valores del dominio para los que está definida la función, identifican la función simplificada y realizan correctamente la gráfica.



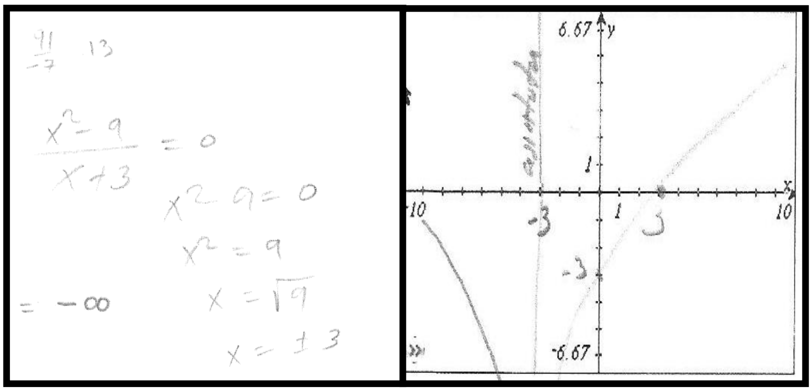
Bosquejo de D7

El tipo de solución que se observa en la respuesta de D7 indica que el docente realiza las tres funciones cognitivas: identifica en representación simbólica, le da tratamiento en el mismo sistema, y convierte coherentemente a representación geométrica. Esto no se observó en las soluciones proporcionadas por dos docentes, quienes realizaron todas las operaciones algorítmicas convirtiendo a representación numérica y no logran convertir coherentemente a representación geométrica pues elaboran la gráfica sin discontinuidad, como se muestra a continuación:



Bosquejo de D3

En el bosquejo realizado por D3, se observa una aprehensión local por punto. Por su parte D10 le dio tratamiento en la representación simbólica, cometió errores en dicho tratamiento y esto provocó que esbozara incorrectamente la gráfica de la función, ya que realizó una asíntota como se muestra enseguida:

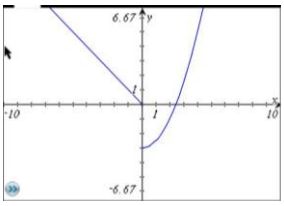


Bosquejo de D10

En la pregunta 5, cinco docentes resolvieron correctamente los límites. Esto es, convirtieron coherentemente del registro analítico al geométrico; los otros cinco docentes no lograron esta conversión ya que resolvieron incorrectamente los límites, pues concluyeron que no existían o que eran infinitos.

Pregunta 6

6. *Sea la función f(x) definida por la gráfica:*



a. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0^+$
b. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0^-$
c. *Determina el límite de f(x) para* $x \to 0$

Esta pregunta no la respondieron D1 y D2, los ocho docentes restantes la resolvieron correctamente, convirtieron de representación gráfica a numérica o simbólica, y concluyeron que el límite en cero no existe, pues los límites laterales no son iguales. Los docentes en sus respuestas utilizaron representación en texto descriptivo, numérica y simbólica.

a) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -3$ b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$

c) $\lim_{x\to 0} f(x)$ no existe por definición de límite.

(Los límites laterales no son iguales).

Respuesta de D7

La importancia de las preguntas 5 y 6 radica como lo señalan Pons, Valls y Llinares (2012), en la comprensión de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango es un elemento importante en el proceso de construcción del significado de límite de una función en un punto.

CONCLUSIONES

En la conceptualización de los docentes bachillerato encontramos que ocho de los docentes poseen una noción infinitesimal del límite y los otros dos docentes una noción numérica, sin embargo la noción del límite de la totalidad de los docentes está fuertemente anclada en procedimientos algorítmicos que conducen al cálculo numérico, consideran que el límite de una función en un punto es el valor de la función en el punto. Por otra parte identifican los cuatro registros de representación del límite: lenguaje natural, geométrico, aritmético y algebraico, logran transformaciones internas en cada unos de los registros, sin embargo se les dificultan las transformaciones externas entre distintos registros.

Conceptualización Cerrada	Se posee una noción infinitesimal del limite, estrechamente ligada al cálculo numérico. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Utiliza monoregistro, por lo que no se logra comprensión del concepto, se queda en la intuición.
Conceptualización Transitiva	Se posee una noción numérica del límite, expresiones como "tan cerca como", "tan pequeño como se quiera", "tan próximo a"; carecen de sentido, proporciona una definición muy subjetiva. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Convierte a otro sistema de representación sin lograr regresar al de origen. Utiliza biregistro, logra cierta comprensión del concepto.
Conceptualización Reversible	Se posee una noción métrico-analitica del límite, utiliza el rigor y formalismo matemático. Se identifican las representaciones en: Texto Descriptivo, Numérica, Geométrica y Simbólica; expresa el límite en un registro utilizando algún sistema semiótico. Admite tratamiento en el sistema de representación identificado. Convierte coherentemente entre sistemas de representación, logra transitar entre todas las representaciones del límite. Utiliza multiregistro, se logra comprensión del concepto.

Figura 3. Categorías generadas con los sistemas de representación semiótica

En la estructura conceptual del límite se consideraron las creencias epistemológicas, las representaciones, los registros de representación, los sistemas semióticos, las funciones cognitivas y el conocimiento procedimental. El análisis de las soluciones de los docentes nos permitió caracterizar la conceptualización del límite de los docentes a través del sistema de categorías que se muestra en la figura 3.

Respecto a las categorías construidas para la conceptualización podemos decir que, la conceptualización de ocho de los docentes se caracteriza como conceptualización cerrada, y los otros dos (D6 y D9) como conceptualización transitiva; es importante señalar que no encontramos conceptualización reversible, conjeturamos que será difícil encontrar docentes que cumplan con esta caracterización.

Referencias

Blázquez, S., y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. *El futuro del cálculo infinitesimal*. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

Blázquez, S., y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *Revista UNO, 30*, 67-82.

Blázquez, S., Gatica, S. N., Ortega, T., y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*(2), 189-210.

Cantoral, R., y Farfán, R. (2004). *Desarrollo conceptual del Cálculo.* México: Thompson Editores.

Claros, F., Sánchez, M., y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp.197-209). Santander: SEIEM.

Contreras, A., García, M., y Sánchez, C. (2005). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *Revista EMA, 10*(2), 413-439.

Courant, R., y Robbins H. (2002*). ¿Qué son las matemáticas? Conceptos y métodos fundamentales. Prefacio y avances recientes.* Ian Stewart. México: Fondo de Cultura Económica.

Duval, R. (1998*). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. Investigaciones en matemática educativa II*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999a). Representation, vision and visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basic issues for learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Cuernavaca, Morelos.

Duval, R. (1999b). *Los Problemas Fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas y las Formas Superiores del Desarrollo Cognitivo.* (Traducción: Myriam Vega Restrepo, 2001. Edición e Impresión: Merlín I.D. Cali, Colombia).

Fernández-Plaza, J.A., Castro, E., Rico, L., y Ruiz-Hidalgo, J.F. (2012). Concepto de límite finito de una función en un punto: aspectos estructurales y definiciones personales. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 229 – 237). Jaén: SEIEM.

Oehrtman, M. (2009). Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphor for limit concept. *Journal for Research in Mathematics Education*, *40*(4), 396-426.

Páez, M. (2004). *Procesos de construcción del concepto límite en un ambiente de aprendizaje cooperativo, debate científico y autorreflexión*. Tesis doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (IPN).

Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011). Coordination of Approximations in Secondary School Students' Understanding of Limit Concept. *Proceedings of the 35nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4(3), 393 – 400.

Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435 – 445). Jaén: SEIEM.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en didactique des mathematiques*, *6*(1), 56-68.

Tall, D y Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151–169.

CÓMO INTERPRETAN LOS ESTUDIANTES PARA MAESTRO EL PENSAMIENTO MATEMÁTICO DE LOS ALUMNOS SOBRE EL PROCESO DE GENERALIZACIÓN

How preservice primary teachers interpret students' mathematical thinking about generalization process

Alberto Zapatera[a] y María Luz Callejo[b]

[a]Universidad CEU Cardenal Herrera, [b]Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo caracterizar en los estudiantes para maestro (EPM) grados de desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de alumnos de primaria, en el ámbito específico del proceso de generalización, identificando el tipo de discurso que emplean. En los resultados hemos descrito dos grupos: los EPM que identifican sólo un nivel de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria y los que identifican tres niveles de desarrollo. La diferencia entre estos grupos radica en los elementos matemáticos que han utilizado cuando han elaborado un discurso específico Estos resultados aportan información para el diseño de intervenciones en la formación de maestros que tengan como uno de sus objetivos el desarrollo de la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes.

Palabras clave: *mirar con sentido, proceso de generalización, estudiantes para maestro, tipo de discurso, competencia docente.*

Abstract

The goal of this paper is to characterize grades of development of preservice primary school teachers' (PPT) teaching competence in noticing students' mathematical thinking, in the specific area of the generalization process identifying the type of discourse that PPT use. Results provide two groups: PPT that identify only one level of development of the process of generalization in primary school students and PPT that identify the three levels of development. The difference between groups is in the mathematical elements that PPT use when they elaborate the specific discourse. The findings provide information for designing interventions in teacher training focused on the development of teaching competence in noticing students' mathematical thinking

Keywords: *noticing, generalization process, preservice primary teachers, kind of discourse, mathematics teaching competence.*

Zapatera, A. y Callejo, M. L. (2013). Cómo interpretan los estudiantes para maestro el pensamiento matemático de los alumnos sobre el proceso de generalización. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 535-544). Bilbao: SEIEM.

MARCO TEÓRICO

Las investigaciones sobre el desarrollo profesional del profesor de matemáticas han destacado la importancia de la competencia docente "mirar con sentido" la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (Fortuny y Rodríguez, 2012; Jacobs, Lamb y Philipp, 2010; Mason, 2002). El desarrollo de esta competencia docente es uno de los objetivos de los programas de formación de profesores y un tema de estudio relevante en las investigaciones en didáctica matemática en los últimos años (van Es y Sherin, 2002; Fernández, Valls y Llinares 2011; Sánchez-Matamoros et al. 2012).

Jacobs, Lamb y Philipp (2010) describen esta competencia docente mediante tres destrezas que debe desarrollar el profesor de matemáticas: (1) identificar las estrategias usadas por los estudiantes; (2) interpretar la comprensión de los estudiantes y (3) decidir las acciones a desarrollar en la clase. Van Es (2011) ha identificado dos características importantes de esta competencia cuando los profesores observan registros audiovisuales de clase: (1) en *qué* focalizan sus observaciones (por ejemplo en los alumnos individuales, en grupos de alumnos o en el profesor, en las estrategias de enseñanza, etc.) y (2) *cómo* analizan lo que observan (identificando episodios concretos, haciendo valoraciones o interpretando lo que observan); la manera en la que los profesores analizan los registros de enseñanza incluye el tipo de discurso que emplean (analítico, evaluativo o interpretativo) y la profundidad del mismo (si el profesor proporciona más o menos detalles para explicar su pensamiento y si apoya su discurso en evidencias). Sus investigaciones han mostrado que cuando los profesores focalizan su atención en más aspectos los analizan con más profundidad.

Recientemente el énfasis se sitúa en comprender el desarrollo de esta competencia en estudiantes para profesor en dominios matemáticos específicos (Fernández, Callejo y Márquez, 2012; Fernández, Valls y Llinares 2011; Márquez, Callejo y Fernández, 2011; Sánchez-Matamoros et al. 2012). La investigación reportada aquí forma parte de otra más amplia sobre el aprendizaje de los estudiantes para maestro que intenta aportar información sobre cómo los EPM identifican e interpretan el pensamiento matemático de los alumnos de educación primaria en relación con los procesos de generalización. El proceso de generalización en el contexto de este trabajo lo entendemos vinculado a tareas en las que se da en forma gráfica los primeros términos de una sucesión y se pide: (a) continuar la sucesión; (b) el número de elementos que componen las figuras de términos lejanos; (c) identificar la regla general; (d) identificar la posición de una figura dado el número de elementos.

Las investigaciones sobre cómo los alumnos de primaria resuelven este tipo de tareas han puesto de relieve que en el desarrollo del proceso de generalización juegan un papel relevante los siguientes elementos:

Coordinación entre la estructura espacial y la numérica: Para extender una secuencia de figuras, el estudiante debe reconocer una regularidad relacionada con la coordinación de la estructura espacial y de la estructura numérica. La estructura espacial emerge de la distribución de elementos de cada figura y la estructura numérica del número de elementos de cada figura (Radford, 2011; Rivera, 2010).

Relación funcional: Para identificar un término lejano (o no especificado) es preciso establecer la relación entre la posición de una figura y la cantidad de elementos que la forman.

Proceso inverso: Para identificar la posición de una figura conocido el número de elementos que la forman es preciso establecer una relación funcional inversa de la anterior. Aunque muchos estudiantes son capaces de establecer la relación entre la posición de una figura y el número de elementos que la componen, les resulta difícil invertir esta relación (Warren, 2005).

En el caso en que la relación funcional sea una función afín, $f(n)=an+b,\ b\neq 0$, hay que considerar el *término independiente* o invariante que aparece como una constante en la expresión de la función.

Estos elementos permiten determinar diferentes niveles de desarrollo del proceso de generalización desde las investigaciones previas (Figura 1).

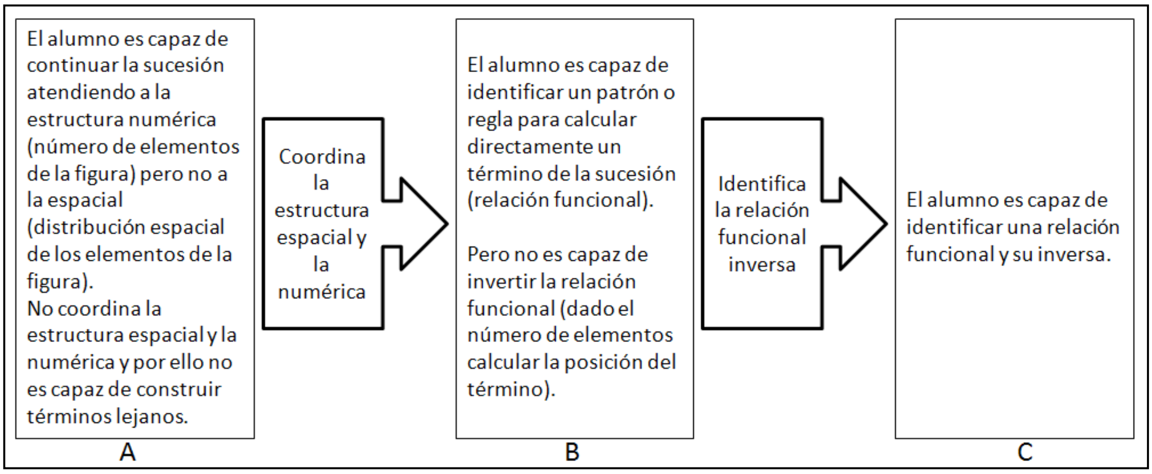


Figura 1. Niveles de desarrollo del proceso de generalización

Con estas referencias previas, en este estudio nos centramos en caracterizar grados de desarrollo en estudiantes para maestro de la competencia docente “mirar con sentido” el pensamiento matemático de los estudiantes en los procesos de generalización. Las preguntas de investigación son:

¿Qué niveles de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria identifican los EPM?

¿Qué tipo de discurso utilizan los EPM para identificar estos niveles de desarrollo?

MÉTODO

Participantes

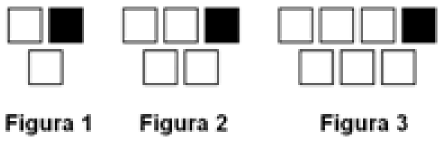
Los participantes fueron 40 EPM que estaban en el segundo semestre de su programa de formación cursando una materia centrada en el desarrollo del sentido numérico. Estos EPM habían resuelto problemas de generalización y habían identificado los elementos matemáticos, pero no tenían información sobre el proceso de generalización en alumnos de primaria.

Instrumento

A partir de las investigaciones previas sobre el proceso de generalización en alumnos de primaria (Radford, 2011; Carraher, Martínez y Schliemann, 2007; Zapatera y Callejo, 2011) diseñamos un cuestionario formado por las respuestas de tres alumnos a tres problemas en los que se presenta una sucesión de figuras que siguen un patrón de crecimiento aditivo (Figura 2). Los EPM debían responder individualmente por escrito y disponían de 50 minutos.

Problema 1

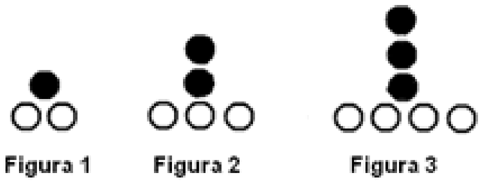
Observa las siguientes figuras:



1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 25, ¿podrías saber cuántos cuadrados tiene? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de cuadrados para una figura cualquiera?

Problema 2

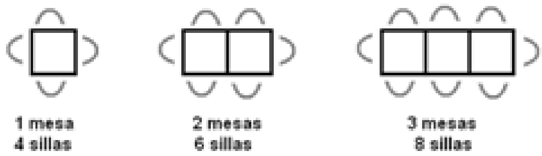
Observa las siguientes figuras:



1. Continúa la sucesión y dibuja la figura 4 y la figura 5.
2. Sin necesidad de dibujar la figura 30, ¿podrías saber cuántas bolas tiene en total? Explica cómo has encontrado el resultado.
3. ¿Cómo calcularías el número total de bolas para una figura cualquiera?

Problema 3

Observa las siguientes figuras que representan mesas y sillas:



Como puedes ver alrededor de una mesa hemos colocado 4 sillas, alrededor de 2 mesas hemos colocado 6 sillas y alrededor de 3 mesas hemos colocado 8 sillas

1. ¿Podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?
2. ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿Y alrededor de 6 mesas?
3. En una fiesta se han colocado juntas 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos invitados pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.
4. Si en un cumpleaños se ha invitado a 42 niños, ¿cuántas mesas necesitaremos juntar en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.
5. Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

Figura 2. Problemas resueltos por los alumnos de Primaria

En los problemas 1 y 2 la regla general es $2n+1$ siendo n el número de la figura. En el primer problema el término independiente corresponde al único cuadrado negro de cada figura y en el segundo a la diferencia entre el número de círculos blancos y negros. La regla general del tercer problema es $2n+2$.

Las respuestas de los tres alumnos a los tres problemas se seleccionaron atendiendo a distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización (Figura 1) (Radford, 2011; Warren, 2005):
Las respuestas del *alumno A* a los tres problemas ponen de manifiesto un desarrollo del proceso de generalización que le permite continuar la sucesión para términos próximos (generalización cercana) respetando el patrón de crecimiento cuantitativo pero no reconociendo la estructura espacial de las figuras, por lo que no es capaz de construir los términos lejanos al no coordinar la estructura espacial y la numérica de las figuras e ignorar el término independiente (Figura 3).

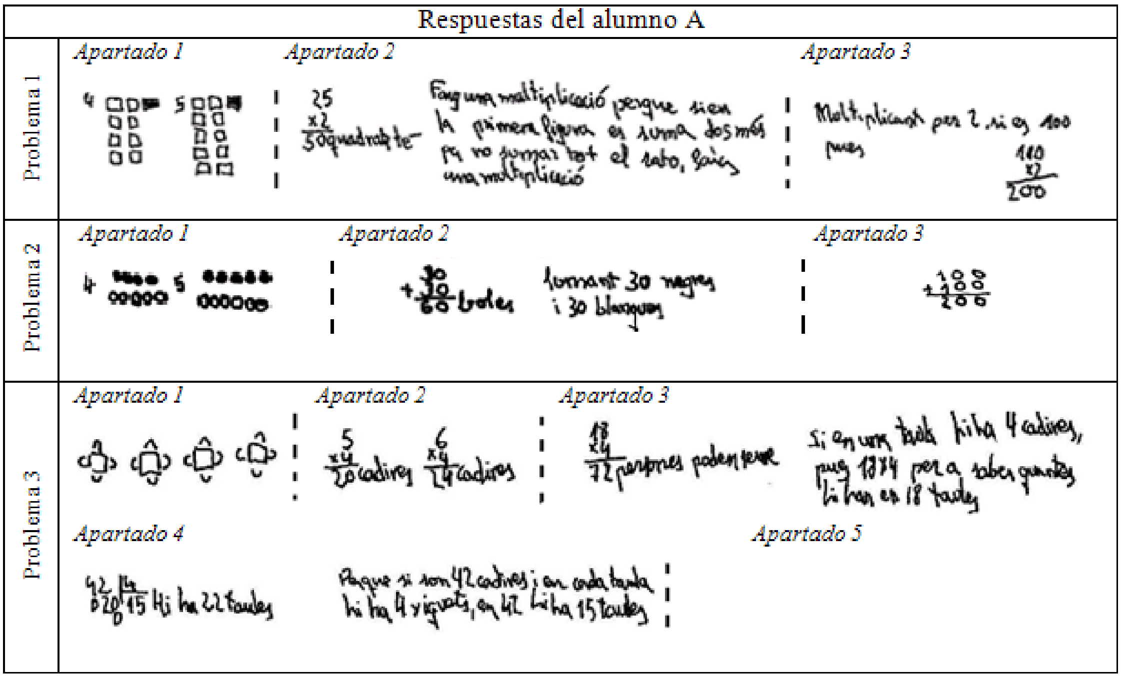


Figura 3. Respuestas[xliv] del alumno A a los tres problemas

Las respuestas del *alumno B* a los tres problemas pone de manifiesto un desarrollo del proceso de generalización que le permite coordinar el esquema espacial y numérico, reconoce la relación funcional en casos particulares y expresa la regla general como una relación funcional (generalización lejana). Sin embargo, no es capaz de invertir la relación funcional en casos particulares (sin proceso inverso; Figura 4).

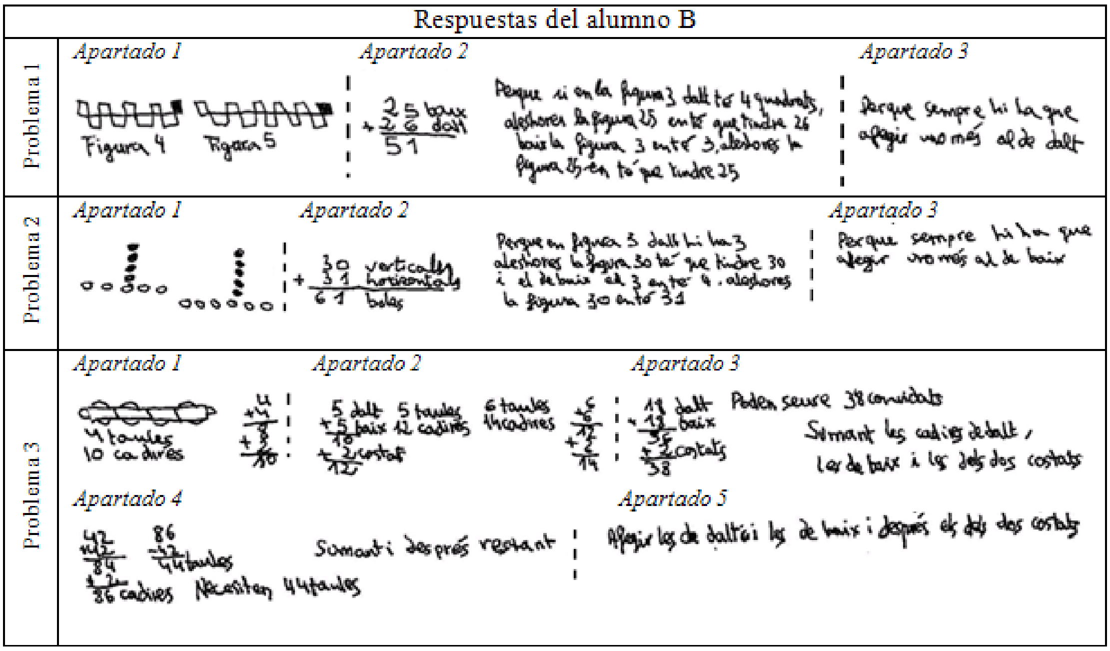


Figura 4. Respuestas del alumno B a los tres problemas

Las respuestas del *alumno C* añade al caso anterior el ser capaz de invertir la relación funcional en casos particulares (con proceso inverso; Figura 5).

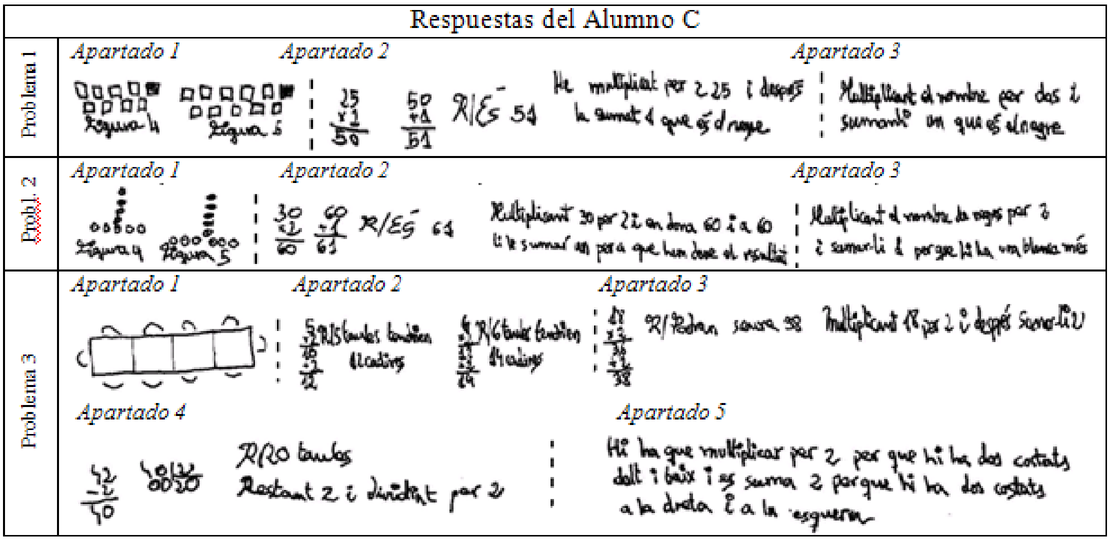


Figura 5. Respuestas del alumno C a los tres problemas

A los EPM se les pidió contestar por escrito a tres preguntas (Jacobs et al., 2010):

1. *Qué aspectos destacarías de las respuestas del estudiante X en relación con cada uno de los problemas, indicando a qué problema te refieres.*
2. *A partir de los aspectos que has destacado, identifica algunas características del proceso de generalización del estudiante X en los tres problemas.*
3. *Ante las características del proceso de generalización que has mencionado en el punto anterior, si fueras un/a maestro/a, ¿qué harías con el estudiante X para mejorar este proceso?*

La segunda pregunta tenía como objetivo determinar en qué medida los EPM eran capaces de abstraer las regularidades observadas en las respuestas de cada alumno a los tres problemas en conjunto, a fin de interpretar las características del desarrollo del proceso de generalización del estudiante de primaria. En este trabajo exponemos los resultados del análisis de esta pregunta

Análisis

El análisis de las respuestas de los EPM se realizó en tres fases, En la primera fase del análisis clasificamos los EPM en dos grupos, según que diferenciaran o no en las respuestas de los alumnos de primaria distintos niveles de desarrollo del proceso de generalización. En una segunda fase, centrada sólo en aquellos que habían discriminado distintos niveles de desarrollo, se analizaron las respuestas teniendo en cuenta entre qué alumnos establecían diferencias (A, B o C). Por último, en la tercera fase se analizó el tipo de discurso que empleaban.

Con el propósito de generar categorías para analizar el discurso se siguió un proceso inductivo: un grupo de tres investigadores analizó de manera independiente una muestra de respuestas dadas por los EPM discutiéndose las discrepancias iniciales; estas categorías se fueron refinando al analizar nuevas justificaciones. Siguiendo este proceso generamos las siguientes categorías:

Discurso genérico: Cuando el EPM expresa juicios de valor acerca de la respuesta del alumno, da impresiones generales o hace comentarios acerca de la comprensión o de la expresión de los alumnos de Primaria. Por ejemplo si dice: “Sabe generalizar”, “No entiende el proceso de generalización” o “Realiza correctamente los ejercicios”.

Discurso específico: Cuando el EPM hace referencia explícita o implícita a elementos matemáticos del proceso de generalización mencionados anteriormente como la coordinación entre estructura espacial y numérica, término independiente, relación funcional o proceso inverso. Por ejemplo: “No generaliza correctamente porque no respeta la estructura espacial de las figuras”, “El alumno comete un error porque olvida sumar el cuadrado negro”, “Realiza con éxito la generalización ya

que es capaz de relacionar el número de la figura con el número de elementos" o "No completa la generalización ya que no es capaz de revertir el proceso".
Discurso mixto: Cuando el EPM utiliza un discurso específico para identificar las características de alguno de los alumnos y un discurso genérico para los otros.
Los análisis en las diferentes fases fueron realizados de manera independiente por tres investigadores discutiéndose las discrepancias.

RESULTADOS

En la primera fase del análisis clasificamos los EPM en dos grupos: 2 EPM que no diferencian entre los alumnos de Primaria y 38 que sí establecen diferencias.

En la segunda fase, entre los EPM que sí establecían diferencias en la manera en la que los alumnos de primaria resolvían los problemas, identificamos dos grupos: *Grupo 1* formado por los EPM que sólo distinguen entre el alumno de primaria que no coordina la estructura espacial y la numérica (alumno A) y los que sí coordinan ambas estructuras (B y C); y el *Grupo 2* formado por los EPM que identifican las diferencias entre los tres alumnos.

En la tercera fase analizamos el tipo de discurso que usaba cada uno de estos dos grupos de EPM para describir las características del proceso de generalización de cada alumno de primaria. En cada uno de ellos hemos identificado tres subgrupos: un subgrupo que utiliza un discurso genérico, otro que usa un discurso específico y un tercero que emplea un discurso mixto. Describimos a continuación las características de estos grupos.

Grupo 1 (n=17). Los EPM de este grupo distinguen el alumno de primaria que no coordina la estructura espacial y la numérica (alumno A) de los otros dos que sí coordinan estas estructuras (alumnos B y C); pero no fueron capaces de ver las diferencias entre estos dos últimos.

En este grupo 4 EPM utilizan un discurso genérico; 11 EPM un discurso específico apoyado mayoritariamente en un elemento matemático: la coordinación o no entre la estructura espacial y la numérica, lo que les permitió discriminar el alumno A de los demás; y 2 EPM utilizan un discurso mixto. Ninguno de estos subgrupos apoyó su discurso en el elemento matemático "proceso inverso" que les habría permitido discriminar entre los alumnos de primaria B y C.

Por ejemplo el EPM.30 utilizó un discurso específico para caracterizar los tres alumnos de primaria. Hizo referencia a la falta de coordinación entre estructuras ("no respeta la estructura espacial") y al término independiente ("no observa que se añade una más") para identificar al alumno A y diferenciarlo de los otros dos (alumnos B y C). Pero consideró a los alumnos B y C de manera conjunta haciendo referencia a la relación funcional para caracterizarlos ("toma la figura y relaciona las partes"; "la figura corresponde a 2n+1"), pero no identificó el papel que desempeña el proceso inverso para discriminar los alumnos B y C:

"El fallo se encuentra en que no respeta la estructura espacial y no observa que se añade una más al doble de la figura que sería la bola blanca de más" (Alumno A)
"Sabe generalizar para cualquier figura ya que toma la figura y relaciona las partes. Arriba tiene x y abajo tiene x más una añadida de color" (Alumno B)
"Arriba es igual que abajo más uno, entonces la figura corresponde a 2n+1" (Alumno C)
Grupo 2 (n=21). Los EPM de este grupo fueron capaces de identificar las diferencias entre los tres alumnos de primaria. En relación con el discurso, distinguimos también tres subgrupos: un subgrupo que usa un discurso genérico (6 EPM); otro que usa un discurso específico apoyado mayoritariamente en dos o más elementos matemáticos (8 EPM) y los que utilizan un discurso mixto (7 EPM). Los EPM que emplean un discurso específico hacen referencia a los cuatro elementos matemáticos: término independiente (2 EPM), coordinación entre estructura espacial y numérica (7 EPM), relación funcional (3 EPM) y proceso inverso (8 EPM).

Por ejemplo el EPM 4.30 se refiere al término independiente y a la falta de coordinación del alumno A, a la dificultad a la hora de dividir del alumno B, lo que interpretamos como dificultad de invertir el proceso, y a la relación funcional en el alumno C:

"No sigue un orden espacial y se olvida de sumar" (Alumno A)
“No sabe usar correctamente la división en este tipo de ejercicios” (apartado 4 del ejercicio 3; Alumno B)
“Este tipo de problemas no le supone dificultad alguna porque se maneja muy bien con la estrategia funcional” (Alumno C)

Hemos descrito dos grupos de EPM, los que identifican sólo un nivel de desarrollo del proceso de generalización de los alumnos de primaria y no distinguen entre los otros dos (Grupo 1) y los que identifican tres niveles de desarrollo (Grupo 2). Por otra parte ambos grupos utilizan tres tipos de discurso para caracterizar estos niveles: específico, genérico y mixto. La diferencia entre los EPM del Grupo 1 y los del Grupo 2 radica en los elementos matemáticos que han utilizado cuando han elaborado un discurso específico. Por tanto, con relación a los resultados de van Es (2011), encontramos sólo una cierta relación entre el *qué* y el *cómo* los EPM interpretan el proceso de generalización de los alumnos de primaria: el discurso específico que usan los EPM que identifican los tres niveles de desarrollo es más rico que el que utilizan los que no los identifican pues usan más elementos matemáticos relativos al proceso de generalización para describir las diferencias.

En los problemas propuestos, el elemento matemático ‘proceso inverso’ juega un papel importante, pues es el que permite discriminar entre los dos alumnos de primaria que sí coordinan la estructura espacial y la numérica (alumnos B y C), ya que sólo el alumno C sabía realizar el proceso inverso. Por otra parte todos los EPM que han aportado evidencias de los elementos matemáticos que juegan un papel relevante en el proceso de generalización, se han referido al elemento ‘coordinación entre la estructura espacial y la numérica’. Esto puede deberse a que este elemento se pone de manifiesto en la respuesta al primer apartado de cada uno de los problemas “continúa la sucesión y dibuja las figura 4 y 5” (problemas 1 y 2) o “¿podrías dibujar 4 mesas y sus correspondientes sillas?” (problema 3) y se refleja claramente en el dibujo que han realizado los alumnos de primaria.

CONCLUSION

Un resultado de este estudio es que los EPM tienen dificultad para interpretar el pensamiento matemático de los alumnos sobre el desarrollo del proceso de generalización (sólo 21 de 40 fueron capaces de reconocer las diferencias en los tres alumnos). Esta dificultad fue debida a que no reconocieron como relevante en el proceso de generalización la realización del proceso inverso a partir de la identificación de la relación funcional. El hecho de que algunos EPM no fuesen capaces de distinguir entre el alumno de primaria que coordinaba las estructuras numérica y espacial y utilizaba una relación funcional para describir la regla general (Alumno B) y el alumno que además de esto sabía invertir la relación funcional (Alumno C) indica que les ha resultado difícil describir las características del proceso de generalización de los alumnos de primaria usando los elementos matemáticos relevantes en la resolución de las tareas propuestas. Esto revela la necesidad de que los EPM tomen consciencia explícita de los elementos matemáticos que intervienen en la resolución de estos problemas con los que ya estaban familiarizados.

Estos resultados aportan información para el diseño de materiales para la formación de maestros que tengan en cuenta las características del aprendizaje de los EPM. En este sentido el instrumento diseñado en esta investigación puede ser un punto de partida para la elaboración de materiales docentes en los programas de formación de maestros que tengan como objetivo el desarrollo de las destrezas de identificar los elementos matemáticos relevantes en la resolución de este tipo de tareas e interpretar las producciones de los estudiantes. De esta manera coincidimos con van Es (2011) en que “los maestros necesitan aprender a mirar con sentido, es decir, necesitan identificar los aspectos que influencian el aprendizaje de los estudiantes y necesitan razonar sobre estos aspectos”, y una manera de trabajar estos aspectos podría ser la realización de tareas como las que planteamos en el cuestionario de esta investigación considerado como material docente.

Reconocimientos. Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación. España, y del Proyecto emergente GRE10-10 de la Universidad de Alicante (España).

Referencias

Carraher, D.W., Martinez, M.V., y Schliemann, A.D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM. Mathematics Education*, *40*, 3-22

Fernández, C., Callejo, M.L., y Márquez, M. (2012). Valoración de las respuestas a problemas de división medida con fracciones por estudiantes para maestro. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 219-227). Jaén: SEIEM.

Fernández, C., Valls, J., y Llinares S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente "mirar con sentido" el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

Fortuny, J.M., y Rodríguez, R. (2012). Aprender a mirar con sentido: facilitar la interpretación de las interacciones en el aula. *AIEM. Avances de Investigación en Educación matemática, 1,* 23-37.

Jacobs, V.R., Lamb, L.C., y Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169-202.

Márquez, M., Callejo, M.L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-428). Ciudad Real: SEIEM.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer.

Radford, L. (2011). Embodiment, perception and symbols in the development of early algebraic thinking. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 17-24. Ankara, Turkey: PME.

Rivera, F.D. (2010). Second grade students' preinstructional competence in patterning activity. En M.F. Pinto y T.F. Kawasaki (Eds.). *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 81-88. Belo Horizonte, Brazil: PME

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de bachillerato. La derivada de una función en un punto. En A. Estepa et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497-508). Jaén: SEIEM.

Van Es, E., y Sherin, M. (2002). Learning to notice: scaffolding new teachers' interpretations of classroom interactions. *Journal of Technology and Teacher Education, 10,* 571-596.

Van Es, E. A. (2011). A framework for learning to notice student thinking. En M.G. Sherin, V.R. Jacobs y R.A. Philipp, *Mathematics Teacher Noticing.* Nueva York: Routledge.

Warren, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. En H.L. Chick y J.L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 305-312. Melbourne: PME.

Zapatera, A. y Callejo, M.L. (2011). Nivel de éxito y flexibilidad en el uso de estrategias resolviendo problemas de generalización de pautas lineales. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 351-360). Ciudad Real: SEIEM.

[xliv] Las respuestas están en catalán.

LISTA DE AUTORAS/ES