Una aproximación a las modalidades de reaseguro de los siniestros más grandes por el método de simulación de Montecarlo

Pons Cardell, Mª Àngels mapons@ub.edu
Sarrasí Vizcarra, F. Javier sarrasi@ub.edu
Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial
Universidad de Barcelona

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es tarificar diferentes modalidades de reaseguro basadas en los siniestros más grandes. Estas modalidades consisten en que el reasegurador asume un determinado importe de los k siniestros más grandes. A diferencia de las modalidades clásicas de reaseguro, donde la responsabilidad del reasegurador se determina, o bien, a partir de la suma asegurada, o bien, a partir del importe de los siniestros, en este caso la responsabilidad del reasegurador se centra en fijar el número de siniestros a su cargo. Para calcular la prima de reaseguro se debe determinar la función de distribución del coste de los k siniestros más grandes. El problema radica en que su expresión analítica es compleja y, por tanto, poco operativa, utilizándose sólo en aquellos casos en los que se obtiene a partir de funciones de distribución del número y del coste de los siniestros con expresiones analíticas muy sencillas. En este artículo se propone obtener la prima de reaseguro ordenando directamente los k siniestros más grandes aplicando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permitirá calcular la prima de reaseguro para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros.

ABSTRACT

The aim of this work is to price different types of reinsurance contracts only focusing on the largest claims. In these contracts, the reinsurer assumes the amount of the k largest claims, regardless of their amount. Unlike the classic reinsurance contracts, where the liability of the reinsurer is determined either from the total amount insured (proportional contracts), or from the amount of the claims (non-proportional contracts), this approach focuses on setting the number of claims for whom the insurer is responsible. To calculate the reinsurance premium, the distribution function of the cost of the k largest claims must be determined. However, the operational usefulness of the method is recommended only if the analytical expression of the distribution function is not too complex. For instance, this is the case when the function is obtained from the distribution function of both the number and the cost of the claims, with very simple analytical expressions. In this paper we propose a method to compute the reinsurance premium by applying the Monte Carlo simulation method and based on ordering directly the k largest claims. This technique will allow to compute the reinsurance premium of any distribution function of the number and the cost of the claims.

***Palabras claves*:** Reaseguro; Siniestros más grandes; Ordenación de siniestros; Simulación.

***Área temática*:** A4. Matemáticas financieras y actuariales.

1. INTRODUCCIÓN

El reaseguro, según Minzoni (2009), es un contrato o instrumento por el cual un asegurador denominado reasegurador, toma a su cargo total o parcialmente un riesgo ya cubierto por otro asegurador que se denomina cedente, sin alterar lo convenido entre este último y el asegurado.

Las diferentes formas de establecer la cesión del riesgo entre la cedente y el reasegurador dan lugar a las diferentes modalidades de reaseguro. Las más habituales en el mercado son las modalidades proporcionales y no proporcionales. En las primeras, la cesión del riesgo por parte de la compañía de seguros al reasegurador, se basa en un porcentaje de la suma asegurada de cada la póliza. Cuando este porcentaje es fijo se trata del reaseguro Cuota Parte y cuando es variable del reaseguro de Excedentes. En las modalidades no proporcionales el reparto del riesgo se basa en ceder al reasegurador, o bien, el exceso del siniestro respecto a una prioridad establecida por la cedente, es el caso del reaseguro de Exceso de Pérdida o XL (Excess Loss), o bien, el exceso de la siniestralidad de toda la cartera respecto a una prioridad también establecida por la cedente, que es el caso del reaseguro de Exceso de Siniestralidad o SL (Stop Loss).

Al margen de las modalidades anteriores existe una tercera familia de modalidades de reaseguro basada en el número de siniestros, como el reaseguro de los siniestros más grandes, que se caracteriza por fijar el número de siniestros que se hará cargo el reasegurador independientemente de su cuantía.

El reaseguro de los siniestros más grandes ya fue introducido por Ammeter en el año 1964. Posteriormente otros autores han trabajado sobre el tema, como por ejemplo Berliner (1972), comparando el reaseguro XL con el reaseguro de los siniestros más grandes, o Kremer (1982, 1984 y 1986), exponiendo las bondades de la mencionada modalidad y su tarificación bajo distintas condiciones. La tarificación del reaseguro de los siniestros más grandes no es sencilla, ya que se determina a partir de las funciones de distribución del coste de los siniestros ordenados por su cuantía, las cuales se caracterizan por una gran complejidad matemática, lo que ha hecho que en la práctica esta modalidad de reaseguro no haya sido prácticamente utilizada (Ladoucette y Teugels 2006). La complejidad matemática de las fórmulas obtenidas para tarificar esta modalidad de reaseguro hace que estas sean sólo aplicables para funciones de distribución del coste y del número de siniestros con expresiones analítica muy sencillas.

Este trabajo se centra en el estudio del reaseguro de los siniestros más grandes, introduciendo nuevas variantes, en particular las dos últimas, en las que sí se tiene en cuenta la cuantía de los k siniestros más grandes para determinar la cobertura del reaseguro. Las modalidades que se estudian son las siguientes, donde k es el número de los siniestros más grandes que van a cargo del reasegurador, y cuyo valor está fijado en el contrato de reaseguro:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo de un porcentaje de los k siniestros más grandes independientemente de su cuantía. Se trata de una generalización de la modalidad introducida por Ammeter en 1964.
- Reaseguro de exceso de pérdida o Excess-Loss (XL) de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo del exceso del siniestro respecto a una prioridad de cada uno de los k siniestros más grandes.
- Reaseguro de exceso de siniestralidad o Stop-Loss (SL) de los k siniestros más grandes. El reasegurador se hace cargo del exceso de la siniestralidad respecto a una prioridad de los k siniestros más grandes.

El objetivo de este trabajo es tarificar las tres modalidades de reaseguro de los siniestros más grandes antes citadas, pero ordenando directamente los k siniestros más grandes aplicando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permitirá calcular la prima de reaseguro para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros superando, de esta manera, las limitaciones comentadas anteriormente.

El trabajo tiene la siguiente estructura; en el apartado 2 se describe el enfoque clásico para el estudio del reaseguro de los siniestros más grandes; en el apartado 3 se incorpora el enfoque por simulación para el estudio del reaseguro de los siniestros más grandes; en el apartado 4 se lleva a cabo una aplicación numérica y en el apartado 5 se exponen las consideraciones finales.

2. ENFOQUE CLÁSICO PARA EL ESTUDIO DEL REASEGURO DE LOS SINIESTROS MÁS GRANDES

En este apartado se analizan las tres modalidades de reaseguro antes citadas basadas en los siniestros más grandes desde un punto de vista clásico, calculando la prima de reaseguro en términos de esperanza matemática a partir de la función de distribución de la cuantía de los siniestros ordenados por su cuantía; para ello un paso previo es ordenar los siniestros por su cuantía.

2.1. Ordenación de riesgos

Sea el siguiente proceso de riesgo:

$$(N, X_1, X_2, \dots\ X_N)$$

donde X_k, con $k = 1,2,\dots,N$, es la variable aleatoria coste del k-ésimo siniestro y N es la variable aleatoria número de siniestros asociado al intervalo temporal de estudio.

Las variables aleatorias X_k son independientes y equidistribuidas con función de distribución del coste del siniestro, $F(t)$, conocida:

$$F(t) = P[X_k \leq t] \text{ con } k = 1,2,\dots,N$$

Se supone también conocida la función generatriz de momentos, $\varphi_N(s)$, de la variable aleatoria N*:*

$$\varphi_N(s) = E[e^{s\cdot N}] = \sum_{n=0}^{\infty} P[N = n] \cdot e^{s\cdot N}$$

Si se ordenan las variables aleatorias X_k de menor a mayor en función de su cuantía, estas se pueden expresar como:

$$X_{N:1} \leq X_{N:2} \leq \dots \leq X_{N:\,i} \leq \cdots \leq X_{N:N}$$

siendo $X_{N:\,i}$, con $i = 1,2,\dots,N$, la variable aleatoria coste del i-ésimo siniestro más pequeño de los N ocurridos.

El objetivo es obtener la función de distribución de las variables aleatorias de los siniestros más grandes $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ con $j = 0,1,2,\dots$, donde $X_{N:N-j}$ es la variable aleatoria cuantía del $j+1$-ésimo siniestro más grande.

Por ejemplo, para el caso particular que $j = 0$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro más grande $P[X_{N:N} \leq t]$; si $j = 1$ se obtiene la función de distribución del coste del segundo siniestro más grande $P[X_{N:N-1} \leq t]$ y si $j = 2$ se obtiene la función de distribución del coste del tercer siniestro más grande $P[X_{N:N-2} \leq t]$.

Una vez ordenadas las variables aleatorias coste de los siniestros, estas dejan de ser equidistribuidas, ya que cada una de ellas presenta su particular función de distribución. El siguiente paso es obtener la expresión analítica de la función de distribución de las variables aleatorias ordenadas $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$ con $j = 0,1,2,\ldots$, a partir de la función de distribución del coste, $F(t)$, y de la función generatriz de momentos del número de siniestros, $\varphi_N(s)$. Una vez conocida la función de distribución de los siniestros más grandes se podrá determinar el coste esperado de los mismos.

En Alegre y Sarrasí (1995) se lleva a cabo el desarrollo teórico de $P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]$, donde se obtiene la siguiente expresión para $j \geq 0$:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot P\left[X_{n:n-j} \leq t\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{j} P[N = n] + \frac{1}{j!} \cdot \int_{0}^{F(t)} (1 - y)^{j} \cdot g^{j+1)}(y) \cdot dy \tag{1}$$

donde $g(s)$, con $s > 0$, es la transformada logarítmica de la función generatriz de momentos de la variable aleatoria N:

$$g(s) = \varphi_N(lns) = E[e^{N \cdot lns}] = E[s^N] = P[N = 0] + \sum_{n=1}^{\infty} P[N = n] \cdot s^n$$

siendo su derivada $j + 1$:

$$g^{j+1)}(s) = \sum_{n=j+1}^{\infty} P[N = n] \cdot n \cdot (n - 1) \cdot \ldots \cdot (n - j) \cdot s^{n-(j+1)}$$

En el caso particular que $j = 0$ se obtiene la función de distribución del coste del siniestro más grande de entre los que ocurran:

$$P[X_{N:N} \leq t] = P[N = 0] + \int_{0}^{F(t)} g'(y) \cdot dy = P[N = 0] + g(F(t)) - g(0) = g(F(t))$$

ya que $g(0) = P[N = 0]$.

Aplicando en la ecuación (1) el método de integración por partes con los cambios $u = (1-y)^j$; $du = -j \cdot (1-y)^{j-1} \cdot dy$; $v = g^{j)}(y)$; $dv = g^{j+1)}(y) \cdot dy$; y teniendo en cuenta que $g^{j)}(0) = j! \cdot P[N = j]$ se puede obtener una expresión recurrente para la función de distribución del coste del siniestro $j+1$-ésimo más grande:

$$P\left[X_{N:N-j} \leq t\right] = P\left[X_{N:N-(j-1)} \leq t\right] + \frac{1}{j!} \cdot \left[(1-F(t))^j \cdot g^{j)}(F(t))\right] \; para \; j \geq 1 \qquad (2)$$

Conocida la función de distribución de la variable aleatoria cuantía del siniestro $j+1$-ésimo más grande, $X_{N:N-j}$, se puede obtener su coste esperado o esperanza, $E\left[X_{N:N-j}\right]$, a partir de:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \int_0^\infty \left[1 - P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]\right] \cdot dt$$

Sustituyendo la expresión (2) en la expresión anterior se obtiene, a su vez, una fórmula de recurrencia para calcular la esperanza matemática de la variable aleatoria cuantía del siniestro $j+1$-ésimo más grande, $E\left[X_{N:N-j}\right]$, para $j = 1,2, \ldots$:

$$E\left[X_{N:N-j}\right] = \int_0^\infty \left[1 - P\left[X_{N:N-j} \leq t\right]\right] \cdot dt =$$

$$= E\left[X_{N:N-(j-1)}\right] - \frac{1}{j!} \cdot \int_0^\infty (1-F(t))^j \cdot g^{j)}(F(t)) \cdot dt$$

Para poder utilizar la fórmula anterior, se tiene que calcular previamente la esperanza del siniestro más grande, $E[X_{N:N}]$:

$$E[X_{N:N}] = \int_0^\infty \left[1 - P[X_{N:N} < t]\right] \cdot dt = \int_0^\infty [1 - g(F(t))] \cdot dt$$

En los siguientes apartados se obtienen la prima de reaseguro y la prima de la cedente a partir del coste esperado de los siniestros más grandes.

2.2. Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes

En esta modalidad de reaseguro, el reasegurador asume un coeficiente α, denominado cuota de retención del reaseguro, con $0 < \alpha \leq 1$, de los k siniestros más grandes independientemente de su cuantía.

La prima de reaseguro, π^R, se obtiene como la suma de las esperanzas del coste de los k siniestros más grandes ponderada por el coeficiente de retención del reaseguro, α:

$$\pi^R = \alpha \cdot \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}]$$

La prima que debe recibir la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de siniestros de la cartera y del coeficiente $1-\alpha$ de los k más grandes, se puede determinar por diferencia entre la prima pura total, π, y la prima de reaseguro, π^R, $\pi^C = \pi - \pi^R$. Como la prima pura total en términos esperados viene dada por el producto entre la esperanza del número de siniestros y la esperanza del coste total, entonces:

$$\pi^C = E(N) \cdot E(X) - \alpha \cdot \sum_{j=0}^{k-1} E[X_{N:N-j}]$$

2.3. Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes

En esta modalidad el reasegurador asume el exceso respecto a una prioridad M, de cada uno de los k siniestros más grandes. A diferencia de lo que sucede con el reaseguro de exceso de pérdida o XL tradicional, donde la prioridad se aplica a todos los siniestros de la cartera asociados al periodo del contrato, en este caso la prioridad sólo se refiere a los k siniestros más grandes. La prioridad M viene determinada por el importe máximo del siniestro que asume la cedente de cada uno de los k siniestros más grandes.

En este caso la prima de reaseguro, π^R, se obtiene de:

$$\pi^R = \sum_{j=0}^{k-1} E_M[X_{N:N-j}]$$

siendo $E_M[X_{N:N-j}] = \int_M^\infty \left[1 - P[X_{N:N-j} < t]\right] \cdot dt$ el coste esperado de la variable aleatoria exceso de cuantía respecto a la prioridad M del $j+1$-ésimo siniestro más grande.

La prima de reaseguro también se puede obtener directamente de $E[X_{N:N-j}]$ a partir de:

$$\pi^R = \sum_{j=0}^{k-1} \left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)^+$$

siendo $\left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)^+ = \begin{cases} E\left[X_{N:N-j}\right] - M & si \quad E\left[X_{N:N-j}\right] > M \\ 0 & si \quad E\left[X_{N:N-j}\right] \leq M \end{cases}$. Es decir, la prima de reaseguro se determina como la suma de las esperanzas del exceso respecto a la prioridad M, del coste de los k siniestros más grandes.

La prima que debe recibir la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de siniestros de la cartera y hasta la prioridad de los k más grandes, se determina, igual que el caso anterior, por la diferencia entre la prima pura total, π, y la prima de reaseguro, π^R:

$$\pi^C = \pi - \pi^R = E(N) \cdot E(X) - \sum_{j=0}^{k-1} E_M\left[X_{N:N-j}\right]$$

2.4. Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes

En esta tercera modalidad el reasegurador asume el exceso de siniestralidad respecto a una prioridad M, de los k siniestros más grandes. La prioridad M viene determinada por el importe máximo que asume la cedente de la siniestralidad de los k siniestros más grandes en un ejercicio económico. A diferencia de lo que sucede con el reaseguro de exceso de siniestralidad o Stop-Loss tradicional, donde la prioridad se aplica a la siniestralidad de toda la cartera asociada al periodo del contrato, en este caso la prioridad, sólo se aplica a la siniestralidad de k siniestros más grandes. Se entiende por siniestralidad de los k siniestros más grandes, la suma de las cuantías de los k siniestros más grandes, $\sum_{j=0}^{k-1} E\left[X_{N:N-j}\right]$.

La prima de reaseguro, π^R, se obtiene de:

$$\pi^R = \left(\sum_{j=0}^{k-1} \left(E\left[X_{N:N-j}\right] - M\right)\right)^+$$

siendo:

$$\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(E\left[X_{N:N-j}\right]-M\right)\right)^{+}=\begin{cases}\sum_{j=0}^{k-1}E\left[X_{N:N-j}\right]-M & si\ \sum_{j=0}^{k-1}E\left[X_{N:N-j}\right]>M\\ 0\ \ si & \sum_{j=0}^{k-1}E\left[X_{N:N-j}\right]\leq M\end{cases}$$

La prima que debe recibir la cedente, π^C, al hacerse cargo del resto de la siniestralidad de la cartera, se determina igual que en los dos casos anteriores, por diferencia entre la prima pura total, π, y la prima de reaseguro, π^R:

$$\pi^C=\pi-\pi^R= E(N)\cdot E(X)-\left(\sum_{j=0}^{k-1}\left(E\left[X_{N:N-j}\right]-M\right)\right)^{+}$$

Cabe destacar que, en las dos últimas modalidades la cobertura del reaseguro depende de las cuantías de los k sinestros más grandes, ya que se obtiene comparando éstas, de forma individual o agregada, con la prioridad *M* de la cedente.

3. ENFOQUE POR SIMULACIÓN PARA EL ESTUDIO DEL REASEGURO DE LOS SINIESTROS MÁS GRANDES

El cálculo de la prima de reaseguro utilizando el enfoque clásico, basado en la función de distribución de los siniestros ordenados, es poco operativo debido a la complejidad matemática que conlleva su cálculo. Este enfoque sólo es válido para funciones de distribución del coste y del número de siniestros que presenten expresiones analíticas sencillas y para valores de k muy pequeños, pudiéndose obtener, sólo en estos casos, expresiones cerradas que calculen la prima de reaseguro de las modalidades anteriores. Este problema se puede solucionar ordenando directamente los k siniestros más grandes aplicando el método de simulación de Montecarlo. Esta técnica permitirá calcular la prima de reaseguro para cualquier función de distribución del número y del coste de los siniestros superando, de esta manera, las limitaciones del enfoque clásico.

3.1. Método de simulación de Montecarlo

El objetivo es simular por Montecarlo números pseudoaleatorios uniformemente distribuidos entre 0 y 1, (Peña (2001)), para obtener realizaciones de las variables aleatorias a partir de sus funciones de distribución de probabilidad. En este caso se obtienen valores simulados del número de siniestros y del coste de los mismos, a partir de sus funciones de distribución correspondientes, para poder determinar, de esta manera, la prima de reaseguro de las tres modalidades descritas en el apartado 2.

El proceso que se sigue para simular el número de siniestros y el coste de los mismos, a partir de sus funciones de distribución, es el descrito a continuación.

- Simulación del número de siniestros.

Sea $P_N(n) = P(N = n)$, con $n = 0, 1, 2, ...$, la función de distribución de la variable aleatoria discreta número de siniestros, N, y $F_N(n) = P[N \leq n]$.

Si u es un número pseudoaleatorio generado de una distribución uniforme 0 y 1, entonces s es un valor simulado de la variable aleatoria discreta número de siniestros, N, asociado a u, si y solo si $P[N \leq s - 1] < u < P[N \leq s]$.

Si se repite el proceso $NSIM$ veces, se obtendrán tantas realizaciones, n^l, con $l = 1, \dots, NSIM$, de la variable aleatoria N, como simulaciones se hayan realizado:

$$u^1 \to s^1 = n^1$$

$$u^2 \to s^2 = n^2$$

$$\dots$$

$$u^{NSIM} \to s^{NSIM} = n^{NSIM}$$

- Simulación del coste de los siniestros.

Sea $F_X(t) = F(t) = P[X \leq t]$, donde $t \geq 0$, la función de distribución de la variable aleatoria continua coste de los siniestros, X.

Del mismo modo que en el caso anterior, si u es un número pseudoaleatorio generado de una distribución uniforme 0 y 1, entonces s es un valor simulado de la variable aleatoria, X, asociado a u, si y solo si $F(s) = P[X \leq s] = u \rightarrow s = F^{-1}(u)$.

Análogamente, repitiendo el proceso $NSIM$ veces, se obtendrán tantas realizaciones, x^l, con $l = 1, \ldots, NSIM$, de la variable aleatoria X como simulaciones se hayan realizado:

$$u^1 \rightarrow s^1 = x^1$$

$$u^2 \rightarrow s^2 = x^2$$

$$\ldots$$

$$u^{NSIM} \rightarrow s^{NSIM} = x^{NSIM}$$

3.2. Ordenación de los siniestros y cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente asociada a cada simulación

A partir de la función de distribución del número de siniestros, N, y para la simulación l-ésima, se obtiene una realización de dicha variable aleatoria, n^l. Para cada realización n^l, y a partir de la función de distribución del coste, se obtiene un vector x^l que recoge el coste obtenido por simulación de cada uno de los n^l siniestros simulados, de tal forma que:

$$n^l \rightarrow x^l = (x_1^l, x_2^l, \ldots, x_{n^l}^l)$$

A continuación, se ordenan las componentes del vector x^l por su cuantía:

$$x_{ord}^l = (x_{1:n^l}^l, x_{2:n^l}^l, \ldots, x_{n^l:n^l}^l)$$

Una vez se tiene el vector x_{ord}^l, que recoge el coste asociado a la simulación l-ésima de cada uno de los n^l siniestros ordenados, se obtiene la prima del reaseguro, $\pi^{R,l}$, la prima de la cedente, $\pi^{C,l}$, y la prima total, π^l, asociadas a la simulación l-ésima, siendo $\pi^l = \pi^{R,l} + \pi^{C,l}$.

Las expresiones que adoptan las primas $\pi^{R,l}$ y $\pi^{C,l}$ para las tres modalidades de reaseguro estudiadas en el apartado 2 son:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes

En esta modalidad la compañía reaseguradora al hacerse cargo de la cuota de retención del reaseguro en tanto por uno, α, de los k siniestros más grandes, al estar estos ordenados, la prima de reaseguro se obtiene sumando el coste ponderado por α, de los k siniestros más grandes del vector x_{ord}^{l} . Mientras que la prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total, dada por el coste de todos los siniestros, y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l} = \alpha \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l-i:\, n^l}^{l} \quad con \quad k = 1,2, \ldots$$

$$\pi^{C,l} = \pi^{l} - \pi^{R,l} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{i:\, n^l}^{l} - \alpha \cdot \sum_{i=0}^{k-1} x_{n^l-i:\, n^l}^{l} \qquad con \quad k = 1,2, \ldots$$

- Reaseguro de exceso de perdida de los k siniestros más grandes

En este caso la prima de reaseguro consistirá en sumar el exceso positivo respecto a la prioridad M del coste de los k siniestros más grandes del vector x_{ord}^{l}. La prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l} = \sum_{i=0}^{k-1} \left(x_{n^l-i:\, n^l}^{l} - M \right)^{+} \quad con \quad k = 1,2, \ldots$$

siendo,

$$\left(x_{n^l-i:\, n^l}^{l} - M \right)^{+} = \begin{cases} x_{n^l-i:\, n^l}^{l} - M & si \quad x_{n^l-i:\, n^l}^{l} > M \\ 0 & si \quad x_{n^l-i:\, n^l}^{l} \leq M \end{cases}$$

$$\pi^{C,l} = \pi^{l} - \pi^{R,l} = \sum_{i=0}^{k-1} x_{i:\, n^l}^{l} - \sum_{i=0}^{k-1} \left(x_{n^l-i:\, n^l}^{l} - M \right)^{+} \quad con \quad k = 1,2, \ldots$$

- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes

En esta última modalidad la prima de reaseguro consiste en sumar el exceso positivo respecto a la prioridad M de la siniestralidad de los k siniestros más grandes del vector x_{ord}^{l}. Igual que en los dos casos anteriores, la prima de la cedente se obtiene por diferencia entre la prima total y la prima de reaseguro.

$$\pi^{R,l} = \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} - M\right)^{+} \quad con \quad k = 1,2,\ldots$$

siendo,

$$\left(\sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} - M\right)^{+} = \begin{cases} \sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} - M \quad si \quad \sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} > M \\ \qquad 0 \quad si \quad \sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} \leq M \end{cases}$$

$$\pi^{C,l} = \pi^{l} - \pi^{R,l} = \sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{i:\,n^l} - \left(\sum_{i=0}^{k-1} x^{l}_{n^l-i:\,n^l} - M\right)^{+} \quad con \quad k = 1,2,\ldots$$

3.3. Cálculo de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente

Sean $\widetilde{\pi^R}$ y $\widetilde{\pi^C}$ las variables aleatorias prima de reaseguro y prima de la cedente. Las realizaciones de estas variables aleatorias se obtienen simulando $NSIM$ veces la prima de reaseguro y la prima de la cedente, por lo tanto, habrá tantas realizaciones como simulaciones se lleven a cabo. Teniendo en cuenta que estas son equiprobables con probabilidad $\frac{1}{NSIM}$, las funciones de distribución de $\widetilde{\pi^R}$ y de $\widetilde{\pi^C}$ obtenidas por simulación quedan definidas en las siguientes tablas:

Tabla 1. Función de distribución de $\widetilde{\pi^R}$

Simulación	Realizaciones π^R	$P[\widetilde{\pi^R} = \pi^R]$
n^1	$\pi^{R,1}$	$1/NSIM$
n^2	$\pi^{R,2}$	$1/NSIM$
...	...	...
n^l	$\pi^{R,l}$	$1/NSIM$
...	...	...
n^{NSIM}	$\pi^{R,NSIM}$	$1/NSIM$

Fuente: Elaboración propia

Tabla 2. Función de distribución de $\widetilde{\pi^C}$

Simulación	Realizaciones π^C	$P[\widetilde{\pi^C} = \pi^C]$
n^1	$\pi^{C,1}$	$1/NSIM$
n^2	$\pi^{C,2}$	$1/NSIM$
...	...	...
n^l	$\pi^{C,l}$	$1/NSIM$
...	...	...
n^{NSIM}	$\pi^{C,NSIM}$	$1/NSIM$

Fuente: Elaboración propia

Conocidas las funciones de distribución de $\widetilde{\pi^R}$ y de $\widetilde{\pi^C}$ se pueden aplicar los criterios del cálculo de primas (Boj et al., (2020)) para la obtención de la prima de reaseguro, π^R, y de la cedente, π^C:

- Principio de equivalencia o de la prima pura:

$$\pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right]$$
$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right]$$

- Principio del valor esperado:

$$\pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right] + \delta^R \cdot E[\widetilde{\pi^R}]$$
$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right] + \delta^C \cdot E[\widetilde{\pi^C}]$$

- Principio de la desviación típica:

$$\pi^R = E\left[\widetilde{\pi^R}\right] + \delta^R \cdot D[\widetilde{\pi^R}]$$
$$\pi^C = E\left[\widetilde{\pi^C}\right] + \delta^C \cdot D[\widetilde{\pi^C}]$$

Siendo δ^Cy δ^R el recargo de seguridad, en tanto por uno, aplicado por la cedente y por el reasegurador sobre el valor esperado y sobre la desviación tipo, respectivamente.

- Principio del percentil:

$$\pi^R = VaR_{\widetilde{\pi^R}}(\varepsilon)$$
$$\pi^C = VaR_{\widetilde{\pi^C}}(\varepsilon)$$

donde ε es el nivel de confianza. Este se puede asociar a la probabilidad de solvencia de la compañía si la operación se financia estrictamente con las primas cobradas.

4. APLICACIÓN NUMÉRICA

En este apartado se muestran y analizan los valores numéricos de la prima de reaseguro y de la prima de la cedente obtenidas para las tres modalidades de reaseguro estudiadas en los apartados anteriores, aplicando los diferentes criterios de cálculo de primas citados en el apartado 3.3. El lenguaje de programación utilizado para realizar los cálculos ha sido el lenguaje R. Las hipótesis asumidas son que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson y que el coste de los mismos se distribuye según una exponencial. Para las tres modalidades de reaseguro se asumen los siguientes datos comunes:

- Número de simulaciones: $NSIM = 1.000.000$.
- Coste medio de los siniestros: $E(X) = 100$.
- Número medio de siniestros: $E(N) = 10$.
- Recargo de seguridad aplicado por la cedente: $\delta^C = 0{,}05$.
- Recargo de seguridad aplicado por el reasegurador: $\delta^R = 0{,}05$.
- Nivel de confianza aplicado en el criterio del percentil: $\varepsilon = 0{,}75$.

Las hipótesis asumidas para cada modalidad de reaseguro estudiada son:

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes: la cuota de retención del reaseguro, en tanto por uno, es $\alpha = 0{,}4$.
- Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes: la prioridad de la cedente coincide con el coste medio de la cartera: $M = E(X) = 100$.
- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes: la prioridad de la cedente es $M = 500$.

En las tablas 3, 4, 7, 8, 11 y 12 se muestran los valores de la esperanza, de la desviación tipo y del VaR, con un nivel de confianza del 75%, de las variables aleatorias prima de reaseguro, $\widetilde{\pi^R}$, y prima de la cedente, $\widetilde{\pi^C}$, para diferentes valores de k y para las tres modalidades de reaseguro estudiadas. Así mismo, en las tablas 5, 6, 9, 10, 13 y 14, se muestran los valores de la prima de reaseguro, π^R, y la prima de la cedente, π^C, según el criterio de la prima pura, el valor esperado, la desviación tipo y el criterio del percentil con un nivel de confianza del 75%, también para las tres modalidades de reaseguro estudiadas.

- Reaseguro cuota parte de los k siniestros más grandes con $\alpha = 0{,}4$

Tabla 3. Estadísticos de la prima de reaseguro

k	$E[\widetilde{\pi^R}]$	$D[\widetilde{\pi^R}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^R}}(0{,}75)$
	190,4150	75,74869	234,2695
4	287,5264	109,7309	354,9989
6	343,4317	134,7932	427,8407
8	374,8172	153,5868	471,9010
10	389,9567	166,5667	494,8779

Fuente: Elaboración propia

Tabla 4. Estadísticos de la prima de la cedente

k	$E[\widetilde{\pi^C}]$	$D[\widetilde{\pi^C}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^C}}(0{,}75)$
2	809,3510	389,4363	1041,2280
4	712,5813	350,3524	917,6971
6	655,9138	319,9846	841,3620
8	625,0350	297,0281	796,4068
10	609,4330	282,3927	773,7535

Fuente: Elaboración propia

Tabla 5. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

k	Criterios de cálculo de π^R			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	190,4150	199,9358	194,2025	234,2695
4	287,5264	301,9027	293,0129	354,9989
6	343,4317	360,6033	350,1713	427,8407
8	374,8172	393,5580	382,4965	471,9010
10	389,9567	409,4545	398,2850	494,8779

Fuente: Elaboración propia

Tabla 6. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

k	Criterios de cálculo de π^C			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	809,3500	849,8185	828,8228	1041,228
4	712,5813	748,2103	730,0989	917,6971
6	655,9138	688,7095	671,9130	841,3620
8	625,0350	656,2867	639,8864	796,4068
10	609,4330	639,9047	623,5527	773,7535

Fuente: Elaboración propia

- Reaseguro de exceso de pérdida de los k siniestros más grandes con $M = E(X) = 100$

Tabla 7. Estadísticos de la prima de reaseguro

k	$E[\widetilde{\pi^R}]$	$D[\widetilde{\pi^R}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^R}}(0{,}75)$
2	279,4992	184,3570	385,4706
4	349,7527	244,8760	493,1298
6	364,9620	265,3810	514,4003
8	367,5983	270,5117	516,0434
10	368,4823	271,3853	517,3098

Fuente: Elaboración propia

Tabla 8. Estadísticos de la prima de la cedente

k	$E[\widetilde{\pi^C}]$	$D[\widetilde{\pi^C}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^C}}(0{,}75)$
2	720,1765	321,8272	905,7357
4	650,2469	259,2360	798,4124
6	635,0065	236,2273	779,3978
8	632,6790	230,7232	778,9978
10	632,4312	230,0790	779,2910

Fuente: Elaboración propia

Tabla 9. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo de primas

k	Criterios de cálculo de π^R			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	279,4992	293,4741	288,7170	385,4706
4	349,7527	367,2403	361,9965	493,1298
6	364,9620	383,2101	378,2311	514,4003
8	367,5983	385,9782	381,1239	516,0434
10	368,4823	386,9065	382,0516	517,3098

Fuente: Elaboración propia

Tabla 10. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo de primas

k	Criterios de cálculo de π^C			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon = 0{,}75$
2	720,1765	756,1853	736,2678	905,7357
4	650,2469	682,7593	663,2087	798,4124
6	635,0065	666,7568	646,8178	779,3978
8	632,6790	664,3129	644,2151	778,9978
10	632,4312	664,0527	643,9351	779,2910

Fuente: Elaboración propia

- Reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes con $M = 500$

Tabla 11. Estadísticos de la prima de reaseguro

k	$E[\widetilde{\pi^R}]$	$D[\widetilde{\pi^R}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^R}}(0{,}75)$
2	63,8537	118,6576	85,3033
4	245,7013	240,0889	387,1794
6	377,5452	310,4193	570,9644
8	452,8172	358,9956	678,6376
10	492,2971	392,1706	737,9249

Fuente: Elaboración propia

Tabla 12. Estadísticos de la prima de la cedente

k	$E[\widetilde{\pi^C}]$	$D[\widetilde{\pi^C}]$	$VaR_{\widetilde{\pi^C}}(0{,}75)$
2	936,2146	381,2275	1172,4540
4	754,3279	260,1950	898,6594
6	622,5951	179,5217	706,9225
8	546,1173	122,2095	587,1069
10	508,1442	84,8380	521,9683

Fuente: Elaboración propia

Tabla 13. Valores de la prima de reaseguro según los criterios de cálculo

k	Criterios de cálculo de π^R			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon =$ 0,75
2	63,85368	67,04637	69,78656	85,3033
4	245,7013	257,9864	257,7058	387,1794
6	377,5452	396,4225	393,0662	570,9644
8	452,8172	475,4581	470,7670	678,6376
10	492,2971	516,9120	511,9057	737,9249

Fuente: Elaboración propia

Tabla 14. Valores de la prima de la cedente según los criterios de cálculo

k	Criterios de cálculo de π^C			
	Prima pura	Valor esperado	Desviación tipo	Percentil $\varepsilon =$ 0,75
2	936,2146	983,0253	955,2760	1.172,454
4	754,3279	792,0443	767,3377	898,6594
6	622,5951	653,7249	631,5712	706,9225
8	546,1173	573,4232	552,2278	587,1069
10	508,1442	533,5510	512,3861	521,9683

Fuente: Elaboración propia

Una vez analizados los datos se llegan a las siguientes conclusiones comunes a las tres modalidades de reaseguro estudiadas.

Respecto a los estadísticos de las variables aleatorias $\widetilde{\pi^R}$ y $\widetilde{\pi^C}$, se observa en primer lugar que, para cualquier valor de k, se da la siguiente relación de orden:

$$VaR_{\widetilde{\pi^R}}(0{,}75) > E\left[\widetilde{\pi^R}\right] < D\left[\widetilde{\pi^R}\right] \quad \text{y} \quad VaR_{\widetilde{\pi^C}}(0{,}75) > E\left[\widetilde{\pi^C}\right] < D\left[\widetilde{\pi^C}\right]$$

En segundo lugar, los tres estadísticos presentan proporcionalidad directa con respecto a k, cuando hacen referencia a la variable aleatoria prima del reasegurador, $\widetilde{\pi^R}$, ya que el reasegurador tiene mayor participación en el coste, y proporcionalidad inversa cuando se considera la variable aleatoria prima de la cedente, $\widetilde{\pi^C}$.

Respecto a los valores de las primas al tener mayor participación el reasegurador en el coste al aumentar el valor de k, la prima del reasegurador va creciendo y, por lo tanto, la prima de la cedente va disminuyendo ya que esta cada vez asume menos responsabilidad en su cartera.

Si se considera el criterio de la prima pura, al coincidir con la esperanza matemática de las variables consideradas, se observa que, para cualquier valor de k, la suma de la prima de la cedente y de la prima del reasegurador coincide con el coste total medio o siniestralidad media de la cartera: $\pi^R + \pi^C = E[X] \cdot E[N] = 1.000$.

También cabe destacar que el criterio del percentil, para el nivel de confianza considerado, proporciona unas primas de reaseguro y de la cedente sensiblemente mayores, para cualquier valor de k, que el resto de los criterios, los cuales presentan valores de las primas con pequeñas diferencias entre ellos, siendo el criterio del valor esperado el que proporciona primas algo mayores que el criterio de la desviación tipo. El criterio de la prima pura, como es evidente, al no considerar ningún recargo, es el presenta las primas más pequeñas.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Se han analizado tres modalidades de reaseguro de los k siniestros más grandes, el reaseguro cuota parte, el reaseguro de exceso de pérdida y el reaseguro de exceso de siniestralidad de los k siniestros más grandes, que se caracterizan por fijar el número de siniestros más grandes que van a cargo del reasegurador.

En primer lugar, cabe destacar que las expresiones matemáticas que permiten calcular la prima del reasegurador y la prima de la cedente en estas modalidades son complejas a nivel teórico, ya que dependen de las funciones de distribución de los siniestros ordenados por su cuantía. Debido a la complejidad matemática de dichas funciones de distribución, las expresiones obtenidas de la prima del reasegurador y de la cedente sólo son operativas para valores de k pequeños y para funciones de distribución del coste y del número de siniestros sencillas. Para evitar este inconveniente se propone ordenar los siniestros y calcular la prima de reasegurador y la prima de la cedente utilizando el método de simulación de Montecarlo.

En el ejemplo numérico de este trabajo se ha asumido que el número de siniestros sigue una distribución de Poisson y que el coste de los mismos se distribuye según una exponencial, aunque se hubieran podido asumir otras hipótesis. También se ha considerado para las tres modalidades de reaseguro estudiadas las mismas hipótesis respecto al coste medio de los siniestros, el número medio de siniestros, el recargo de seguridad aplicado por la cedente y por el reasegurador, y para el nivel de confianza aplicado en el criterio del percentil.

Respecto a los estadísticos obtenidos, en el ejemplo numérico, de las variables aleatorias prima del reasegurador y prima de la decente, se observa en primer lugar que, para cualquier valor de k, el VaR para un nivel de confianza del 75%, es superior a la esperanza y esta es inferior a la desviación tipo. En segundo lugar, cabe indicar que los tres estadísticos presentan proporcionalidad directa con respecto a k, cuando hacen referencia a la prima del reasegurador, y proporcionalidad inversa cuando se considera la prima de la cedente. También cabe mencionar que el criterio del percentil, para el nivel de confianza considerado, proporciona unas primas de reaseguro y de la cedente sensiblemente mayores, para cualquier valor de k, que el resto de los criterios, los cuales presentan valores de las primas con pequeñas diferencias entre ellos, siendo el criterio del valor esperado el que proporciona primas algo mayores que el criterio de la desviación tipo.

Finalmente decir que en el mercado reasegurador el desconocimiento de estas modalidades de reaseguro ha hecho que las compañías aseguradoras no las utilicen.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ALEGRE, A. y SARRASÍ, F.J. (1995). "Modalidades alternativas de reaseguro basadas en la ordenación de riesgos". Anales del Instituto de Actuarios Españoles. Tercera época, número 1.
- AMMETER, H. (1964). "The rating of "Largest Claim" reinsurance covers". Quarterly letter from Algemeene Reinsurance Companies Jubilee, número 2, pp. 79-109.
- BERLINER, B. (1972). "Correlations between excess-of-loss reinsurance covers and reinsurance of the n largest claims". Astin Bulletin, pp. 260-275.
- BOJ, E., CLARAMUNT, M.M. y COSTA, T. (2020). Tarificación y provisiones. Tercera edición. Colección de publicaciones del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial. Universidad de Barcelona. http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/149241.
- KREMER, E. (1982). "Rating of largest claims and ECOMOR reinsurance treaties for large portfolios". Astin Bulletin. Volumen 3.
- KREMER, E. (1984). "An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties". Scandinavian Actuarial Journal, pp. 11-22.
- KREMER, E. (1986). "Finite formulas for the general reinsurance treaty based on ordered claims". Insurance Mathematics and Economics, pp. 233-238.
- KREMER, E. (1986). "Simple formulas for the premiums of the LCR and ECOMOR treaties under exponential claims sizes". Blätter DGVFM, pp. 237-243.
- LADOUCETTE, S. y TEUGELS, J. (2006). "Reinsurance of large claims". Journal of computational and applied mathematics, Volumen 186, pp. 163-190.
- MINZONI, A. (2009). Reaseguro. Tercera edición. Facultad de Ciencias, UNAM. México.
- PEÑA, D. (2001). Fundamentos de estadística. Editorial Alianza. Madrid.